МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех направлений подготовки очной формы обучения

Могилев 2024

УДК 531
ББК 22.21
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «27» ноября 2024 г., протокол № 5

Составители: канд. техн. наук, доц. Ю. В. Машин;
канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Теоретическая механика» для студентов всех направлений подготовки очной формы обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 46 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Указания по подготовке к практическим занятиям

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика, строительная механика и металлические конструкции и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты направлений подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 21.03.01 «Нефтегазовое дело» и 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» изучают теоретическую механику на протяжении 3-го семестра.

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;

– выполнение и защита индивидуальных заданий;

– выполнение контрольных работ.

На изучение каждой темы студентам направлений подготовки 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и 21.03.01 «Нефтегазовое дело» отводится по два аудиторных часа.

Для студентов направления подготовки 15.03.01 «Машиностроение» на изучение подразделов 2.2, 2.3, 3.4, 3.5, 4.1, 4.4 и 4.7 отводится по четыре академических часа.

Для студентов направления подготовки 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» тематика занятий распределена следующим образом:

– практическое занятие № 1 – тематика подраздела 2.1;

– практическое занятие № 2 – тематика подразделов 2.2 и 2.3;

– практическое занятие № 3 – тематика подраздела 3.1;

– практическое занятие № 4 – тематика подразделов 3.2–3.4;

– практическое занятие № 5 – тематика подразделов 4.1 и 4.2;

– практическое занятие № 6 – тематика подразделов 4.3–4.5;

– практическое занятие № 7 – тематика подраздела 4.6;

– практическое занятие № 8 – тематика подразделов 2.2, 3.1, 3.3, 4.1, 4.6.

На каждое занятие отводится по два академических часа.

На практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;

– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. В установленные преподавателем сроки индивидуальные задания защищают во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не защитившие индивидуальные задания, не допускаются к экзамену по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

2 Статика

2.1 Входной рейтинг-контроль. Связи и их реакции

Тела, которые ограничивают перемещения данного тела в пространстве, являются по отношению к нему связями. Эффект действия связей на данное тело учитывается введением в рассмотрение сил, действие которых на данное тело эквивалентно действию связей. Эти силы называются реакциями связей.

Реакция связи направлена противоположно тем перемещениям, которым данная связь не позволяет осуществиться.

Основные типы связей и их реакции представлены на рисунке 2.1.

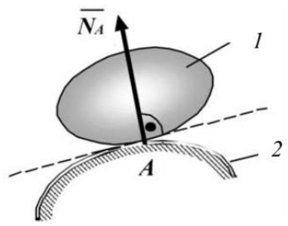
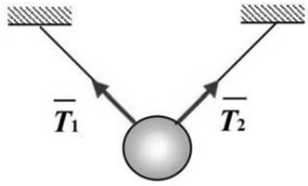
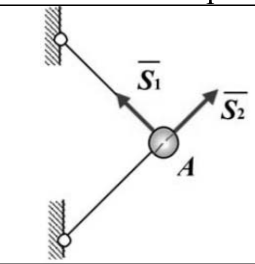
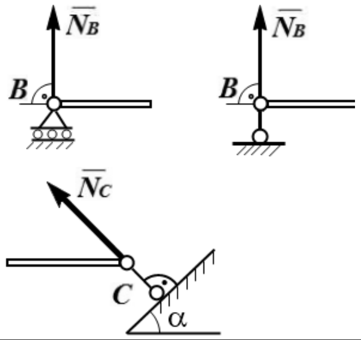
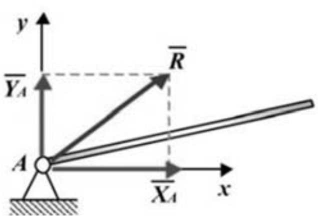
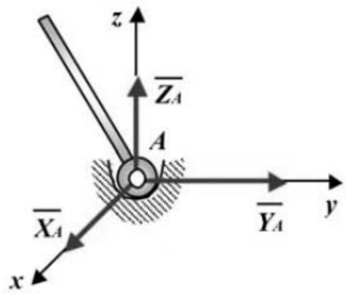
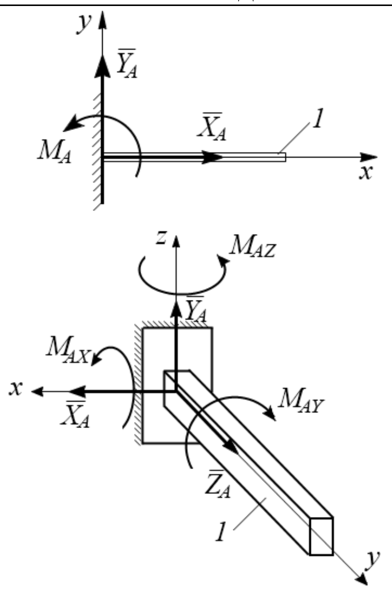
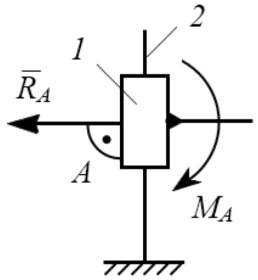
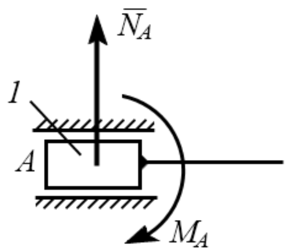
Гладкая поверхность	Нить	Невесомый стержень
		
Шарнирно-подвижная опора	Цилиндрический шарнир	Сферический (шаровый) шарнир
		
Жесткая заделка	Ползун *1* на стержне *2*	Ползун *1* в направляющих
		

Рисунок 2.1

Задача 1. Шар *1* весом 16 Н и шар *2* связаны нитью, перекинутой через блок *D*, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30^{\circ}$ (рисунок 2.2).

Решение

Расставим все силы и реакции на расчетной схеме. Применим принцип освобождаемости от связей. Так как шар *1* удерживается в равновесии шаром *2*, то усилие в тросе между двумя шарами будет равно весу шара *2*. Шар *1* свободно опирается на наклонную поверхность. В точке касания возникает реакция связи *N*, направленная перпендикулярно опоре. Направим оси координат.

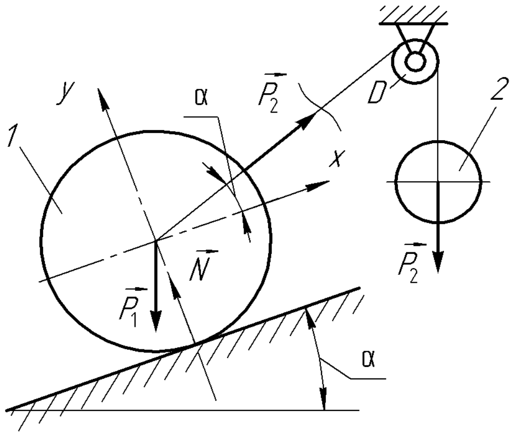


Рисунок 2.2

Для шара *1* составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на координатную ось *Ox*:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad -P_1 \cdot \sin\alpha + P_2 \cdot \cos\alpha = 0.$$

$$P_2 = \frac{P_1 \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = P_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha = 16\mathrm{tg}30^{\circ} = 9{,}24 \text{ Н}.$$

Ответ: $P_2 = 9{,}24$ Н.

Решить задачи 1.2.7, 1.2.10, 1.2.23, 1.4.3, 1.4.9 из [5].

2.2 Равновесие плоской системы сил

Для произвольной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия.

Первая форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Уравнение моментов составляют относительно произвольной точки. Лучше всего брать точку, которую пересекает наибольшее количество линий действия неизвестных сил.

Вторая форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0\,.$$

При использовании второй формы уравнений равновесия необходимо, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB.

Третья форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = 0\,.$$

При использовании третьей формы уравнений равновесия необходимо, чтобы точки A, B, C не лежали на одной прямой.

Задача 2. Определить реакции опор, если $F = 10$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 3$ кН·м (рисунок 2.3).

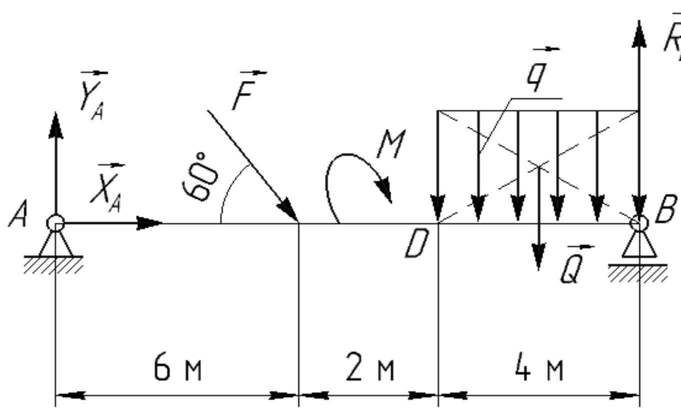


Рисунок 2.3

Решение

Рассмотрим равновесие балки *AB* под действием силы *F*, момента *M*, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = 4q = 8$ кН, которая приложена в середине участка *BD*:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + F \cdot \cos 60° = 0\,; \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A - F \cdot \sin 60° - Q + R_B = 0\,; \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_i) = -6\cdot F\cdot\sin 60° - M - 10\cdot Q + 12\cdot R_B = 0\,. \qquad (2.3)$$

Из (2.1) находим

$$X_A = -F\cdot\cos 60° = -10\cdot 0{,}5 = -5\ \text{кН},$$

из (2.3)

$$R_B = \frac{6F\cdot\sin 60° + M + 10Q}{12} = \frac{6\cdot 10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 10\cdot 8}{12} = 11{,}25\ \text{кН},$$

из (2.2)

$$Y_A = F\cdot\sin 60° + Q - R_B = 10\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11{,}25 = 5{,}41\ \text{кН}.$$

Ответ: X_A= – 5 кН, Y_A = 5,41 кН, R_B =11,25 кН.

