

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов направления подготовки 12.03.04
«Биотехнические системы и технологии» очной формы обучения*



Могилев 2024

УДК 519.876.2:620.179
ББК 22.18:34.9
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «25» октября 2024 г.,
протокол № 2

Составители: канд. техн. наук, доц. А. В. Кушнер;
ст. преподаватель Е. Н. Прокопенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. С. О. Парашков

В методических рекомендациях кратко изложены теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ. Рекомендации составлены в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математическое моделирование физических процессов» и предназначены для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» очной формы обучения.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ответственный за выпуск

А. В. Хомченко

Корректор

А. А. Подошевка

Компьютерная верстка

Н. П. Полевничая

Подписано в печать

. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Печать трафаретная. Усл. печ. л.

. Уч.-изд. л.

. Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования

«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,

изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2024

Содержание

1 Виды моделирования и постановка задач моделирования.....	4
2 Общие принципы математического моделирования и методы исследования моделей	6
3 Построение имитационных математических моделей с использованием метода Монте-Карло	9
4 Построение экспериментально-статистических моделей путем пассивного эксперимента.....	14
5 Построение экспериментально-статистических моделей путем активного эксперимента	19
6 Построение и оптимизация математических моделей процессов при ограничении на параметры в виде равенств	25
7 Построение и оптимизация математических моделей процессов при ограничении на параметры в виде неравенств.....	27
8 Моделирование электрического генератора сердца.....	29
Список литературы	36

1 Виды моделирования и постановка задач моделирования

Цель работы: изучить виды математического моделирования; научиться постановке задач, решаемых методом математического моделирования.

1.1 Основные теоретические сведения

Каждый конкретный объект характеризуется набором свойств, под которыми понимаются величины, отражающие его поведение и учитывающие условия его функционирования во взаимодействии с внешней средой.

Модель объекта может быть представлена в виде множества величин, описывающих процесс функционирования и отражающих следующие подмножества (рисунок 1.1) [1, 2]:

- входные воздействия на объект (подмножество $\{X\}$);
- воздействия внешней среды на объект (подмножество $\{V\}$);
- внутренние (собственные) параметры системы (подмножество $\{H\}$);
- выходные характеристики системы (подмножество $\{Y\}$).

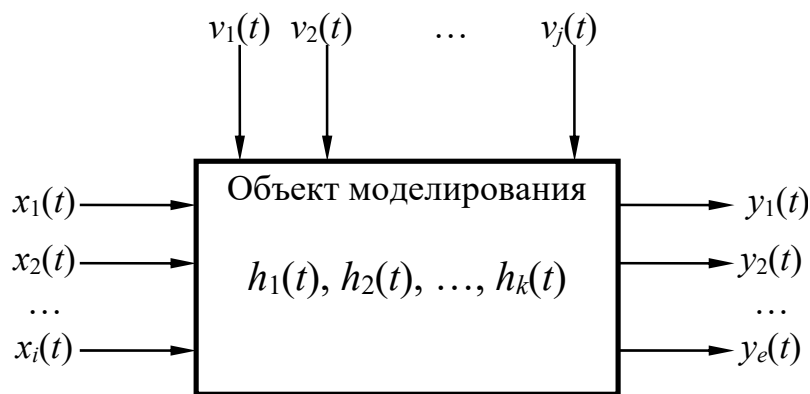


Рисунок 1.1 – Моделируемый объект

В общем случае указанные выше подмножества являются элементами непересекающихся подмножеств и содержат как детерминированные, так и стохастические (вероятностные) составляющие.

Подмножества $\{X\}$, $\{V\}$, $\{H\}$ являются независимыми (экзогенными) переменными, которые в векторной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t)); \\ \vec{v}(t) &= (v_1(t), v_2(t), \dots, v_j(t)); \\ \vec{h}(t) &= (h_1(t), h_2(t), \dots, h_k(t)),\end{aligned}\tag{1.1}$$

а подмножество $\{Y\}$ представляет собой зависимые переменные (эндогенные) и имеет в векторной форме следующий вид:

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_l(t)). \quad (1.2)$$

Процесс функционирования объекта моделирования описывается во времени оператором F , который в общем случае преобразует экзогенные переменные в эндогенные в соответствии с соотношением

$$\vec{Y}(t) = F(X(t), V(t), H(t)). \quad (1.3)$$

Представленная зависимость называется законом функционирования объекта.

Моделирование заключается в отыскании закона функционирования моделируемого объекта. При этом оно применяется как в учебной, так и научной практике для решения двух групп задач: задач обучения и исследовательских задач.

К задачам обучения относятся [1, 2]:

- применение моделирования и моделей для уяснения физических законов;
- рассмотрение действия новых установок и разработок;
- тренировки персонала действующих производственных объектов.

К исследовательским задачам, решаемым с помощью моделирования, относят:

- прямую задачу анализа, которая предполагает задание объекта параметрами своих элементов и параметрами исходного режима, структурой или уравнениями. Требуется определить реакцию объекта на действующие силы (условия, возмущения) или сигналы;
- обратную задачу анализа, которая по известной реакции объекта требует найти силы (условия, возмущения), заставившие прийти к данному состоянию и вызвавшие данную реакцию;
- задачу синтеза, которая требует нахождения таких параметров объекта, при которых процессы, происходящие в этом объекте, будут иметь желательный по каким-либо соображениям характер;
- индуктивные задачи, которые имеют целью проверку гипотез, уточнение уравнений, описывающих процессы в моделируемом объекте, выявление свойств элементов моделируемого объекта.

Особую значимость в практике моделирования физических процессов имеют первые три задачи.

1.2 Индивидуальное задание

Решить следующую прямую задачу анализа.

Для реализации датчика перемещений используется емкостная система на основе плоского конденсатора. Каким образом будет изменяться емкость C на выходе датчика, если пластины конденсатора имеют площадь S , расстояние d между пластинами изменяется в интервале $[d_1; d_2]$, а пространство между пластинами заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ε ?

Примечание – $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Самостоятельно сформулировать обратную задачу анализа. Решить сформулированную задачу. При этом задаться минимальным и максимальным значением емкости C , рассчитанным ранее.

Самостоятельно сформулировать задачу синтеза. Решить задачу синтеза.

1.3 Указания к выполнению задания

Проанализируйте поставленную прямую задачу и определите входные воздействия, множество внешних воздействий, множество собственных параметров моделируемого процесса, множество выходных параметров.

Получите связь этих параметров в виде аналитического выражения, отражающего физический процесс.

1.4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; сформулированное условие обратной задачи анализа; сформулированное условие задачи синтеза; реализацию модели на ЭВМ; результаты решения прямой задачи, результаты решения обратной задачи, результаты решения задачи синтеза в виде графических зависимостей, выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение понятиям «моделирование», «модель».
- 2 Как классифицируется моделирование? Поясните каждый из видов моделирования.
- 3 С помощью каких подмножеств представляется модель объекта?
- 4 Какие переменные (подмножества переменных) называются зависимыми? Независимыми?
- 5 Какая зависимость называется законом функционирования?
- 6 Для решения каких задач применяется математическое моделирование?
- 7 Сформулируйте прямую задачу анализа, обратную задачу анализа.

2 Общие принципы математического моделирования и методы исследования моделей

Цель работы: изучить основные этапы математического моделирования.

2.1 Основные теоретические сведения

Математические модели позволяют свести исследование реального «нематематического» объекта к решению математической задачи, открывая тем самым возможность использования для его изучения хорошо разработанного

математического аппарата в сочетании с вычислительной техникой.