Знак «минус» означает, что направление X_A противоположно направлению, показанному на рисунке 2.3.

Решить задачи 2.4.5, 2.4.6, 2.4.8, 2.4.10, 2.4.17, 2.4.27 из [5].

2.3 Равновесие системы тел

Инженерные конструкции часто представляют собой системы тел, соединенные друг с другом какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются внутренними в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с другими телами, в нее не входящими. Соответственно, силы взаимодействия между телами системы являются внутренними, а силы, действующие на рассматриваемую систему тел со стороны других тел, – внешними.

Если система тел находится в равновесии, то рассматриваем равновесие каждого тела в отдельности, учитывая внутренние силы взаимодействия между телами. Если задана плоская произвольная система n тел, то для этой системы можно составить $3n$ уравнений равновесия. Задача будет статически определимой, если число неизвестных не будет превышать числа уравнений равновесия. При решении задач на равновесие системы тел можно также рассматривать равновесие системы как для тел в целом, так и для любых сочетаний тел. В случае рассмотрения равновесия системы в целом внутренние силы взаимодействия между телами не учитываются на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия.

Задача 3. Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки, если $M = 8$ кН/м, $q = 2$ кН/м, $P = 6$ кН (рисунок 2.4).

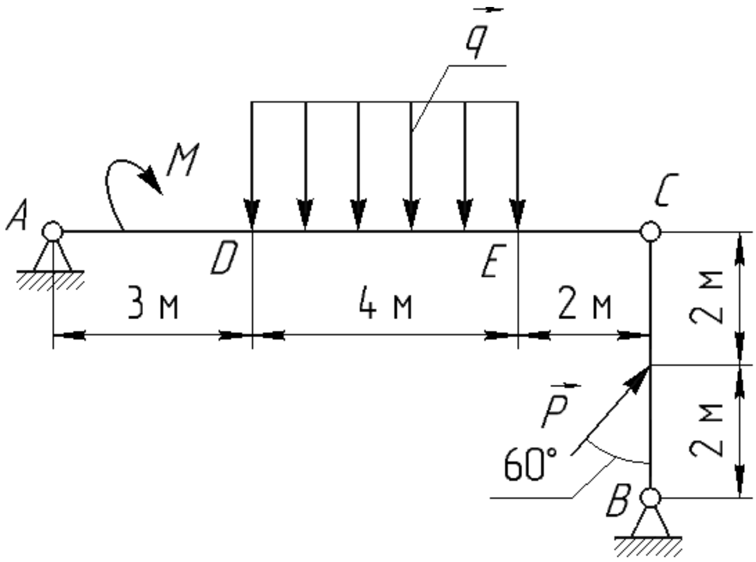


Рисунок 2.4

Решение

Расчленим составную балку по шарниру C и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q и реакций $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, шарнирно-неподвижной опоры A и реакций $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ шарнира C (рисунок 2.5).

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 4q = 8$ кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рисунке 2.5.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + X_C = 0; \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A + Y_C - Q = 0; \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -M - Q \cdot 5 + Y_C \cdot 9 = 0. \tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\vec{P}$, реакции $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ шарнирно-неподвижной опоры B и реакции $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ шарнира C (рисунок 2.6).

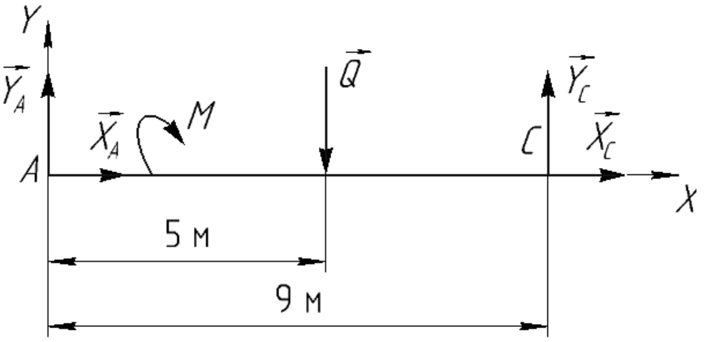


Рисунок 2.5

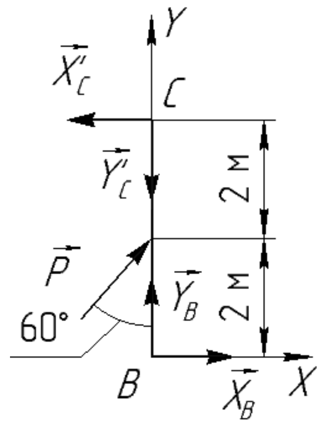


Рисунок 2.6

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X'_C\,, \quad Y_C = Y'_C\ ;$$

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C\,, \quad \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C\ .$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_B - X'_C + P \cdot \cos 30^\circ = 0; \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = -Y'_C + P \cdot \sin 30^\circ + Y_B = 0; \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = P \cdot 2\cos 30^\circ + X_B \cdot 4 = 0. \tag{2.9}$$

Находим из уравнения (2.9)

$$X_B = \frac{-P \cdot 2\cos 30^\circ}{4} = \frac{-6 \cdot 2\cos 30^\circ}{4} = -2{,}6 \text{ кН},$$

из (2.7)

$$X'_C = X_B + P \cdot \cos 30^\circ = -2{,}6 + 6\cos 30^\circ = 2{,}6 \text{ кН},$$

из (2.6)

$$Y_C = \frac{M + Q \cdot 5}{9} = \frac{8 + 8 \cdot 5}{9} = 5{,}33 \text{ кН},$$

из (2.8)

$$Y_B = -P \cdot \sin 30° + Y_C' = -6 \sin 30° + 5{,}33 = 2{,}33 \text{ кН},$$

из (2.5)

$$Y_A = -Y_C + Q = -5{,}33 + 8 = 2{,}67 \text{ кН},$$

из (2.4)

$$X_A = -X_C = -2{,}6 \text{кН}.$$

Ответ: X_A = – 2,6 кН, Y_A = 2,67 кН, $X_в$ = – 2,6 кН, $Y_в$ = 2,33 кН, $X_с$ = 2,6 кН, $Y_с$ = 5,33 кН.

Знак «минус» означает, что реакции $\vec{X}_A$ и $\vec{X}_B$ направлены противоположно направлениям, показанным на рисунках 2.5 и 2.6 соответственно.

Решить задачи 3.3.4, 3.3.7–3.3.9 из [5].

2.4 Произвольная пространственная система сил

Главный вектор и главный момент системы сил относительно центра *O* $\vec{R}_Г = \sum \vec{F}_i$, $\vec{M}_{ГО} = \sum \vec{M}_{Oi}$.

Условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $\vec{R}_Г = 0$, $\vec{M}_{ГО} = 0$. Но данные векторы равны нулю только тогда, когда их проекции на оси координат равны нулю:

$$R_x = R_y = R_z = 0; \;\; M_x = M_y = M_z = 0.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{ix} = 0; \;\; \sum F_{iy} = 0; \;\; \sum F_{iz} = 0;$$

$$\sum M_{ix} = 0; \;\; \sum M_{iy} = 0; \;\; \sum M_{iz} = 0.$$

При равновесии системы сил, произвольно расположенных в пространстве, суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей равны нулю.

В случае параллельных сил (рисунок 2.7) координатную ось *z* можно выбрать так, что она будет параллельна силам. Тогда проекции каждой из сил на оси *x* и *y* и их моменты относительно оси *z* будут равны нулю и получают три уравнения равновесия

$$\sum F_{iz} = 0; \sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0.$$

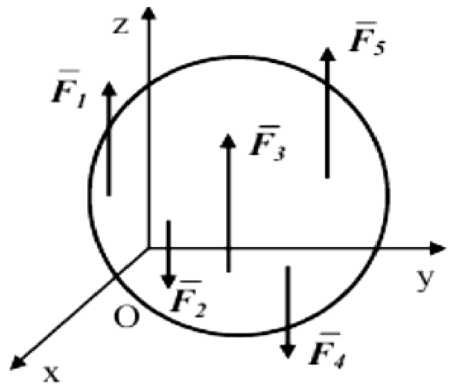


Рисунок 2.7

Следовательно, для равновесия системы параллельных сил, расположенных в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.

Задача 4. Горизонтальная однородная квадратная плита *ABCD* весом $G = 500$ Н подвешена в точках *A*, *D*, *E* к трем вертикальным стержням *1*, *2*, *3* (рисунок 2.8). Определить усилие в стержне *1*, если $AD = 2 \cdot AE$.

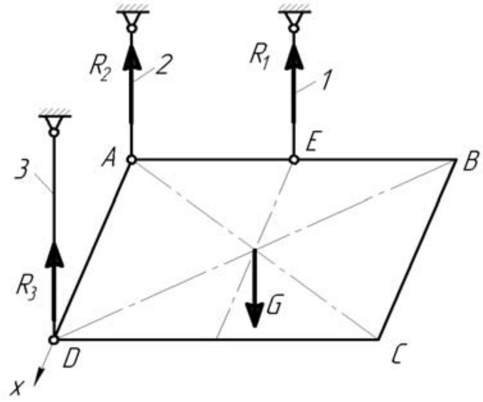


Рисунок 2.8

Решение

Покажем усилия в стержнях $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$. Запишем уравнение равновесия моментов относительно оси *AX*:

$$R_1 \cdot AE - G \cdot AE = 0; \;\; R_1 \cdot AE = G \cdot AE; \;\; R_1 = G.$$

Подставляя значения, получим

$$R_1 = 500 \text{ Н}.$$

Ответ: $R_1 = 500$ Н.

Решить задачи 1.4.6, 5.5.6, 5.5.12, 5.6.4 из [5].