Решение задач моделирования начинается со сбора факторов и данных научных наблюдений, затем происходит формализация объекта и строится математическая модель, т. е. выделяются его наиболее существенные черты и свойства и производится их описание с помощью математических уравнений и формул. После того как построена модель, т. е. задаче придана математическая форма, мы можем либо воспользоваться для ее изучения известными математическими методами, либо, если таковых нет, разрабатывать новые.

Исходным пунктом построения модели, как правило, бывает некоторая эмпирическая реальная картина явления, выдвигающая перед исследователем задачу, на которую нужно найти ответ. Но прежде всего следует установить, в чем заключается задача.

На рисунке 2.1 указаны основные этапы построения конкретных моделей [2].



Рисунок 2.1 – Схема построения математической модели

Этап 1. При уяснении и постановке задачи на физическом уровне происходит процесс схематизации и идеализации явления, т. е. выделение его существенных особенностей. Некоторые черты явлений могут оказаться важными, другие – несущественными.

Этап 2. После выделения существенных факторов следующий шаг заключается в переводе нужных нам данных на язык математических понятий и величин. Эта самая трудная стадия процесса моделирования. Здесь приходится часто опираться на фундаментальные физические законы, законы электромагнетизма, принципы теории вероятностей и т. д.

Этап 3. После построения модели (да и в ходе его) часто следует проводить проверку логической непротиворечивости модели и ее адекватности явлению. Так, например, можно использовать весьма простое и всегда эффективное правило проверки физической размерности всех членов уравнений.

Этап 4. Все существенные данные из перечня определяющих величин и параметров явления должны входить в математическую формулировку задачи. Справедливость модели проверяется по результатам решения теоретической задачи и сопоставлении полученного результата с реальной ситуацией, которая изучается.

Возможны два варианта получения результата моделирования:

- 1) аналитическое решение задачи;
- 2) применение численных методов.

Первый вариант применим, когда математическая модель достаточно проста. В случаях, когда математическое описание моделируемого процесса представляет сложную математическую систему уравнений, приходится применять численные методы решения. Естественно, при этом должна обеспечиваться заданная точность решения. Однако прежде чем выбрать тот или иной метод численного решения, следует проанализировать ограничения, связанные с его использованием.

В процессе решения задачи модель может уточняться.

2.2 Индивидуальное задание

На плоскопараллельную пластинку толщиной d падает тонкий луч света под углом α (рисунок 2.2). На расстоянии L от центральной плоскости с обеих сторон пластинки установлены экраны Э1 и Э2. Показатель преломления материала пластинки n_2 , показатель преломления среды с одной стороны пластинки n_1 , а с другой стороны – n_3 . Исходные данные выдает преподаватель.

Необходимо получить зависимость изменения отклонения луча на экранах Э1 и Э2, если угол падения изменяется от 0° до 90° .

Отражением света на границах раздела сред можно пренебрегать.

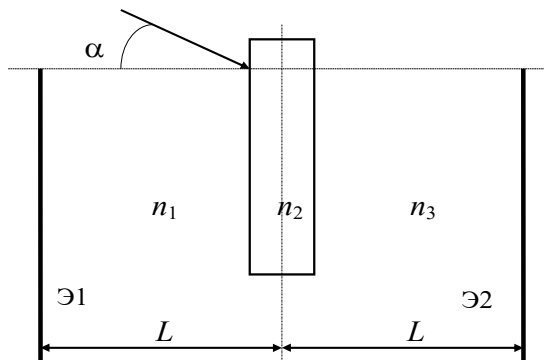


Рисунок 2.2 – Схема для расчета

2.3 Указания к выполнению задания

Решение задачи должно основываться на строгой последовательности выполнения этапов математического моделирования.

Во-первых, необходимо уяснить на физическом уровне происходящие явления (преломление, отражение света), схематизировать и идеализировать их.

Схема должна быть дополнена ходом лучей. При этом необходимо определить существенные и несущественные черты происходящего явления.

Во-вторых, перевести необходимые данные на язык математических понятий и величин. На этом этапе следует воспользоваться законом преломления лучей при прохождении ими границы раздела сред.

В-третьих, после построения модели следует проверить ее логическую непротиворечивость.

В-четвертых, полученная модель должна быть простой и наглядной.

2.4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; схему прохождения лучей через пластинку; полученную математическую модель; реализацию модели на ЭВМ; графическое представление зависимостей; выводы.

Контрольные вопросы

1 Какие требования предъявляются к моделям? Поясните смысл этих требований.

2 Какие уровни моделирования Вам известны?

3 Какие подходы к моделированию существуют? Поясните смысл каждого из подходов.

4 На какие этапы можно разбить процесс построения математической модели?

5 Зачем и в каких случаях производят корректировку модели?

6 Какие существуют варианты получения результата моделирования?

3 Построение имитационных математических моделей с использованием метода Монте-Карло

Цель работы: освоить применение метода Монте-Карло для построения моделей, учитывающих воздействие на объект случайно изменяющихся факторов.

3.1 Основные теоретические сведения

Метод Монте-Карло заключается в использовании случайных чисел для моделирования различных объектов, ситуаций и физических явлений. Квазиравномерно распределенные случайные числа обычно генерируются ЭВМ в отрезке значений $[0; 1]$ [2]. Перевод равномерно распределенных случайных чисел в интервал $[a; b]$ производится с помощью формулы

$$Z_i = a + (b - a) \cdot X_i. \quad (3.1)$$

Случайные числа с различными законами распределения получают с помощью формул преобразования.

Если случайная величина η имеет функцию распределения плотности вероятностей $f_{\eta}(x)$, то случайная величина

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f_{\eta}(x) dx$$

является равномерно распределенной в интервале $[0; 1]$.

Алгоритм получения случайных чисел y_i с заданным законом распределения в этом случае имеет следующий вид:

а) решается относительно z_i интегральное уравнение

$$x_i = \int_{-\infty}^{z_i} f_{\eta}(x) dx; \quad (3.2)$$

б) моделируется число x_i , имеющее равномерное распределение в интервале $[0; 1]$;

в) рассчитывается значение Z_i на основе полученной зависимости.

Следует иметь в виду, что указанное интегральное уравнение не всегда позволяет сформулировать случайные числа с заданным законом распределения $f_{\eta}(x)$. В этом случае прибегают к численным методам решения, что увеличивает затраты времени и усложняет моделирование.

Второй из способов позволяет получить последовательность случайных чисел, закон распределения которых приближен к заданному «по гистограмме». При этом учитывается, что возможные значения чисел должны лежать в известном интервале $[a; b]$. Для реализации метода интервал $[a; b]$ разбивается на m подынтервалов и на каждом из подынтервалов значение функции распределения плотности вероятностей считается постоянной величиной. Вероятность попадания случайных чисел в каждый подынтервал сохраняют одинаковой. Границы каждого подынтервала a_k, a_{k+1} определяют исходя из выражения

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \frac{1}{m}. \quad (3.3)$$

Алгоритм реализации рассматриваемого метода следующий:

а) генерируется случайное число x_i , равномерно распределенное в интервале $[0; 1]$;

б) с помощью этого случайного числа выбирается номер интервала (случайный розыгрыш по жребию), в который должно масштабироваться число;

в) генерируется случайное число x_{i+1} и масштабируется в подынтервал $(a_k; a_{k+1})$.

Полученная последовательность представляет собой случайные числа с

заданным законом распределения.

Случайные числа с нормальным распределением могут быть получены с помощью формул

$$R_i' = \cos(2\pi \cdot X_{i+1}) \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{X_i} \right)}; \quad (3.4)$$

$$R_i'' = \sin(2\pi \cdot X_{i+1}) \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{X_i} \right)}. \quad (3.5)$$

При этом получается сопряженная пара чисел, имеющих среднее значение $m_R = 0$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma_R = 1$. Для получения случайных чисел с произвольным математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ используется формула

$$Z_i = m + R_i \cdot \sigma. \quad (3.6)$$

Обобщенный алгоритм реализации метода Монте-Карло обеспечивает моделирование работы объекта и вычисление основных статистических характеристик его функциональных параметров.

Наиболее полным описанием случайной величины является задание закона распределения вероятностей. В случае статистических исследований выдвигаются и исследуются различные гипотезы (принадлежность или непринадлежность случайной величины к тому или иному закону распределения, значения параметров распределения и т. д.).

Вторым подходом является определение точечных и интервальных оценок выборочных моментов (выборочного среднего, дисперсии и т. д.)

Выборочное среднее определяется по результатам проведения численного эксперимента как

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.7)$$

где n – количество результатов в выборке;

x_i – значение элементов выборки.

Доверительный интервал для выборочного среднего определяется как

$$(\bar{x} + \Delta_{\bar{x}}, \bar{x} - \Delta_{\bar{x}}),$$

а величина интервала

$$\Delta_{\bar{x}} = t_{p,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (3.8)$$

где $t_{p,v}$ – процентиль распределения Стьюдента;

p – заданная вероятность, $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$;

v – число степеней свободы, $v = n - 1$;

s – выборочное стандартное отклонение.

Выборочное стандартное отклонение рассчитывается как

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.9)$$

Эти формулы применимы для расчета доверительных интервалов в том случае, если исследуемая случайная величина принадлежит нормальному закону распределения.

Часто для описания экспериментальных данных используют выборочное распределение вероятностей.

Для его расчета весь диапазон значений случайной величины разбивают на k интервалов $[c_1, c_2)$, $[c_2, c_3)$, ..., $[c_k, c_{k+1})$. Количество интервалов определяют по формуле

$$k = \text{целая часть } (10 \lg(n)), \quad (3.10)$$

где n – количество элементов в выборке.

Далее рассчитываются частоты попадания значений случайной величины в каждый интервал [2]:

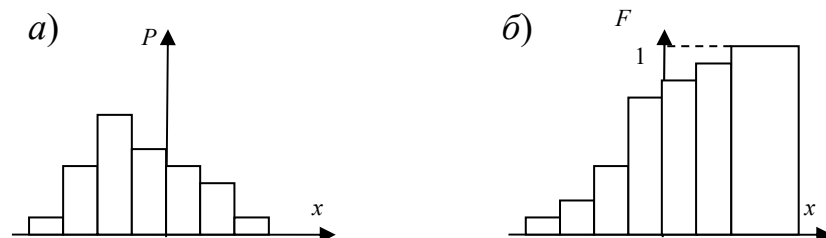
$$p_i = \frac{n_i}{n}, \quad (3.10)$$

где i – номер интервала;

n_i – количество значений случайной величины, попавших в интервал $[c_i, c_{i+1})$;

n – объем выборки.

Далее полученный набор частот используется для построения выборочного распределения, которое рассчитывается как накопленная сумма частот на предыдущих интервалах (рисунок 3.1).



a – гистограмма выборочных частот; b – выборочное распределение

Рисунок 3.1 – Выборочное распределение

3.2 Индивидуальное задание

Исследовать характер изменения тока I в электрической цепи (см. рисунок 3.2) при условии, что значение переменной ЭДС составляет E , резистор имеет значение R , конденсатор – C , индуктивность – L . Частота прикладываемого напряжения изменяется от 50 Гц до 100 кГц.

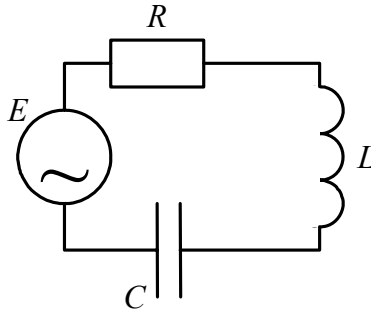


Рисунок 3.2 – Схема моделируемой электрической цепи

3.3 Указания к выполнению задания

При решении задачи следует использовать метод статистического моделирования на ЭВМ (метод Монте-Карло). Последовательность моделирования должна быть следующей:

- составить модель, описывающую поведение электрической цепи в виде зависимости тока, протекающего в цепи от параметров цепи;
- решить прямую задачу анализа в предположении, что частота источника ЭДС – входной параметр, внутренние параметры модели детерминированные со значениями, равными середине интервалов варьирования;
- приняв частоту источника ЭДС равной 50 кГц, провести численный эксперимент;
- обработать результаты численного эксперимента, определив выборочное среднее, выборочную дисперсию тока в цепи, доверительные интервалы для выборочного среднего и построив выборочное распределение.

Численный эксперимент проводится в следующей последовательности:

- генерируется N чисел с соответствующим законом распределения для каждого стохастического параметра модели;
- вычисляется N значений выходного параметра модели (тока в цепи) в зависимости от случайных значений входных параметров. Эта выборка мощностью N и будет результатом проведения численного эксперимента.

3.4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; исследуемую схему; полученную математическую модель; реализацию модели на ЭВМ; результаты моделирования; выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Какие способы получения случайных чисел Вам известны? Какие их достоинства и недостатки?
- 2 Как получить последовательность случайных чисел, имеющую произвольный закон распределения плотности вероятностей $f(x)$? Какие ограничения накладываются на данный способ?
- 3 В чем сущность способа получения последовательности чисел с произвольным законом распределения плотности вероятностей «по гистограмме»?
- 4 Как получить последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения плотности вероятностей в произвольном интервале $[a; b]$?
- 5 Как получить последовательность чисел с нормальным законом распределения плотности вероятностей?
- 6 В чем сущность метода Монте-Карло?

4 Построение экспериментально-статистических моделей путем пассивного эксперимента

Цель работы: освоить методику составления математических моделей объектов методом регрессионного анализа.

4.1 Индивидуальное задание

По результатам экспериментальных исследований волоконно-оптического датчика перемещений необходимо:

а) методом наименьших квадратов рассчитать выборочные коэффициенты, построить корреляционное поле и графики (в одной системе координат):

1) уравнение линейной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x$;

2) уравнение квадратичной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2$;

3) уравнение нелинейной регрессии $\hat{y} = \frac{1}{1 + e^{b_1 \cdot x + b_0}}$;

б) вычислить остаточные дисперсии для каждого из трех уравнений:

$$\bar{S}_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - n_g},$$

где n_g – число коэффициентов в уравнении регрессии;

в) выбрать оптимальную форму парной регрессии по минимальной остаточной дисперсии;

г) проверить адекватность построения уравнений регрессии;

д) построить доверительные интервалы для параметров модели.

4.2 Числовой пример парного регрессионного анализа

Пусть в результате экспериментальных исследований получены следующие выборки значений перемещения x и сигнала на выходе датчика y (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Исходные данные

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i, 10^{-4} \text{ м}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y	1,00	0,94	0,93	0,96	0,87	0,70	0,60	0,52	0,51	0,51

Продолжение таблицы 4.1

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_i, 10^{-4} \text{ м}$	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
y	0,35	0,33	0,22	0,21	0,15	0,12	0,09	0,08	0,06	0,02

Вычислим коэффициенты парной линейной регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x$ по формулам [2, 3]

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \quad (4.1)$$

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (4.2)$$

В результате вычислений получаем

$$\sum_{i=1}^n x_i = 3,4 \cdot 10^{-3}; \quad \sum_{i=1}^n y_i = 9,17; \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 8,02 \cdot 10^{-4};$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 8,44 \cdot 10^{-7}; \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0,084.$$

Откуда имеем $b_0 = 0,943$; $b_1 = -2,88 \cdot 10^3$, т. е. $\hat{y}_i = 0,943 - 2848 \cdot x_i$.