2.5 Равновесие при наличии сил трения

Трение покоя. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в местах их соприкосновения возникает сила сцепления (сила трения покоя), препятствующая движению тел относительно друг друга. При увеличении сдвигающей силы тело какое-то время будет находиться в покое. При превышении определенного (предельного) значения сдвигающей силы тело выйдет из состояния покоя и начнет двигаться.

Трение скольжения. При скольжении тела по поверхности другого также возникает сила, препятствующая этому движению, – сила трения скольжения.

Законы трения.

1 Сила трения скольжения направлена противоположно возможному движению тела.

2 Сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

3 Максимальная сила трения пропорциональна нормальному давлению. Под нормальным давлением понимают полное давление на всю площадь соприкосновения трущихся поверхностей:

$$F_{\max} = f \cdot N .$$

4 Коэффициент трения скольжения f зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.

Коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения покоя. В технических расчетах принимают, что эти коэффициенты равны. С увеличением скорости движения для большинства материалов коэффициент трения скольжения уменьшается. Данный коэффициент определяют экспериментально.

Трение качения. Сопротивление качению одного тела по поверхности другого называется трением качения. Трение качения возникает в результате деформации катящегося тела и опорной поверхности, которые в действительности не являются абсолютно твердыми. Поэтому контакт между телом и поверхностью происходит по некоторой площадке (рисунок 2.9, *а*). Нормальная реакция смещается относительно центра катка в сторону его движения на некоторую величину f_K, которая при выходе тела из состояния равновесия достигает максимума и называется коэффициентом трения качения (рисунок 2.9, *б*). Коэффициент трения качения имеет размерность длины в отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения. Обычно нормальную реакцию проводят через центр катка, добавляя при этом к телу пару сил с моментом (рисунок 2.9, *в*), который называют моментом трения качения:

$$M_T = f_K \cdot N .$$

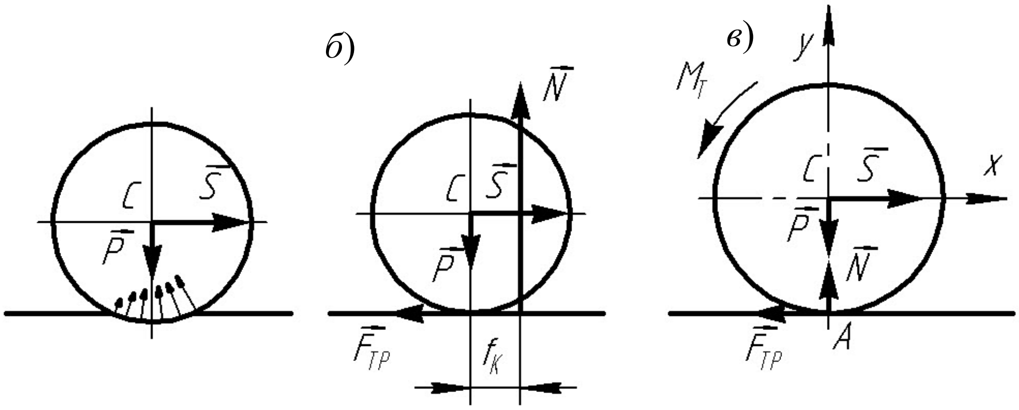


Рисунок 2.9

Задача 5. На наклонной поверхности находится цилиндр радиусом *r* (рисунок 2.10). Определить, при каких значениях угла наклона плоскости к горизонту α цилиндр будет находиться в равновесии, если *f* – коэффициент трения скольжения, $f_к$ – коэффициент трения качения.

Решение

Изобразим действующие на цилиндр силы. Силу трения скольжения направим вверх по наклонной поверхности, момент трения качения – по часовой стрелке, одну из осей – по наклонной поверхности (рисунок 2.10).

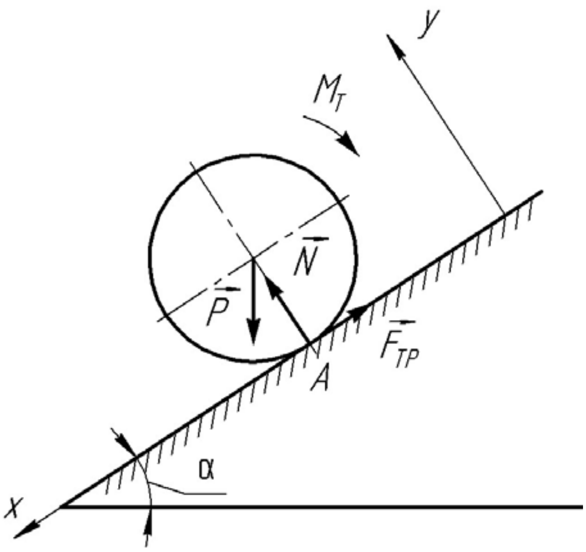


Рисунок 2.10

Составим три уравнения равновесия для уравновешенной плоской произвольной системы сил:

$$\sum F_{iX} = -F_{TP} + P \cdot \sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iY} = N - P \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = M_T - P \cdot \sin\alpha \cdot r = 0.$$

Находим из первого уравнения

$$F_{TP} = P \cdot \sin\alpha,$$

из второго

$$N = P \cdot \cos\alpha,$$

из третьего

$$M_T = P \cdot \sin\alpha \cdot r.$$

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$F_{TP} \le f \cdot N; \qquad M_T = f_K \cdot N.$$

С учетом полученных зависимостей

$$P \cdot \sin\alpha \le f \cdot P \cdot \cos\alpha \to \mathrm{tg}\alpha \le f; \qquad P \cdot \sin\alpha \cdot r \le f_K \cdot P \cdot \cos\alpha \to \mathrm{tg}\alpha \le \frac{f_K}{r}.$$

Для равновесия цилиндра на наклонной поверхности необходимо, чтобы оба условия выполнялись одновременно.

Решить задачи 2.5.3, 2.6.6, 2.6.11, 2.6.16 из [5].

3 Кинематика

3.1 Простое движение точки

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Под движением в механике понимается изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Материальной точкой считают твердое тело, размерами которого в данном случае можно пренебречь. Движение точки считают заданным, если известен способ, позволяющий установить ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, а если кривая – криволинейным.

Существуют три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения заключается в определении положения точки в пространстве радиус-вектором, который является векторной функцией времени, относительно выбранной системы отсчета.

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки в виде известных, непрерывных, дважды дифференцируемых функций времени.

Естественный способ задания движения считается известным, если заданы траектория движения точки, начало отсчета, положительное и отрицательное направления движения, закон движения точки по траектории $S = S(t)$.

Закон движения $S = S(t)$ также называют дуговой координатой, которую отсчитывают от начального положения. Дуговую координату не следует смешивать с длиной пути, пройденного точкой, т. к. за начало отсчета может быть выбрана любая точка или движение может быть колебательным.

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей принимают естественные (оси естественного трехгранника): $\vec{\tau}$ – касательная, $\vec{n}$ – нормаль, $\vec{b}$ – бинормаль. Данные оси связывают непосредственно с движущейся точкой.

Переход от координатного к естественному способу задания движения. Если движение точки задано координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то для перехода к естественному необходимо:

– установить траекторию, если возможно, т. е. получить уравнение траектории в явном виде:

$$y = f_1(x),\ z = f_2(x);$$

– определить закон движения точки по этой траектории $S = S(t)$ по формуле

$$\int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\,dt\,;$$

– установить начало отсчета, подставив в уравнение движения начальное время. Если это время не задано, то подставляют $t_0 = 0$;

– определить положительное направление движения, которое можно узнать или по вектору скорости, или подставляя значения времени в уравнения движения, чтобы получить новую точку на траектории.

Задача 1. Определить ускорение точки через 2 с после начала движения из состояния покоя, если движение задано уравнениями $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.

Решение

Находим проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$V_X = \dot{x} = 6t,\ V_X = 12 \text{ м/с};\ V_Y = \dot{y} = 8t,\ V_Y = 16 \text{ м/с};$$

$$V=\sqrt{V_X^2+V_Y^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20 \text{ м/с};$$

$$a_X=\ddot{x}=6 \text{ м/с}^2,\ a_Y=\ddot{y}=8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau=\frac{\left|V_X\cdot a_X+V_Y\cdot a_Y\right|}{V}=\frac{12\cdot 6+16\cdot 8}{20}=10 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n=\frac{\left|V_X\cdot a_Y-V_Y\cdot a_X\right|}{V}=\frac{\left|12\cdot 8-16\cdot 6\right|}{20}=0 \text{ м/с}^2;$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{10^2+0^2}=10 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_\tau=10$ м/с^2, $a_n=0$ м/с^2, $a=10$ м/с^2.

Решить задачи 7.3.6, 7.4.9, 7.4.20, 7.5.8, 7.5.10, 7.6.9, 7.7.17, 7.8.8 из [5].

3.2 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Точки твердого тела, совершающего поступательное движение, перемещаются как по прямолинейным, так и по криволинейным траекториям.

Поступательное движение твердого тела характеризуется заданием движения одной его точки, обычно центра тяжести, и может быть задано любым из изученных способов. Для задания поступательного движения тела в декартовой системе координат достаточно записать $x_c=f_1(t)$, $y_c=f_2(t)$, $z_c=f_3(t)$. Эти выражения будут законом поступательного движения.

Основные свойства поступательного движения твердого тела определяются теоремой: при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Скорость и ускорение твердого тела находят по формулам, применяемым в кинематике точки.

Задача 2. Точка A шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ движется по закону $S=0{,}5\pi t^2$ (рисунок 3.1). Определить скорость и ускорение точки C стержня AB, если $AC=BC$, $O_1B=OA=0{,}4$ м, $t=2$ с.

Решение

Стержень AB совершает поступательное движение, т. к. в любой момент времени прямая AB остается параллельной самой себе.