Используя полученное уравнение линейной регрессии, вычислим остаточную дисперсию:

$$\bar{S}_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}. \quad (4.3)$$

Итак, в случае линейной регрессии $S_{ост}^2 = 4,675 \cdot 10^{-3}$.

Коэффициенты уравнения параболической регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 \quad (4.4)$$

можно вычислить путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum x_i + b_2 \cdot \sum x_i^2 = \sum y_i; \\ b_0 \cdot \sum x_i + b_1 \cdot \sum x_i^2 + b_2 \cdot \sum x_i^3 = \sum x_i \cdot y_i; \\ b_0 \cdot \sum x_i^2 + b_1 \cdot \sum x_i^3 + b_2 \cdot \sum x_i^4 = \sum x_i^2 \cdot y_i. \end{cases} \quad (4.5)$$

При этом значения $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i \cdot y_i$, $\sum x_i^2$ найдены ранее. Остается найти значения $\sum x_i^3$, $\sum x_i^4$, $\sum x_i^2 \cdot y_i$.

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 = 2,339 \cdot 10^{-10}; \quad \sum_{i=1}^n x_i^4 = 6,918 \cdot 10^{-14}; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i = 1,391 \cdot 10^{-7};$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0,05.$$

В результате система алгебраических уравнений (4.5) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 20 + b_1 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3} + b_2 \cdot 8,44 \cdot 10^{-7} = 9,17; \\ b_0 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3} + b_1 \cdot 8,44 \cdot 10^{-7} + b_2 \cdot 2,339 \cdot 10^{-10} = 8,012 \cdot 10^{-4}; \\ b_0 \cdot 8,44 \cdot 10^{-7} + b_1 \cdot 2,339 \cdot 10^{-10} + b_2 \cdot 6,918 \cdot 10^{-14} = 1,391 \cdot 10^{-7}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решением системы являются коэффициенты

$$b_0 = 0,997; \quad b_1 = -4,029 \cdot 10^3; \quad b_2 = 3,473 \cdot 10^6.$$

Следовательно, уравнение параболической регрессии имеет вид:

$$y_i = 0,997 - 0,029 \cdot 10^3 \cdot x_i + 3,473 \cdot 10^6 \cdot x_i^2. \quad (4.7)$$

Используя данное уравнение, вычислим остаточную дисперсию:

$$S_{ост}^2 = \frac{0,05}{17} = 2,957 \cdot 10^{-3}.$$

Рассмотрим, наконец, случай нелинейного уравнения регрессии:

$$\hat{y}_i = \frac{1}{1 + e^{b_1 \cdot x_i + b_0}}. \quad (4.8)$$

Это уравнение сводится к линейному случаю (линеаризуется) путем логарифмирования:

$$y_i' = \ln\left(\frac{1}{y_i} - 1\right) = b_1 \cdot x_i + b_0. \quad (4.9)$$

Заметим, что ввиду особенности функции $\ln$ необходимо отбросить точки $y_0 = 1$. Проведя вычисления, получаем, что

$$\sum_{i=1}^n x_i = 3,42 \cdot 10^{-3}; \quad \sum_{i=1}^n y_i' = 7,214; \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i' = 5,248 \cdot 10^{-3};$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 8,436 \cdot 10^{-7}; \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0,049.$$

Тогда $b_0 = -2,292$; $b_1 = 1,55 \cdot 10^4$, т. е.

$$y_i = \frac{1}{1 + e^{1,55 \cdot 10^4 \cdot x_i - 2,292}}.$$

$$S_{ост}^2 = 2,747 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, сравнивая остаточные дисперсии для всех трех случаев, выбираем последнее уравнение в качестве оптимальной формы парной регрессии.

Адекватность этого выражения проверим по критерию Фишера.

Рассчитаем среднее значение сигнала на выходе датчика:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{20} \cdot 9,17 = 0,458.$$

Рассчитаем дисперсию среднего:

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0,118.$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия Фишера:

$$F_{набл} = \frac{S_y^2}{S_{ост}^2} = 42,96. \quad (4.10)$$

Если при этом

$$F_{набл} \geq F_{\alpha; v_1; v_2},$$

где α – доверительная вероятность;

$F_{\alpha; v_1; v_2}$ – квантиль F -распределения со степенями $v_1 = n - 1 = 20 - 1 = 19$ и

$v_2 = n - n_B = 20 - 2 = 18$, то наше уравнение регрессии адекватно.

Выбрав $p = 1 - \alpha = 0,95$, получим, что $F_{набл} = 42,96$, а $F_{0,05; 19; 18} = 2,19$, т. е.

$$F_{набл} \geq F_{0,05; 19; 18}.$$

Таким образом, построенное уравнение регрессии адекватно с вероятностью 0,95.

Для построения доверительных интервалов коэффициентов регрессии рассмотрим матрицу Фишера, которая представляет собой матрицу коэффициентов при неизвестных в системах линейных уравнений для нахождения коэффициентов регрессии. Для выбранного уравнения регрессии матрица Фишера имеет вид [2]:

$$\Phi = \begin{pmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Дисперсии оценок коэффициентов регрессии равны

$$S_{b_j}^2 = S_{осм}^2 \cdot C_{jj}, \quad (4.12)$$

где C_{jj} – диагональные элементы матрицы, $C_{jj} = \Phi^{-1}$.

Тогда величина доверительного интервала для коэффициентов регрессии определяется по формуле

$$\Delta_{b_j} = t_{\alpha, v} \cdot S_{b_j}, \quad (4.13)$$

где $t_{\alpha, v}$ – квантиль распределения Стьюдента с уровнем значимости $\alpha = 1 - p$ и количеством степеней свободы $v = n - n_B$.

Матрица C имеет вид:

$$C = \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 3,42 \cdot 10^{-3} \\ 3,42 \cdot 10^{-3} & 8,436 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,163 & -660,793 \\ -660,793 & 3,864 \cdot 10^6 \end{pmatrix}.$$

Дисперсии коэффициентов

$$S_{b_0}^2 = 2,747 \cdot 10^{-3} \cdot 0,163 = 4,478 \cdot 10^{-4};$$

$$S_{b_1}^2 = 2,747 \cdot 10^{-3} \cdot 3,864 \cdot 10^6 = 1,061 \cdot 10^4.$$

Выберем $p = 1 - 0,05 = 0,95$. Коэффициент Стьюдента $t_{0,05; 18} = 1,734$. Доверительные интервалы имеют следующие значения:

$$\Delta_{b0} = 1,734 \cdot \sqrt{4,478 \cdot 10^{-4}} = 0,037;$$

$$\Delta_{b1} = 1,734 \cdot \sqrt{1,061 \cdot 10^4} = 178,61.$$

Следовательно

$$-2,329 < \beta_0 < -2,255;$$

$$1,53 \cdot 10^4 < \beta_1 < 1,57 \cdot 10^4.$$

4.3 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; исследуемую схему; полученную математическую модель; реализацию модели на ЭВМ; результаты моделирования; выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Какие принципы лежат в основе пассивного эксперимента при построении статистических моделей?
- 2 В каких случаях использование пассивного эксперимента является более предпочтительным, чем активный эксперимент?
- 3 Какие ограничения могут быть связаны с использованием пассивного эксперимента при построении статистических моделей?
- 4 Какие методы обработки статистических данных используются при построении экспериментально-статистических моделей на основе пассивного эксперимента?
- 5 Какие примеры существуют успешного использования пассивного эксперимента для построения экспериментально-статистических моделей?
- 6 Каким образом можно оценить достоверность результатов, полученных при построении экспериментально-статистических моделей на основе пассивного эксперимента?

5 Построение экспериментально-статистических моделей путем активного эксперимента

Цель работы: освоить методику составления математических моделей объектов методом факторного эксперимента.

5.1 Основные теоретические сведения

В отличие от пассивного эксперимента построение модели объекта методом активного эксперимента предполагает воздействие на ход процесса и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые пред-

ставляют интерес. Установление каждого фактора на некоторый уровень определяет одно из вероятных состояний объекта. Если перебрать все допустимые наборы уровней факторов, то получим множество различных состояний объекта, что и определит число возможных опытов N . Последнее определяется выражением $N = 1^k$, где 1 – число уровней; k – число факторов [2].

Важным этапом механизма построения экспериментально-статистических моделей методом активного эксперимента является выбор вида математической модели объекта. Чаще всего используются полиномиальные модели, достоинством которых является универсальность.

Полином первого порядка при построении двухфакторной модели:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad (5.1)$$

полином второго порядка

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2. \quad (5.2)$$

Последний полином содержит свободный член b_0 , линейные члены b_1x_1 и b_2x_2 , квадратичные члены $b_{11}x_1^2$ и $b_{22}x_2^2$, и член $b_{12}x_1x_2$, определяющий эффект двойного взаимодействия факторов.

5.2 Индивидуальное задание

Выход продукта y зависит от N факторов. Каждый из факторов z_j изменяется в указанном в таблице 5.1 диапазоне $[z_j^{\min}; z_j^{\max}]$. Построить полиномиальную математическую модель объекта, учитывая результаты эксперимента y_i , полученные в результате активного эксперимента. В каждой точке плана проведены три параллельных опыта.

5.3 Числовой пример построения модели

Пусть изучается влияние на выход продукта y трех факторов: температуры T в интервале $100\text{ }^{\circ}\text{C} \dots 200\text{ }^{\circ}\text{C}$, давления $P = 20 \dots 60\text{ кгс/см}^2$ и времени $\tau = 10 \dots 30\text{ мин}$.

Построить модель физического процесса в виде полинома первого порядка, оценить значимость коэффициентов и проверить адекватность модели.

Решение

1 Определим уровни факторов, интервал варьирования и составим матрицу планирования эксперимента.

Основной уровень (центр плана) рассчитывается по формуле для любого фактора z_j [2]

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2}; \quad j = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (5.3)$$

Интервал варьирования

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2}; \quad j = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (5.4)$$

Для первого фактора (температура T) $T = 150$ °С; $\Delta T = 50$ °С.

Для второго фактора (давление P) $P = 40$ кгс/см²; $\Delta P = 50$ кгс/см².

Для третьего фактора (время τ) $\tau = 20$ мин; $\Delta \tau = 10$ мин.

От системы координат $z_1, z_2, \dots, z_k$ перейдем к новой безразмерной системе координат $x_1, x_2, \dots$. Формула перехода или кодирования имеет вид:

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j}; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (5.5)$$

В безразмерной системе координат верхний уровень равен +1, нижний равен -1, координаты центра плана равны нулю и совпадают с началом координат. В нашей задаче $k = 3$. Число возможных комбинаций N из трех факторов на двух уровнях равно $N = 2^k = 2^3 = 8$. Запишем план проведения экспериментов (матрицу планирования) в виде таблицы 5.1.

Таблица 5.1 – Матрица планирования

Номер опыта	Значение факторов						Выход
	в натуральном масштабе			в безразмерной системе			
	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	
1	100	20	10	−1	−1	−1	2; 3; 2
2	200	20	10	+1	−1	−1	6; 9; 5
3	100	60	10	−1	+1	−1	4; 7; 10
4	200	60	10	+1	+1	−1	8; 10; 9
5	100	20	30	−1	−1	+1	10; 7; 12
6	200	20	30	+1	−1	+1	18; 20; 21
7	100	60	30	−1	+1	+1	8; 9; 8
8	200	60	30	+1	+1	+1	12; 12; 10

Значения выхода y , полученные в результате реализации плана экспериментов, приведены в последнем столбце таблицы 5.2. В каждой точке плана поставлены три параллельных опыта.

Обычно записывают кодированную матрицу планирования 2^3 и результаты эксперимента, введя столбец так называемой фиктивной переменной $x_0 = 1$.

2 Математическая модель процесса в виде полинома имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (5.6)$$

При этом для определения коэффициентов b_{12} , b_{13} , b_{23} (эффект двойного взаимодействия) и коэффициента b_{123} (эффект тройного взаимодействия) матрицу, записанную в безразмерной системе координат, с учетом столбца фиктивной переменной расширяют, как показано в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Расширенная матрица планирования

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	2; 3; 2
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	6; 9; 5
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	4; 7; 10
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	8; 10; 9
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	10; 7; 12
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	8; 9; 8
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	12; 12; 10

Найдем выборочное среднее результатов в каждой точке плана:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{u=1}^m y_{iu}, \quad (5.7)$$

где m – количество параллельно поставленных опытов.

Для приведенного выше примера

$$y = (2,3; 6,7; 7,0; 9,0; 9,7; 19,7; 8,3; 11,3).$$

Рассчитаем дисперсию воспроизводимости каждого опыта:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2; \quad (5.8)$$

$$S_i^2 = (0,3; 4,3; 9,0; 1,0; 6,3; 2,3; 0,3; 1,3).$$

Рассчитаем дисперсию воспроизводимости эксперимента:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^m S_i^2 = 3,1. \quad (5.9)$$

Любой коэффициент уравнения регрессии b_j определяется по формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} \bar{y}_i, \quad (5.10)$$

где N – число опытов в матрице планирования.

Например, для определения коэффициента b_1 при x_1 необходимо получить сумму произведений:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 2,3 \\ 6,7 \\ 7 \\ 9 \\ 9,7 \\ 19,7 \\ 8,3 \\ 11,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \bar{y} \\ -2,3 \\ 6,7 \\ -7 \\ 9 \\ -9,7 \\ 19,7 \\ -8,3 \\ 11,3 \end{bmatrix}; \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^8 x_{1i} \bar{y}_i = 19,3; \quad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^8 x_{1i} y_i}{N} = \frac{19,3}{8} = 2,42.$$

Аналогично получим

$$b_0 = 9,25; b_1 = 2,42; b_2 = -0,33; b_3 = 3.$$

Эффекты взаимодействия определяют аналогично линейным эффектам:

$$b_{12} = -1,17; b_{13} = 0,83; b_{23} = -2,08; b_{123} = -0,58.$$

Таким образом, математическая модель процесса записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 9,25 + 2,42 x_1 - 0,33 x_2 + 3 x_3 - 1,17 x_1 x_2 + \\ & + 0,83 x_1 x_3 - 2,08 x_2 x_3 - 0,58 x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \quad (5.12)$$

3 Определим значимость коэффициентов по критерию Стьюдента.

Определим дисперсию оценок коэффициентов регрессии:

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m}. \quad (5.13)$$

Для приведенного примера $S_b^2 = 0,13$.