Следовательно, скорости и ускорения точек A, B, C будут одинаковы:

$$V_C = V_A = \dot{S} = \pi t\,;$$

$$a_A^{\tau} = \dot{V}_A = \pi = 3{,}14\,;$$

$$a_A^{n} = \frac{V_A^2}{AO} = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6\,;$$

$$a_C = a_A = \sqrt{\left(a_A^{\tau}\right)^2 + \left(a_A^{n}\right)^2} = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65\,.$$

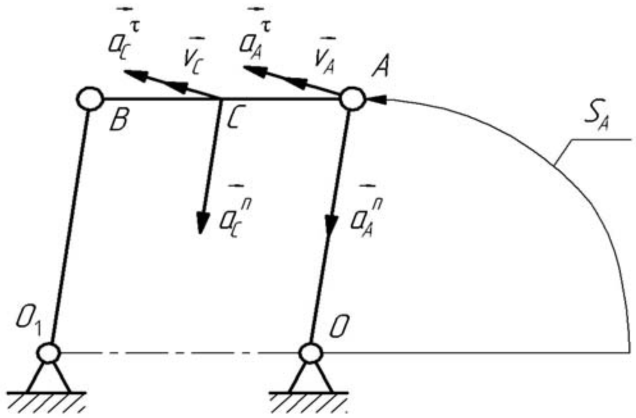


Рисунок 3.1

Ответ: $V_C = 2\pi$ м/с, $a_C = 98{,}65$ м/с^2.

Решить задачи 8.1.4, 8.1.5, 8.1.8, 8.1.14 из [5].

3.3 Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через данные неподвижные точки, называется осью вращения. Точки тела, не принадлежащие оси вращения, двигаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени. Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Полученный знак при дифференцировании угла поворота по времени определяет направление вращения. Если $\omega > 0$, то вращение происходит против хода часовой стрелки, если $\omega < 0$, то вращение – по ходу часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту и направление изменения угловой скорости в данный момент времени. Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Полученный знак производной определяет направление углового ускорения. Если $\varepsilon > 0$, то угловое ускорение направлено против хода часовой стрелки, если $\varepsilon < 0$, то угловое ускорение – по ходу часовой стрелки.

Задача 3. Груз *1* опускается по закону $x = 2{,}4t^2 - 4t$. Определить угловую скорость, угловое ускорение барабана, а также скорость и ускорение точки *M* в момент времени t = 1 с, если $R = 3r$ = 0,6 м (рисунок 3.2).

Решение

Определим скорость груза:

$$V = \dot{x} = 4{,}8t - 4.$$

Находим угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{4{,}8t - 4}{0{,}2} = 24t - 20;$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 24 \text{ рад/с}^2, \ \omega = 24t - 20 = 4 \text{ рад/с}.$$

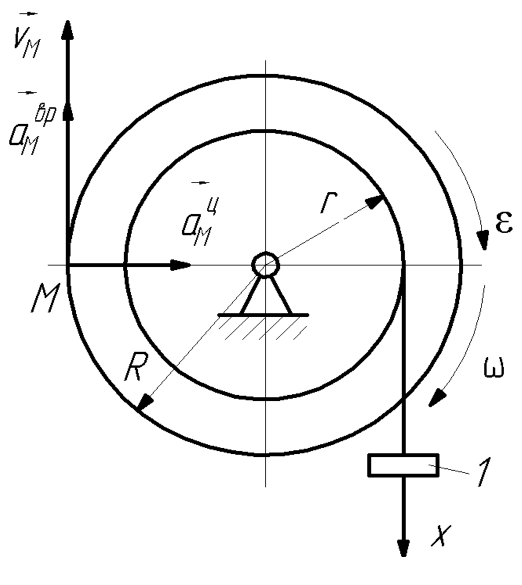


Рисунок 3.2

Скорость точки M

$$V_M = \omega \cdot R = 4 \cdot 0,6 = 2,4 \text{ м/с}.$$

Вращательное ускорение точки M

$$a_M^{ВР} = \varepsilon \cdot R = 24 \cdot 0,6 = 14,4 \text{ м/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки M

$$a_M^{Ц} = \omega^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки M

$$a = \sqrt{a_{ВР}^2 + a_{Ц}^2} = \sqrt{14,4^2 + 9,6^2} = 17,31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega = 4$ рад/с, $\varepsilon = 24$ рад/с^2, $V_M = 2,4$ м/с, $a = 17,31$ м/с^2.

Решить задачи 8.2.2, 8.2.8, 8.3.3, 8.3.13, 8.3.15, 8.3.16 из [5].

3.4 Плоское движение тела

Плоским или плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Уравнения плоского движения твердого тела. Для задания движения сечения твердого тела достаточно описать движение какого-либо отрезка CA, принадлежащего этому сечению. Положение отрезка CA определяется координатами точки C, выбранной за полюс, и углом поворота отрезка, который отсчитывается от выбранного начального положения (рисунок 3.3). Тогда уравнениями плоского движения твердого тела будут следующие:

$$X_C = f_1(t);\ Y_C = f_2(t);\ \varphi = f_3(t).$$

Первые два уравнения описывают поступательное движение плоской фигуры, определяемое движением полюса C. Поступательное движение плоской фигуры зависит от выбора полюса. Третье уравнение описывает вращательное движение плоской фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса.

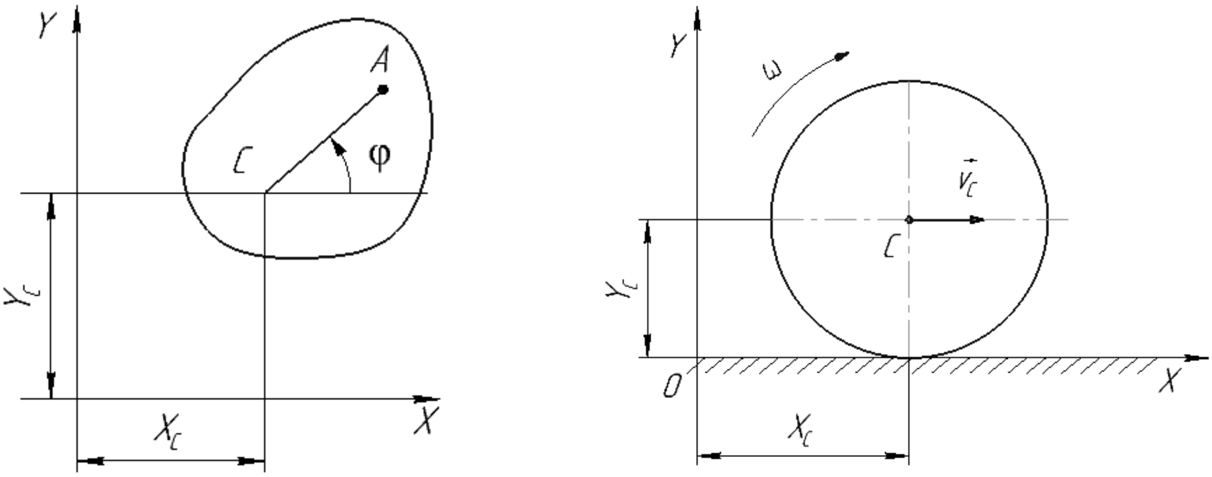


Рисунок 3.3

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющие эти точки, равны между собой. При этом проекции должны иметь одинаковый знак.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей в точках их приложения.

Если известны МЦС и угловая скорость вращения, то вектор скорости любой точки будет перпендикулярен отрезку, соединяющему МЦС с данной точкой, и направлен в соответствии с угловой скоростью. Модуль скорости равен произведению угловой скорости на расстояние от точки до МЦС.

Задача 4. В положении механизма, схема которого приведена на рисунке 3.4, определить угловую скорость шатуна AB и скорость точки B, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, OA = 0,2 м, AB = 1,6 м, BC = 0,8 м, h = 0,8 м.

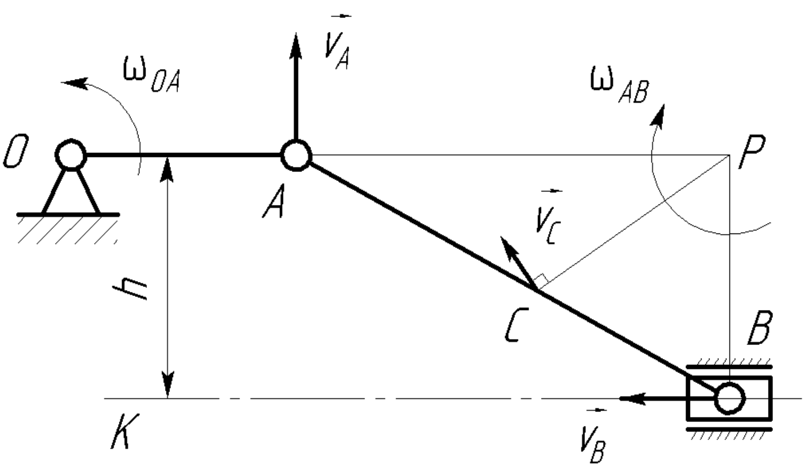


Рисунок 3.4

Решение

Найдем скорость точки A:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}; \;\; \vec{V}_A \perp OA .$$

Скорость ползуна B должна быть направлена по прямой KB.

Мгновенный центр шатуна AB находится в точке P пересечения перпендикуляров, восстановленных к направлениям векторов скоростей точек A и B.