Оценим значимость коэффициентов по критерию Стьюдента:

$$t_0 = \frac{|b_0|}{s_b} = \frac{9,25}{0,13} = 71,04;$$

$$t_1 = 18,56; t_2 = 2,56; t_3 = 23,04; t_{12} = 8,96; t_{13} = 6,4; t_{23} = 16; t_{123} = 4,48.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0,01$ и числа степеней свободы $\nu = N \cdot (m - 1) = 16$ табулированное значение критерия Стьюдента $t_\alpha(\nu) = 2,583$. Таким образом, коэффициент b_2 незначим и его следует исключить из уравнения. После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии примет вид:

$$\hat{y} = 9,25 + 2,42x_1 + 3x_3 - 1,17x_1x_2 + 0,83x_1x_3 - 2,08x_2x_3 - 0,58x_1x_2x_3.$$

Проверим адекватность полученного уравнения по критерию Фишера. Рассчитаем дисперсию адекватности

$$S_{ad}^2 = \frac{m}{N - N_b} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5.14)$$

где N_b – количество значимых коэффициентов регрессии.

Для примера

$$S_{ad}^2 = 2,67.$$

Рассчитаем значение критерия

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2}. \quad (5.15)$$

Полученное значение сравниваем с табличным значением критерия Фишера F_T , определяемым в зависимости от уровня значимости $\alpha = 1 - p$ и числа степеней свободы k_1 и k_2 , с которыми определялись дисперсии S_{ad}^2 и S_y^2 :

$$k_1 = N - N_b; k_2 = N(m - 1). \quad (5.16)$$

Для примера

$$F = 0,853; k_1 = 8 - 7; k_2 = 8 \cdot (3 - 1) = 16; \alpha = 0,01; F_T = 8,53.$$

Так как $F < F_T$, уравнение адекватно.

5.4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; исходные данные для расчета; расчеты, связанные с определением уровня факторов, интервала варьирования, составлением матрицы планирования эксперимента; общий вид математической модели; расчеты, связанные с определением коэф-

фициентов уравнения регрессии; расчеты, определяющие значимость коэффициентов и адекватность модели; выводы.

Контрольные вопросы

- 1 В чем сущность метода активного эксперимента?
- 2 Какие требования предъявляются к факторам?
- 3 В каком виде чаще всего строится модель методом активного эксперимента?
- 4 Каким образом в модели учитывается эффект кратного взаимодействия факторов?
- 5 Каким образом составляют матрицу планирования?
- 6 Каким образом учитываются в матрице планирования эффекты кратного взаимодействия факторов?
- 7 Как рассчитываются коэффициенты регрессионного уравнения?
- 8 Поясните методику проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии.
- 9 Каким образом производится проверка адекватности регрессионного уравнения?

6 Построение и оптимизация математических моделей процессов при ограничении на параметры в виде равенств

Цель работы: освоить методику составления моделей, методы ее оптимизации при наличии ограничений на параметры.

6.1 Основные теоретические сведения

Оптимизация заключается в нахождении оптимума рассматриваемой функции или оптимальных условий проведения данного процесса [2, 3].

Для оценки оптимума необходимо прежде всего выбрать критерий оптимизации. В зависимости от конкретных условий в качестве критерия оптимизации можно взять технологический критерий, например максимальный съем продукции с единицы объема аппарата, экономический критерий – минимальную стоимость продукта при заданной производительности.

На основании выбранного критерия оптимизации составляется так называемая целевая функция или функция выгоды, представляющая собой зависимость критерия оптимизации от параметров, влияющих на его значение. Задача оптимизации заключается в нахождении экстремума (максимума или минимума) целевой функции.

В зависимости от характера рассматриваемых математических моделей применяют различные математические методы оптимизации. Многие из них сводятся к нахождению минимума или максимума целевой функции.

Применяются такие аналитические методы (аналитический поиск экстре-

му, метод множителей Лагранжа), как методы математического программирования (линейное, нелинейное программирование, динамическое программирование), методы поисковой оптимизации (метод градиента, метод наискорейшего спуска).

Метод множителей Лагранжа обычно используется, когда на переменные наложены ограничения типа равенства.

Так, если требуется найти экстремум функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии ограничений типа равенств на независимые переменные $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, m; m < n$), то для решения этой задачи вводится вспомогательная функция

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (6.1)$$

где λ_i ($i = 1, \dots, m$) – неопределенные множители Лагранжа.

В этом случае экстремальные точки функции $F(x_1, \dots, x_n)$ определяются решением системы уравнений, получаемой приравниванием нулю производных от функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ по всем независимым переменным x_k ($k = 1, \dots, n$) и по всем множителям Лагранжа λ_i ($i = 1, \dots, m$).

Получаемая в результате система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial x_k} = 0; & k = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i} = f_i(x_1, \dots, x_n) = 0; & i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (6.2)$$

содержит $n + m$ уравнений, из которых можно исключить m неопределенных множителей Лагранжа, имеющих вспомогательное значение, и найти координаты экстремальных точек x'_k ($k = 1, \dots, n$), которых в общем случае может быть и несколько, т. е. $i = 1, 2, \dots, n$.

Каждое ограничение добавляет еще одно уравнение и на каждое ограничение вводится один множитель Лагранжа.

6.2 Индивидуальное задание

Проектируется корпус прибора неразрушающего контроля. Крышка прибора представляет собой параллелепипед, у которого отсутствует одна из стенок. Известно, что объем, который должна закрывать эта крышка, составляет V . Какими должны быть геометрические размеры крышки корпуса, чтобы площадь поверхности крышки была минимальной?

6.3 Указания к выполнению задания

- 1 Составить целевую функцию, отражающую зависимость площади крышки корпуса прибора от ее геометрических размеров.
- 2 Выяснить ограничения, накладываемые на переменные, входящие в целевую функцию. Записать эти ограничения в виде равенств.
- 3 Ввести вспомогательную функцию, содержащую вспомогательные множители Лагранжа.
- 4 Продифференцировать вспомогательную функцию и получить систему уравнений, которую решить относительно искомых параметров.

6.4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; постановку задачи в математическом выражении; целевую функцию; ограничения на параметры; вспомогательную функцию; решение системы уравнений; ответ; выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое оптимизация? Что лежит в основе оптимизации?
- 2 Какую функцию называют целевой или функцией выгоды?
- 3 Какие линии называют линиями уровня при оптимизации?
- 4 Какие методы оптимизации Вы знаете? Для решения каких типов задач они применимы?
- 5 В чем недостаток метода аналитического поиска экстремума?
- 6 В чем сущность метода множителей Лагранжа? Какие типы оптимизационных задач он позволяет решать?

7 Построение и оптимизация математических моделей процессов при ограничении на параметры в виде неравенств

Цель работы: освоить методику составления и оптимизации моделей при наличии ограничений на параметры.

7.1 Основные теоретические сведения

Нахождение экстремума критерия оптимальности в задачах с линейными уравнениями представляет собой задачу метода линейного программирования. Целевая функция выражается как [2]

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (7.1)$$

Ограничения задаются в виде линейных неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m \geq b_i; \quad (7.2)$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0, \quad (7.3)$$

где x_i – оптимизируемые параметры.

Наиболее типичными примерами являются следующие:

- 1) задача изготовления различной продукции, обеспечивающей максимальный доход при разных видах сырья;
- 2) задача оптимального использования оборудования при ограниченности ресурсов;
- 3) транспортная задача о наиболее экономичном маршруте перевозок.

Для двухмерных задач применение симплекс-метода означает, что прямая, описывающая целевую функцию, перемещается параллельно самой себе. Для n -мерной задачи система неравенств определяет границы выпуклого многогранника, и параллельно самой себе перемещается не прямая, а гиперплоскость. Решение всегда находится в вершине (если оно единственное) или заполняет ребро многогранника.

7.2 Индивидуальное задание

Производится контроль продукции двух видов A и B . Стоимость контроля каждой единицы продукции вида A составляет C_1 р., стоимость контроля каждой единицы продукции вида B составляет C_2 р.