Угловая скорость шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} .$$

Определим величины AP, BP и CP с учетом того, что $BP = h = 0,8$ м:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = 1,39 \text{ м}.$$

$$\cos\angle PBC = \frac{h}{AB} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5 \to \angle PBC = 60° .$$

Треугольник ΔPBC равносторонний, следовательно,

$$CP = BP = BC = 0,8 \text{ м}.$$

Находим угловую скорость:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0,4}{1,39} = 0,29 \text{ рад/с}.$$

Определяем скорости точек B и C:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с}.$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определяется по направлению вращения вектора $\vec{V}_A$ скорости точки A относительно мгновенного центра скоростей P. Угловая скорость шатуна AB направлена по часовой стрелке. Скорости точек B и C должны показывать такое же направление. Для построения вектора $\vec{V}_C$ восстанавливаем перпендикуляр к отрезку CP и направляем вектор $\vec{V}_C$ в соответствии с направлением ω_{AB}.

Ответ: $\omega_{AB} = 0,29$ рад/с, $V_B = V_C = 0,23$ м/с.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг данного полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC} \quad \text{или} \quad \vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}^{BP} + \vec{a}_{MC}^{Ц}.$$

Задача 5. Используя условие задачи 4, определить ускорение точки *B*.

Решение

За полюс выберем точку *A*, т. к. ускорение этой точки можно найти:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{BP} + \vec{a}_A^{Ц}.$$

Так как кривошип *OA* вращается равномерно, $\omega = \text{const} \rightarrow \varepsilon = \dot{\omega} = 0$, получим

$$a_A^{Ц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}_A^{BP} = \varepsilon \cdot AO = 0.$$

Вектор $\vec{a}_A^{Ц}$ направлен по *AO* от точки *A* к точке *O* (рисунок 3.5).

Находим ускорение точки *B*:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{BP} + \vec{a}_A^{Ц} + \vec{a}_{BA}^{BP} + \vec{a}_{BA}^{Ц}.$$

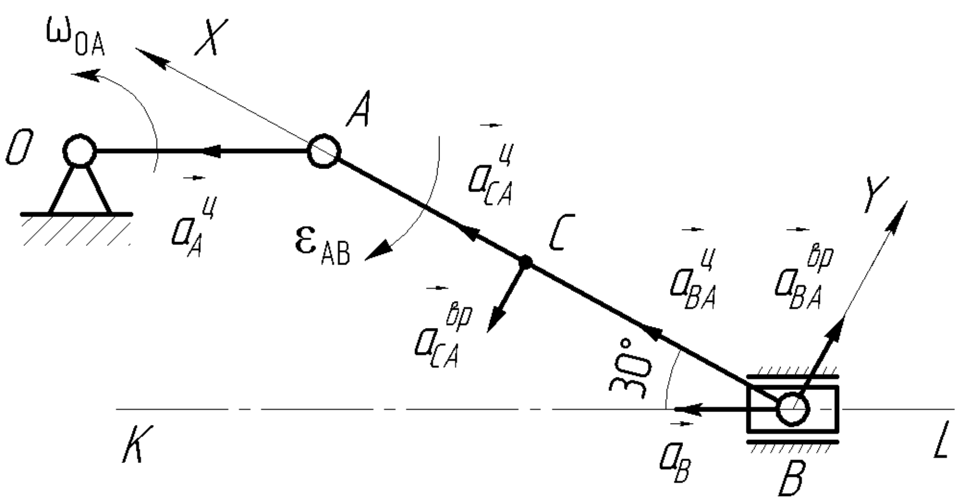


Рисунок 3.5

Находим $\vec{a}_{BA}^{BP}$ и $\vec{a}_{BA}^{Ц}$:

$$\vec{a}_A^{BP} = |\varepsilon_{AB}| \cdot AB.$$

Так как ε_{AB} неизвестно, то зададим направление вектора $\vec{a}_{BA}^{BP}$, учитывая, что $\vec{a}_{BA}^{BP} \perp BA$.

$$\vec{a}_{BA}^{Ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}29^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}135 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^{Ц}$ направлен по BA от точки B к полюсу A. Проецируем выражение для определения ускорения точки B на выбранные оси (X, Y):

$$\text{ось } X\text{: } a_B \cdot \cos 30° = a_A^{Ц} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{Ц};$$

$$\text{ось } Y\text{: } -a_B \cdot \cos 60° = a_{BA}^{BP} - a_A^{Ц} \cdot \cos 60°.$$

Из предпоследнего равенства находим

$$a_B = \frac{a_A^{Ц} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{Ц}}{\cos 30°} = \frac{0{,}8 \cos 30° + 0{,}135}{\cos 30°} = 0{,}96 \text{ м/с}^2,$$

из последнего

$$a_{BA}^{BP} = a_A^{Ц} \cdot \cos 60° - a_B \cdot \cos 60° = 0{,}8 \cos 60° - 0{,}96 \cos 60° = -0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что вектор $\vec{a}_{BA}^{BP}$ направлен в противоположную сторону, выбранную на рисунке 3.5.

Определим угловое ускорение шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{BP}\right|}{AB} = \frac{0{,}08}{1{,}6} = 0{,}05 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{AB} будет по часовой стрелке.

Ответ: $a_B = 0{,}96$ м/с^2.

Решить задачи 9.2.2, 9.2.4, 9.2.6, 9.5.7, 9.5.10, 9.4.10, 9.7.16, 9.7.17, 9.7.20, 9.7.21 из [5].

3.5 Сложное движение точки

Сложным движением называют такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях (рисунок 3.6).

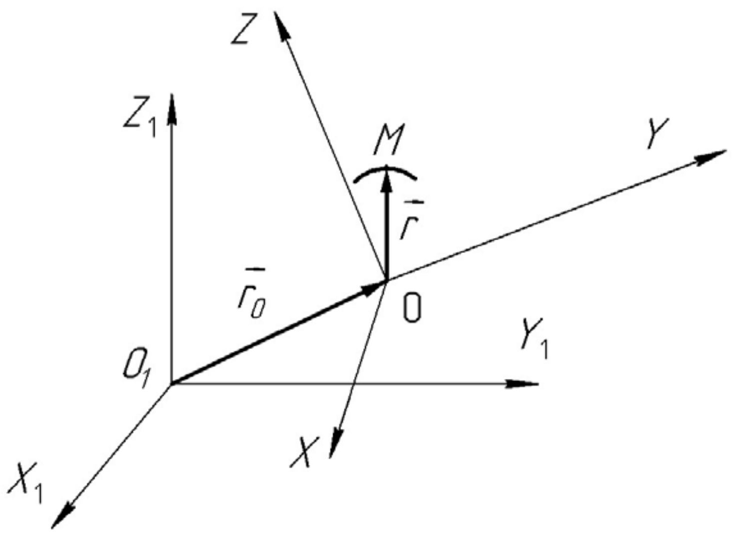


Рисунок 3.6

Абсолютным движением называют движение точки *M* по отношению к основной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, которую условно принимают за неподвижную.

Относительным движением называют движение точки *M* по отношению к подвижной системе отсчета *OXYZ*.

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета *OXYZ* относительно основной (неподвижной) системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$.

Абсолютной скоростью называют скорость точки *M* относительно основной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и обозначают $\vec{V}_a$.

Относительной скоростью называют скорость точки *M* относительно подвижной системы координат *OXYZ* и обозначают $\vec{V}_r$.

Переносной скоростью точки *M* называют скорость движения подвижной системой координат вместе с неизменно связанными с ней точками и обозначают $\vec{V}_e$.

Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Модуль абсолютной скорости в общем случае находят проецированием последнего равенства на оси координат, т. к. угол между векторами относительной и переносной скоростей может быть различный:

$$V_a = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2},$$

где $V_X = V_{ex} + V_{rx}$; $V_Y = V_{ey} + V_{ry}$.

Определение скоростей относительного и переносного движений начинают с нахождения положения точки на траектории относительного движения.

Затем мысленно останавливают относительное движение и определяют скорость той точки подвижной системы координат, в которой зафиксирована движущаяся точка. Это будет переносная скорость. Для определения относительной скорости мысленно останавливают движение подвижной системы координат, т. е. переносное движение, и известными способами находят скорость точки относительно подвижной системы координат.

Задача 6. Диск радиусом R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$ рад. По ободу движется точка M по закону $OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3)$ (рисунок 3.7). Определить абсолютную скорость точки в момент времени t_1 = 1 с.

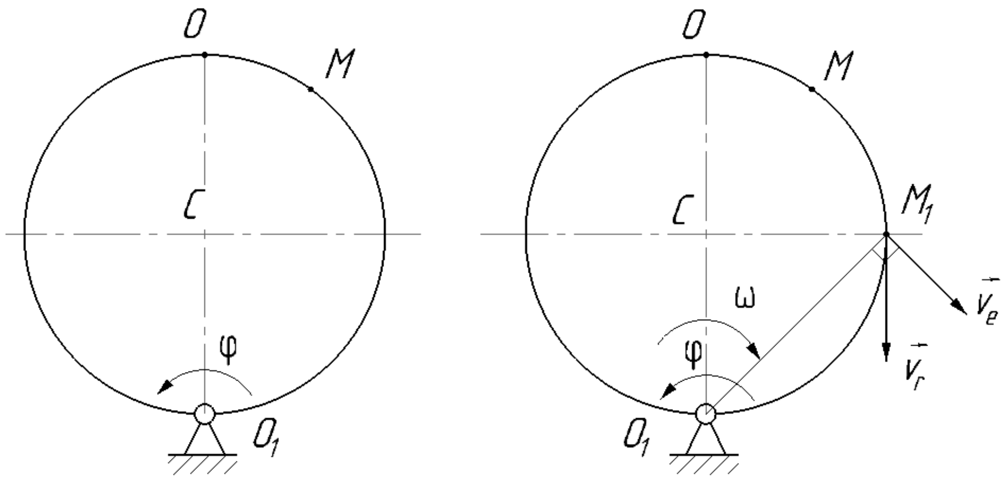


Рисунок 3.7

Решение

Точка M совершает сложное движение. Движение точки M по ободу диска будет относительным, а вращение диска вокруг точки O_1 – переносным.

Определим положение точки M на траектории относительного движения при t_1 = 1 с:

$$OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3) = \frac{\pi \cdot R}{2}.$$

Находим угол O_1CM_1:

$$\angle O_1CM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Находим скорость относительного движения:

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi}{2} R \cdot (4t - 3t^2).$$

При $t_1 = 1$ с получим

$$V_r = \dot{S} = \frac{50\pi}{2} \cdot (4 - 3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с.}$$

Так как $V_r > 0$, то вектор $\vec{V}_r$ направлен по касательной к окружности в точке M_1 в сторону увеличения дуги OM (см. рисунок 3.7).

Находим скорость переносного движения:

$$V_e = |\omega| \cdot h,$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При $t_1 = 1$ с значение $\omega = -3$ рад/с. Знак «минус» показывает, что направление ω противоположно направлению положительного отсчета угла φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см,}$$

то

$$V_e = |-3| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1O_1}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью (см. рисунок 3.7).

Так как $\angle \vec{V}_e, \vec{V}_r = 45°$, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_r \cdot V_e \cdot \cos 45°} = \sqrt{211{,}5^2 + 78{,}5^2 + 2 \cdot 211{,}5 \cdot 78{,}5 \cdot 0{,}71} = 272{,}89 \text{ см/с.}$$

Ответ: $V_a = 272{,}89$ см/с.

Абсолютное ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{a}_e^{ц} + \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_к,$$

где $\vec{a}_e$ – ускорение переносного движения;

$\vec{a}_r$ – ускорение относительного движения;

$\vec{a}_к$ – ускорение Кориолиса,

$$\vec{a}_к = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right).$$

Ускорение Кориолиса характеризует:

– изменение величины переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;

– изменение направления вектора относительной скорости вследствие вращательного переносного движения.

Направление ускорения Кориолиса определяют либо по правилу векторного произведения, либо по правилу Жуковского.

Правило Жуковского: проецируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, и поворачиваем эту проекцию в той же плоскости на угол 90° в сторону переносной угловой скорости.

Модуль ускорения Кориолиса

$$a_к = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\left(\vec{\omega}_e \hat{\ } \vec{V}_r\right).$$

Ускорение Кориолиса равно нулю, если:

– $\omega_e = 0$ – переносное движение является поступательным;

– $V_r = 0$ – относительная скорость в данный момент равна нулю;

– $\sin\left(\vec{\omega}_e \hat{\ } \vec{V}_r\right) = 0$ – вектор угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ параллелен вектору относительной скорости $\vec{V}_r$.

Модуль абсолютного ускорения точки можно найти через проекции на выбранные оси координат. Тогда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Задача 7. Используя условие и решение задачи 6, необходимо определить абсолютное ускорение точки *M*.

Решение

Рассмотрим переносное движение точки *M*.

Центростремительное переносное ускорение

$$\vec{a}_e^{ц} = \omega_e^2 \cdot h = 3^2 \cdot 70{,}5 = 634{,}5 \ \text{см/с}^2.$$

Вращательное переносное ускорение

$$\vec{a}_e^{вр} = \varepsilon \cdot h = 6 \cdot 70{,}5 = 423 \ \text{см/с}^2,$$

где $\varepsilon = \dot{\omega} = 18t - 12$; $\varepsilon = 6$ рад/с^2 при $t_1 = 1$ с.

Угловое ускорение направлено противоположно угловой скорости (рисунок 3.8), т. к. производная имеет другой знак. Вектор $\vec{a}_e^{ц}$ направлен по M_1O_1 к оси переносного вращения. Вектор $\vec{a}_e^{вр}$ перпендикулярен M_1O_1 и направлен в соответствии с угловым ускорением.

Относительное тангенциальное ускорение

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}R\cdot\left(4t-3t^2\right)\right) = \frac{\pi}{2}R\cdot(4-6t).$$

При $t_1 = 1$ с значение $a_r^\tau = -\pi R = -\pi\cdot 50 = -157$ см/с^2.

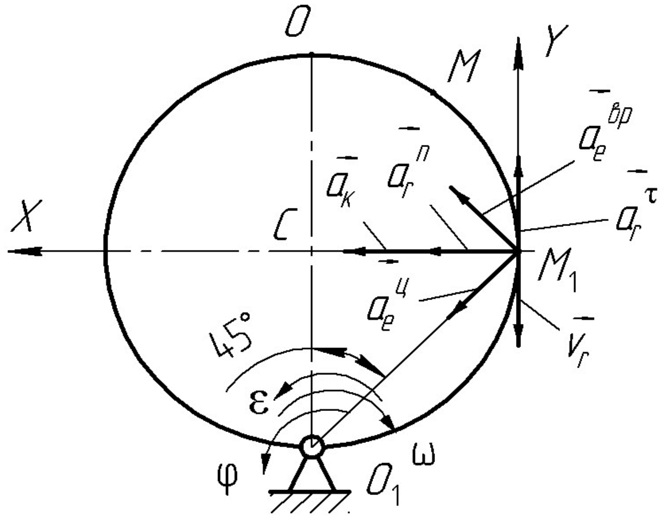


Рисунок 3.8

Нормальное относительное ускорение

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r} = \frac{25\pi^2}{50} = 123{,}25 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен по M_1C от точки M_1 к точке C. Вектор $\vec{a}_r^\tau$ направлен противоположно вектору $\vec{V}_r$, т. к. a_r^τ меньше нуля.

Находим ускорение Кориолиса:

$$a_к = 2\cdot 3\cdot 78{,}5\sin 90° = 471 \text{ м/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_к$ находим по правилу Жуковского. Так как вектор $\vec{V}_r$ находится в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то повернем $\vec{V}_r$ на 90° в направлении ω_e, т. е. по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{a}_к$ будет направлен от M_1 к C.

Проецируем полученные ускорения на выбранные координатные оси:

$$a_x = a_e^{вр}\cdot\cos 45° + a_e^{ц}\cdot\cos 45° + a_r^n + a_к =$$

$$= 423\cos 45° + 634{,}5\cos 45° + 123{,}25 + 471 = 1341{,}9 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^{вр}\cdot\cos 45° - a_e^{ц}\cdot\cos 45° + a_r^\tau =$$

$$= 423\cos 45° - 634{,}5\cos 45° + 157 = 7{,}47 \text{ см/с}^2.$$

Абсолютное ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1341{,}9^2 + 7{,}47^2} = 1341{,}92 \ \text{см / с}^2 .$$

Ответ: a = 1341,92 см/с^2.

4 Динамика

4.1 Первая и вторая задачи динамики точки

Первая задача: зная массу точки и закон ее движения, определить действующие на данную точку силы.

Так, если движение точки задано в прямоугольной системе координат, то суть задачи состоит в следующем: известны m, $x = f\,(t)$, $y = f\,(t)$, $z = f\,(t)$, а необходимо определить F_X, F_Y, F_Z.

Первая задача динамики точки решается методом дифференцирования ее уравнений движения.

Задача 1. Материальная точка массой m = 1,4 кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке (рисунок 4.1).

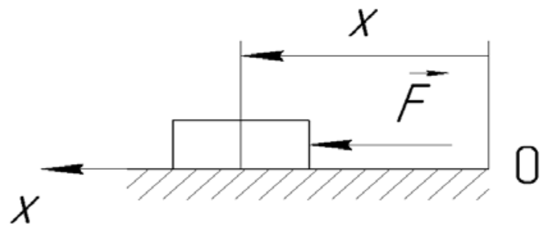


Рисунок 4.1

Решение

Запишем основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$.

Спроецируем это уравнение на ось X:

$$ma_X = \sum F_{kx} .$$

Определим значение проекции ускорения на ось X, для чего 2 раза продифференцируем по времени закон движения. Получим

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 12t + 6 \ \text{м/с}; \qquad a_X = \frac{dV x}{dt} = 12 \ \text{м/с}^2;$$

$$F = 1{,}4 \cdot 12 = 16{,}8 \ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 16{,}8$ Н.

Вторая задача: зная массу точки и действующие на нее силы, определить закон движения данной точки.

Так, если движение точки задано в прямоугольной системе координат, то суть задачи состоит в следующем: известны m, F_X, F_Y, F_Z, а необходимо определить $x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$.

Вторая задача динамики точки решается интегрированием уравнений, определяющих закон изменения силы. При этом следует иметь в виду, что сила, действующая на материальную точку, может быть постоянной или зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости и др.

Задача 2. Материальная точка массой m = 18 кг движется в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы $F = 25$ Н (рисунок 4.2). Определить радиус кривизны траектории в момент времени, когда скорость точки V = 4 м/с, а векторы скорости и силы образуют между собой угол $\alpha = 55°$.

Решение

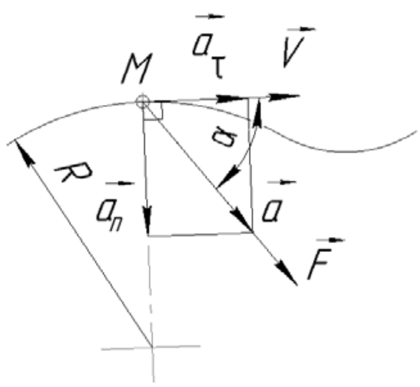


Рисунок 4.2

Так как сила $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, то вектор силы совпадает по направлению с вектором полного ускорения, а скорость при движении по криволинейной траектории направляется по касательной к траектории и совпадает с касательным ускорением. Угол α – это угол между вектором касательного и полного ускорений.

Находим полное ускорение точки:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{25}{18} = 1{,}389 \text{ м/с}^2.$$

В свою очередь,

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad a_n = \sin\alpha \cdot a .$$

С учетом этого получим

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{\sin\alpha \cdot a} = \frac{4^2}{\sin 55° \cdot 1{,}389} = 14{,}06 \text{ м.}$$

Ответ: $\rho = 14{,}06$ м.