При этом число проконтролированных единиц продукции вида A не должно превышать число проконтролированных единиц продукции вида B более, чем на b_1 единицы, общее число проконтролированной продукции обоих видов не должно быть больше b_2 единиц. Расход вспомогательных материалов на контроль единицы продукции вида A составляет a_1 единицы, а на контроль единицы продукции вида B – a_2 единиц, общее количество вспомогательного материала ограничено в b_3 единиц.

Найти максимальный доход, получаемый в результате контроля, и число единиц проконтролированных изделий каждого вида.

7.3 Указания к выполнению задания

- 1 Задачу решить путем применения метода линейного программирования.
- 2 Составить выражения для целевой функции, подлежащей оптимизации.
- 3 Записать ограничения, накладываемые на параметры, в виде системы неравенств.
- 4 Отобразить в плоскости координат область допустимых решений задачи.
- 5 Найти оптимальное решение задачи путем перемещения по плоскости прямой, отображающей целевую функцию. Обратить внимание на то, что количество единиц продукции вида A и B должно быть целым.

7.4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; целевую функцию; ограничения, накладываемые на ее параметры; графическое изображение области допустимых решений; результаты расчета оптимальных значений целевой функции; выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Какие задачи позволяет решать метод линейного программирования? Приведите типовую постановку задачи.
- 2 Приведите наиболее типичные примеры задач, решаемых методом линейного программирования.
- 3 В чем особенности решения двумерных задач методом линейного программирования? Многомерных задач?
- 4 Каким образом находится область допустимых решений в случае двумерной задачи? Многомерной?
- 5 Как находится оптимальное значение функции в случае двумерной задачи? Многомерной задачи?

8 Моделирование электрического генератора сердца

Цель работы: провести моделирование электрического генератора сердца на примере расчета параметров электрокардиограммы желудочкового комплекса.

8.1 Основные теоретические сведения

Рассмотрим работу дипольного эквивалентного электрического генератора сердца (ДЭЭГС) в процессе электрической систолы. Считают, что сердце обладает активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C , а также источником с ЭДС, изменяющейся по закону, который соответствует закону изменения потенциала водителя ритма (рисунок 8.1).

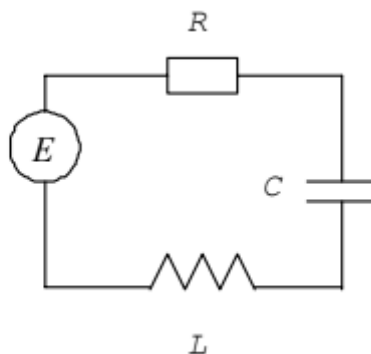


Рисунок 8.1 – Колебательный контур

В качестве модели будем рассматривать три взаимно перпендикулярных колебательных контура, расположенных во фронтальной, горизонтальной и саггитальной плоскостях (рисунок 8.2) [5].

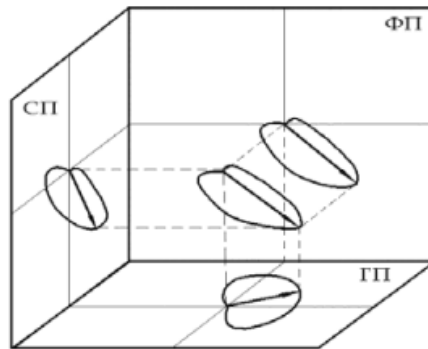


Рисунок 8.2 – Электрическая схема дипольного эквивалентного электрического генератора сердца

ЭДС E во всех контурах одинаковы. Для желудочков непосредственным водителем ритма является атриовентрикулярный узел. Так как в процессе кардиоцикла происходит изменение емкости C , связанной с циклической частотой, то электрические колебания в ДЭЭГС носят параметрический характер.

В любой плоскости зависимость дипольного момента D интегрального электрического вектора (ИЭВ) от угла поворота θ определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 D}{d\theta^2} + D = C_1, \quad (8.1)$$

где C_1 – постоянная величина.

Решением этого уравнения является зависимость вектора дипольного момента от угла поворота и времени, которое удобно записать в виде

$$D = A \sin^2(\theta + \varphi) / 2 + B \cos^2(\theta + \varphi) / 2. \quad (8.2)$$

В формуле (8.2) A и B – постоянные интегрирования, так что $C_1 = (A + B) / 2$. Угол φ – это угол наклона электрической оси сердца (ЭО) или оси петель вектор-электрокардиограммы.

Уравнение Кирхгофа для мгновенных значений напряжений в контуре имеет вид:

$$U_r + U_i + U_c = E, \quad (8.3)$$

где в левой части сумма напряжений на соответствующих сопротивлениях.

Используя известные выражения, связывающие эти напряжения и ток i , получим

$$IR + \frac{d(Li)}{dt} + \int \frac{idt}{C} = E. \quad (8.4)$$

Активное сопротивление миокарда определяется прежде всего сопротивлением цитоплазмы и межклеточной жидкости, поэтому его можно считать постоянным в течение кардиоцикла. Индуктивность возбудимой мембраны существует только во время возбуждения и связана со спиральным движением ионов в ионных каналах. Поэтому сложно предположить, что эволюционно мог сформироваться механизм активной регуляции индуктивности. Будем считать индуктивность сердца величиной постоянной.

Продифференцируем (8.4) по времени t :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}. \quad (8.5)$$

Поделив уравнение (8.5) на L и обозначив $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ – собственную частоту колебаний тока в ДЭЭГС, найдем

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt}. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.6) описывает вынужденные колебания нелинейного осциллятора, т. к. собственная частота колебаний сердца может изменяться за счет изменения емкости C .

Будем искать решение этого уравнения путем умножения его на произвольную функцию $f(t)$:

$$f(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + f(t) \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 f(t) i = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} f(t). \quad (8.7)$$

Подчиним функцию $f(t)$ условию

$$f(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + f(t) \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 f(t) i = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dt} \left(f(t) \frac{di}{dt} \right),$$

из которого следует, что

$$f(t) = \exp \left(\int \frac{R}{L} dt \right). \quad (8.8)$$

Уравнение (8.7) после умножения на $f(t)$ принимает вид

$$f(t) \frac{d}{dt} + \left(f(t) \frac{di}{dt} \right) + (\omega_0 f(t))^2 i \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} f(t)^2. \quad (8.9)$$

Введем новую переменную по формуле

$$d\theta = \frac{dt}{f(t)}. \quad (8.10)$$

Исходя из уравнения (8.9), функция $f(t)$ имеет размерность, обратную циклической частоте. Поэтому обозначим эту функцию $f(t) = 1/\omega_\theta$.

Умножим уравнение (8.9) на расстояние между истоком и стоком ДЭЭГС и перепишем его в новых обозначениях:

$$\frac{1}{\omega_\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega_\theta} \frac{dD}{dt} \right) + \left(\frac{\omega_0}{\omega_\theta} \right)^2 D = \frac{1}{\omega_\theta^2 L} \frac{dE}{dt}, \quad (8.11)$$

где $D = il$, а функция θ в соответствии с (8.10) представляет собой угол поворота вектора ДЭЭГС, который вращается с циклической частотой ω_θ .

В соответствии с (8.8) временная зависимость ω_θ , учитывая, что R и L – постоянные величины, имеет вид:

$$\omega_\theta = \omega_{\theta 0} \exp[-R(t - t_0)/L], \quad (8.12)$$

где $\omega_{\theta 0}$ – циклическая частота вращения вектора ДЭЭГС в момент времени t_0 .