Решить задачи 13.1.16, 13.1.24, 13.2.11, 13.2.18, 13.2.25, 13.3.3, 13.3.12, 13.3.19 из [5].

4.2 Динамика относительного движения точки

До сих пор изучалось движение материальной точки по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета, т. е. системе отсчета, где справедливы законы Ньютона. Во многих случаях задачи динамики сводятся к исследованию движения в той или иной неинерциальной (подвижной) системе отсчета. Рассмотрим движение точки по отношению к подвижной системе отсчета. В этом случае основное уравнение динамики относительного движения материальной точки будет иметь вид

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \tag{4.1}$$

где $\vec{a}_r$ – ускорение точки относительно подвижной системы отсчета.

Относительное движение материальной точки происходит под действием приложенных к точке сил при условии, что к ним присоединены переносная $\vec{\Phi}_e$ и кориолисова $\vec{\Phi}_c$ силы инерции.

При этом переносная и кориолисова силы инерции – это векторы, численно равные произведению массы точки на ее переносное $\vec{a}_e$ и кориолисово $\vec{a}_c$ ускорения. Направление сил инерции противоположно направлению одноименных им ускорений.

Условие относительного покоя можно получить из основного уравнения динамики относительного движения материальной точки путем подстановки в уравнение (4.1) нулевых значений $\vec{a}_r$ и $\vec{\Phi}_c$:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0. \tag{4.2}$$

Задача 3. Шарик *M* массой m = 0,2 кг движется со скоростью V = 19,62 м/с относительно вертикальной трубки *2*, которая на расстоянии $l = 0{,}5$ м прикреплена к вертикальному валу *1*. Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с (рисунок 4.3). Определить переносную силу инерции шарика.

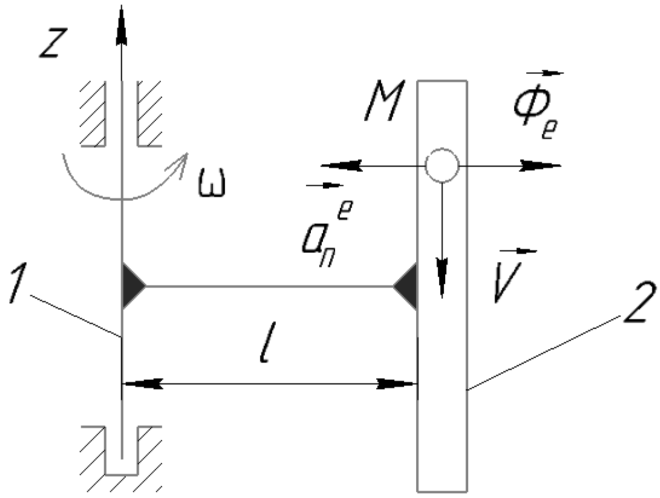


Рисунок 4.3

Решение

Переносная сила инерции может быть рассчитана согласно формуле $\Phi_e = m \cdot a_e$. Определим переносное ускорение точки.

Так как переносным движением является вращение трубки вокруг оси Z, то переносным движением точки является движение по окружности радиусом l. При этом ускорение точки можно разложить на две составляющие ускорения (a_e^n и a_e^τ), т. е.

$$a_e = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2}\ .$$

В свою очередь,

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot l = 5^2 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot l = 0 \cdot 0{,}5 = 0 \text{ м/с}^2, \quad \text{т. к. } \varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$a_e = \sqrt{12{,}5^2 + 0^2} = 12{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Тогда $\Phi_e = m \cdot a_e = 0{,}2 \cdot 12{,}5 = 2{,}5$ Н.

Ответ: $\Phi_e = 2{,}5$ Н.

4.3 Теорема об изменении количества движения

Количество движения материальной точки – это вектор, имеющий направление вектора скорости и равный произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v}\ . \qquad (4.3)$$

Производная по времени от количества движения материальной точки равна равнодействующей сил, действующих на точку:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \sum \vec{F}\ . \qquad (4.4)$$

Данное утверждение – это теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме. Выражение теоремы об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме имеет вид

$$\vec{q} - \vec{q}_0 = \vec{S}\,. \tag{4.5}$$

Изменение количества движения материальной точки $\vec{q} - \vec{q}_0$ за некоторый промежуток времени $t - t_0$ равно импульсу $\vec{S}$ равнодействующей сил, действующих на точку за тот же промежуток времени:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt\,. \tag{4.6}$$

Если сила $\vec{F} = \text{const}$, то импульс силы

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot (t - t_0)\,. \tag{4.7}$$

Количество движения механической системы – вектор, равный сумме векторов количеств движения всех точек, входящих в систему:

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_i\,. \tag{4.8}$$

Равенство (4.8) можно представить в виде

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C\,. \tag{4.9}$$

Таким образом, количество движения механической системы есть вектор, равный произведению массы системы на скорость центра масс данной механической системы.

Производная от вектора количества движения механической системы по времени равна главному вектору внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_{Г}^{E}\,. \tag{4.10}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: изменение количества движения механической системы равно импульсу главного вектора внешних сил, действующих на систему:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_o = \vec{S}_{Г}^{E}\,, \tag{4.11}$$

где $\vec{S}_{Г}^{E}$ – импульс главного вектора внешних сил, равный векторной сумме импульсов составляющих сил,

$$\vec{S}_{\Gamma}^{E} = \sum \vec{S}_{i}^{E} . \tag{4.12}$$

Задача 4. Трубка вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Относительно трубки движется шарик M массой m = 0,2 кг со скоростью $V_r = 4$ м/с (рисунок 4.4). Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние OM = 0,4 м.

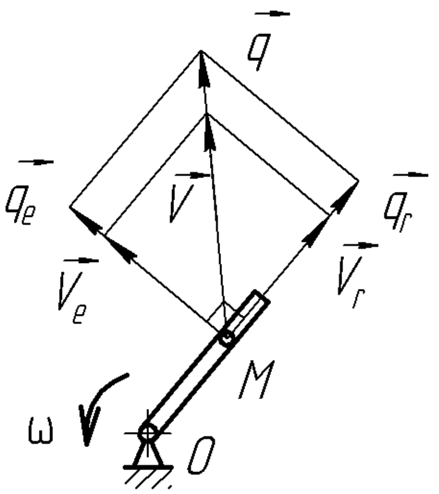


Рисунок 4.4

Решение

Количество движения определяется по формуле

$$q = m \cdot V ,$$

где V – абсолютная скорость точки, $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}$.

Скорость шарика в переносном движении найдем с учетом того, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e$:

$$V_e = \omega \cdot OM = 10 \cdot 0{,}4 = 4 \text{ м/с.}$$

$$V = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}657 \text{ м/с.}$$

Тогда

$$q = m \cdot V = 0{,}2 \cdot 5{,}657 = 1{,}13 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

Ответ: $q = 1{,}13$ кг$\cdot$м/с.

Решить задачи 14.2.25, 14.2.27, 14.2.28, 14.3.8, 14.3.19 из [5].

4.4 Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, численно равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2} . \tag{4.13}$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий составляющих ее точек:

$$T = \sum T_i . \tag{4.14}$$

Кинетическая энергия твердого тела в случае его поступательного движения

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2}, \tag{4.15}$$

где v_C – скорость центра масс твердого тела;

M – масса твердого тела.

В случае вращательного движения твердого тела с угловой скоростью ω относительно неподвижной оси z

$$T = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}, \tag{4.16}$$

где J_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении равна сумме энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения вокруг центра масс:

$$T = \frac{M \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}. \tag{4.17}$$

Теорема об изменении кинетической энергии имеет вид

$$T - T_0 = \sum A_i . \tag{4.18}$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы имеет следующий вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I , \tag{4.19}$$

где A_i^E – работа равнодействующей внешних сил, действующих на i-ю материальную точку;

A_i^I – работа равнодействующей внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку.

Если механическая система является неизменяемой, т. е. в которой расстояние между любыми двумя точками во все время остаются постоянными, то для данной системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы имеет вид

$$T - T_0 = \sum A_i^E . \tag{4.20}$$

Задача 5. Определить скорость груза *2* в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $S = 4$ м, если массы грузов $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг. Система тел вначале находилась в покое (рисунок 4.5).

Решение

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A^E .$$

Определим кинетическую энергию механической системы:

$$T = T_1 + T_2 ; \quad T_1 = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} ; \quad T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} .$$

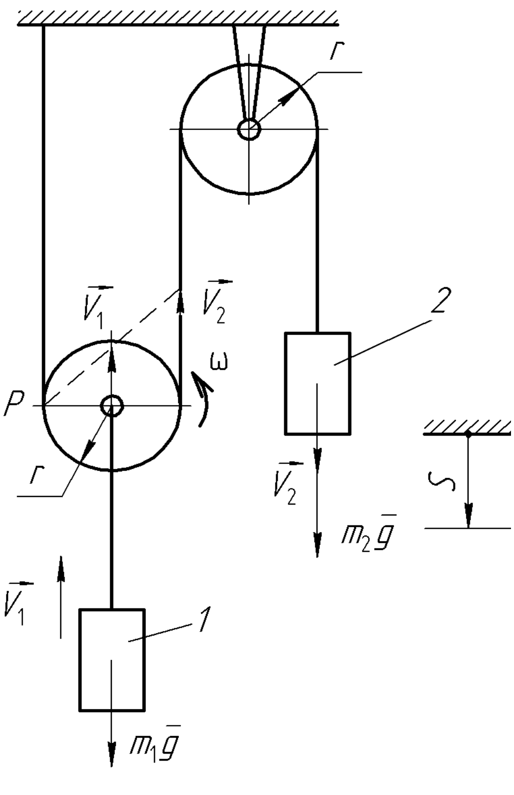


Рисунок 4.5

Скорость первого тела выразим через скорость второго тела:

$$V_1 = \frac{V_2}{2} .$$

Тогда

$$T_1 = \frac{m_1 \frac{V_2^2}{4}}{2} = m_1 \frac{V_2^2}{8} ;$$

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} ;$$

$$T = m_1 \frac{V_2^2}{8} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) .$$

Определим работу внешних сил, приложенных к системе.