Падение потенциала водителя ритма, состоящего из атипичных миокардиальных волокон, а следовательно, и dE/dt в интервале Q–T происходит по экспоненциальному закону. Поэтому можно предположить, что в правой части уравнения (8.11) стоит величина, близкая к постоянной.

Обозначая эту величину C_1 , а также учитывая, что $d\theta = \omega_\theta dt$, из (8.11) получаем уравнение

$$\frac{d^2 D}{d\theta^2} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_\theta} \right) D = C_1. \quad (8.13)$$

Кроме того, естественно предположить, что в процессе эволюции электрические параметры миокарда сформировались таким образом, что собственная частота ω_0 сравнялась с частотой ω_θ вращения вектора D дипольного момента ДЭЭГС. Тогда уравнение (8.13) принимает вид

$$\frac{d^2 D}{d\theta^2} + D = C_1. \quad (8.14),$$

Решением этого уравнения является зависимость вектора дипольного момента от угла поворота и времени

$$D = C_1 + C_2 \cos(\theta + \varphi) = C_1 + C_2 \cos\left(\int_0^t \omega_\theta dt + \varphi\right), \quad (8.15)$$

где φ – начало отсчета угла поворота вектора D .

Подставляя в (8.15) формулу (8.12), получаем зависимость величины вектора D от времени:

$$D = C_1 + C_2 \cos\left\{(\omega_\theta L / R)\left[1 - \exp(-R(t - t_0) / L)\right] + \varphi\right\}. \quad (8.16)$$

На рисунке 8.3 показана зависимость вектора D от угла поворота, построенная по формуле (8.15). Значение C_1 принято равным $1 \cdot 10^{-5}$ А·м, величина $C_2 = -1,7 \cdot 10^{-5}$ А·м, угол $\varphi = 2,3$ рад.

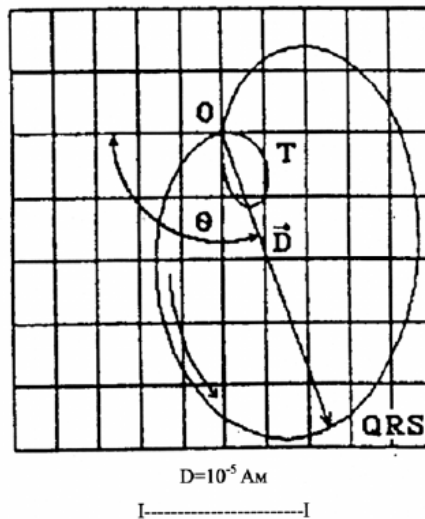


Рисунок 8.3 – Вектор-электрокардиограмма комплекса QRST, построенная в полярных координатах $D(\theta)$

Из рисунка 8.3 видно, что вектор ДЭЭГС описывает две петли. Сначала петлю QRS, отражающую деполяризацию желудочков, затем петлю Т, описывающую их реполяризацию. Для предсердий нужно решать отдельную электродинамическую задачу по аналогии с представленной в данной работе задаче для желудочков.

Зависимость вектора D от времени, построенная по формуле (8.16), показана на рисунке 8.4. Принято, что в момент времени $t_0 = 64$ мс циклическая частота вращения вектора ДЭЭГС $\omega_\theta = 29$ рад/с. Отношение R/L принято равным 6 с^{-1} . В этих условиях цикл QRST составляет 360 мс. Из рисунка 8.4

видно, что вектор D сначала растет, а затем падает до нуля, что отражает деполяризацию желудочков. После этого он меняет свой знак и последующее его изменение отражает реполяризацию желудочков сердца.

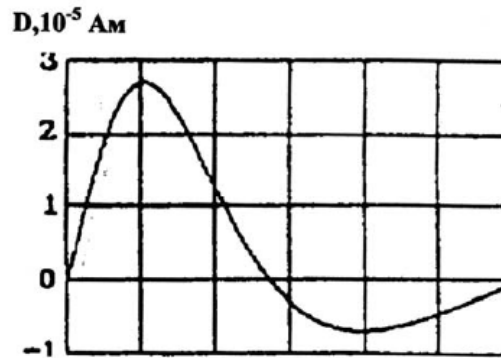


Рисунок 8.4 – Расчет зависимости дипольного момента интегрального электрического вектора сердца от времени

Модельная линейная ЭКГ строится по формуле

$$U(t) = U_0 D(t) \cos \theta. \quad (8.17)$$

Линейная электрокардиограмма (ЭКГ) строится по формуле

$$U = kD \cos \theta = \left(R \frac{\cos^2(\theta + \phi) / 2}{\cos \phi} - T \frac{\sin^2(\theta + \phi) / 2}{\cos \phi} \right) \cos \theta, \quad (8.18)$$

где k – постоянный коэффициент, согласующий размерность U и D ;
 R и T – амплитуды зубцов ЭКГ.

Циклическая частота вращения ИЭВ зависит от времени по закону

$$\omega = \omega_{t_0} \exp[-R(t - t_0) / L], \quad (8.19)$$

где ω_{t_0} – циклическая частота вращения вектора ДЭЭГС в момент времени t_0 .

Так как $\omega = d\theta/dt$, то зависимость угла поворота вектора от времени можно найти по формуле

$$\theta = Q_0 [1 - \exp(-R(t - t_0) / L)] - \phi, \quad (8.20)$$

где Q_0 – добротность эквивалентного контура в момент времени t_0 ,
 $Q_0 = \omega_{t_0} L / R$;

ϕ – угол, под которым направлена главная ось петли QRS (электрическая ось сердца ЭО).

Добротность, естественно, не является постоянной величиной в процессе

кардиоцикла. Учитывая (8.19), можно видеть, что в процессе электрической систолы она падает по закону

$$Q = \omega L / R = Q_0 \exp(-R(t - t_0) / L). \quad (8.21)$$

8.2 Индивидуальное задание

В соответствии с исходными данными рассчитать электрический генератор сердца:

- построить график $D(\theta)$ – в полярных координатах по двум формулам (8.2) и (8.15);
- построить график $D(t)$ – в прямоугольных координатах по формуле (8.16);
- построить график $U(t)$ – в прямоугольных координатах по формулам (8.17) и (8.18);
- построить графики $\Theta(t)$, $Q(t)$ – в прямоугольных координатах по формулам (8.20) и (8.21);
- построить график $\omega(t)$ – в прямоугольных координатах по формуле (8.12).

8.3 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать: цель работы; расчет искомых величин и графики этих величин; выводы.

Контрольные вопросы

- 1 Из каких электрических элементов состоит электрический генератор сердца?
- 2 В каких плоскостях рассматривается электрический генератор сердца?
- 3 Сколько петель описывает вектор ДЭЭГС?
- 4 По какому закону зависит циклическая частота вращения ИЭВ от времени?
- 5 Запишите уравнение Кирхгофа для мгновенных значений напряжений рассматриваемого контура.

Список литературы

- 1 **Астраханцева, И. А.** Моделирование систем: учеб. пособие / И. А. Астраханцева, С. П. Бобков. – М.: ИНФРА-М, 2023. – 216 с.
- 2 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем: учебник / В. П. Тарасик. – Минск: Новое знание; М.: ИНФРА-М, 2022. – 592 с.
- 3 **Станкевич, С. В.** Математическое моделирование физических процессов: учеб. пособие / С. В. Станкевич. – Новосибирск: НГТУ, 2020. – 120 с.
- 4 **Краснощеков, П. С.** Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – М. : МГУ, 1983. – 264 с.
- 5 **Ремизов, А. Н.** Медицинская и биологическая физика: учебник / А. Н. Ремезов. – 2-е изд. испр. – М. : Высш. шк., 1996. – 608 с.