Работа силы тяжести первого тела будет отрицательной, т. к. направление силы тяжести не совпадает с направлением его перемещения. Работа силы тяжести второго тела будет положительной, т. к. сила совпадает с направлением перемещения S:

$$A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{S}{2} ; \quad A_2 = m_2 \cdot g \cdot S ;$$

$$A = A_1 + A_2 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{S}{2} + m_2 \cdot g \cdot S = -2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 143{,}15 \text{ Дж.}$$

$$V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2}\right) = 143{,}15 \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{143{,}15}{\left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2}\right)}} = 7{,}56 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_2 = 7{,}56$ м/с.

Решить задачи 15.5.5, 15.5.7, 15.7.7, 15.7.8, 15.7.10 из [5].

4.5 Теорема об изменении кинетического момента

При поступательном движении мерой инерции твердого тела является масса. При вращательном движении инертность тела определяется распределением его массы относительно оси вращения, т. е. моментом инерции.

Момент инерции тела относительно полюса – скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до полюса:

$$I_0 = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \tag{4.21}$$

Момент инерции относительно оси – скалярная величина, численно равная сумме произведений масс всех материальных точек тела (системы) на квадрат расстояния до оси:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \tag{4.22}$$

Радиус инерции определяет то расстояние от оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы она имела тот же момент инерции, как и рассматриваемое тело:

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}. \tag{4.23}$$

Для определения моментов инерции относительно параллельных осей используется теорема Гюйгенса – Штейнера, согласно которой момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между ними:

$$I_z = I_{zc} + m \cdot d^2. \tag{4.24}$$

Для однородных простейших симметричных тел формулы для определения моментов инерции имеются в соответствующей справочной литературе. Так, например, для однородного тела, имеющего форму диска, момент инерции относительно оси диска определяется как

$$I_z = \frac{m \cdot R^2}{2}.$$

Моментом количества движения материальной точки относительно центра *O* называется вектор

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} = \vec{r} \times \vec{q}\,, \qquad (4.25)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки относительно точки *O*.

При движении точки в плоскости относительно некоторого центра *O* ее кинетический момент относительно данного центра может быть определен как алгебраическая величина следующим образом (поступательное движение):

$$l_O = m \cdot v \cdot h\,, \qquad (4.26)$$

где *h* – кратчайшее расстояние между точкой *O* и вектором скорости $\vec{v}$.

Главный момент количеств движения материальных точек механической системы относительно некоторого центра *O* является кинетическим моментом системы относительно данного центра *O* и определяется как

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_i\,. \qquad (4.27)$$

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на его угловую скорость:

$$L_z = I_z \cdot \omega\,. \qquad (4.28)$$

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра *O* равна сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O\,. \qquad (4.29)$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы: производная по времени вектора кинетического момента системы относительно некоторого центра *O* равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}^{E}_{ГО}\,. \qquad (4.30)$$

Задача 6. По стержню AB движется ползун C согласно закону $AC = 0{,}2 + 1{,}2t$ (рисунок 4.6). Ползун считать материальной точкой массой $m = 1$ кг. Момент инерции вала OA относительно оси Z $I_z = 2{,}5$ кг·м^2. Определить угловую скорость вала в момент времени $t_1 = 1$ с, если начальная угловая скорость $\omega_0 = 10$ рад/с.

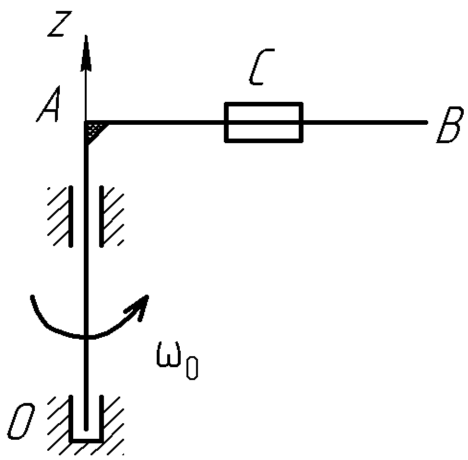


Рисунок 4.6

Решение

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что

$$I_0 \cdot \omega_0 = I \cdot \omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{I_0 \cdot \omega_0}{I}.$$

При $t_0 = 0$ имеем $I_0 = I_z + AC^2 \cdot m$, а при $t_1 = 1$ с имеем $I = I_z + AC^2 \cdot m$.

В итоге получим

$$\omega = \frac{I_z + AC^2 \cdot \omega_0}{I_z + AC^2} = \frac{2{,}5 + \left(0{,}2 + 1{,}2 \cdot 0\right)^2 \cdot 10}{2{,}5 + \left(0{,}2 + 1{,}2 \cdot 1\right)^2} = 5{,}695 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $\omega = 5{,}695$ рад/с.

Решить задачи 14.5.13, 14.5.16, 14.6.5, 14.6.10, 16.1.14, 16.1.23 из [5].

4.6 Принцип Даламбера

Применение метода кинетостатики в теоретической механике даёт возможность решать методами статики многие задачи динамики. Особенно удобно использовать этот метод для учёта динамических нагрузок при силовых расчётах инженерных сооружений и конструкций.

Метод кинетостатики требует введения понятия даламберовой силы инерции.

Даламберова сила инерции – это вектор, имеющий размерность силы, по модулю равный произведению массы на ускорение, направленный противоположно ему, который можно включать в систему действующих на частицу сил и в процессе математических преобразований обращаться с ним, как с обычной силой:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \tag{4.31}$$

Принцип Даламбера для материальной точки

$$\sum \overline{F}_i + \sum \overline{R}_i + \overline{\Phi} = 0. \tag{4.32}$$

Векторная сумма активных сил, действующих на точку, реакций связей и даламберовой силы инерции равна нулю.

Принцип Даламбера для механической системы

$$\sum \bar{F}_i^E + \sum \bar{R}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0; \quad \sum M_{Oi}^E + \sum M_{Oi}^R + \sum M_{Oi}^{\Phi} = 0, \qquad (4.33)$$

где $\sum \bar{F}_i^E$ – сумма внешних активных сил;

$\sum \bar{R}_i$ – сумма реакций связи со стороны тел, не входящих в систему;

$\sum \bar{\Phi}_i$ – сумма сил инерции точек;

$\sum \bar{M}_{Oi}^E$ – сумма моментов внешних активных сил относительно некоторого произвольного центра O;

$\sum \bar{M}_{Oi}^R$ – сумма моментов внешних реакций относительно некоторого произвольного центра O;

$\sum M_{Oi}^{\Phi}$ – сумма моментов сил инерции относительно того же центра.

Таким образом, условия динамического равновесия имеют вид

$$\vec{R}_{\Gamma}^E + \vec{R}_{\Gamma}^{\Phi} = 0; \qquad \vec{M}_{\Gamma O}^E + \vec{M}_{\Gamma O}^{\Phi} = 0. \qquad (4.34)$$

Главные вектор и момент внешних и даламберовых сил инерции равны нулю для любой механической системы.

Задача 7. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0{,}6t^2$ (рисунок 4.7). Определить натяжение каната, если радиус R = 0,4 м.

Решение

Согласно принципу Даламбера $\vec{F} + \vec{\Phi} + \vec{R} = 0$.

Спроецируем данное уравнение на ось x:

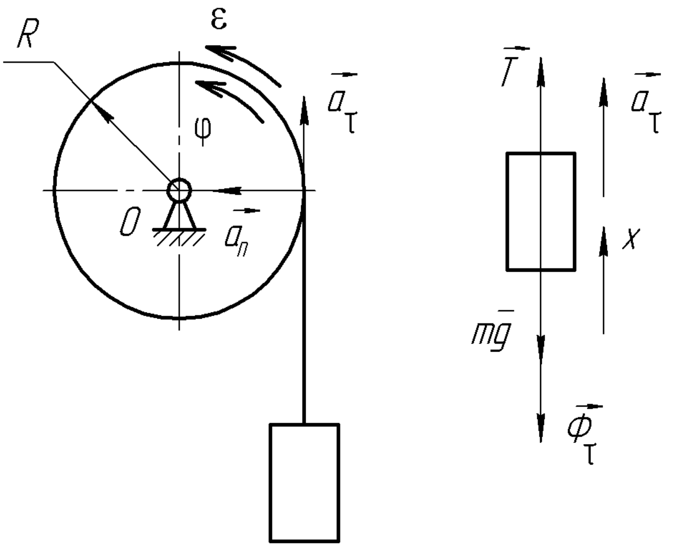
$$-m \cdot g - \Phi_{\tau} + T = 0 \Rightarrow T = m \cdot g + \Phi_{\tau}.$$

На тело действует только касательное ускорение, поэтому сила инерции груза

$$\Phi_{\tau} = m \cdot a_{\tau}.$$

В свою очередь,

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot r,$$



где ε – угловое ускорение барабана,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 1{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

Соответственно, имеем

$$a_\tau = 1{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}48 \text{ м/с}^2.$$

Тогда натяжение троса

$$T = m \cdot g + m \cdot a_\tau = m(g + a_\tau) =$$
$$= 60(9{,}81 + 0{,}48) = 617{,}4 \text{ Н}.$$

Рисунок 4.7

Ответ: $T = 617{,}4$ Н.

Решить задачи 17.1.13, 17.3.13, 17.3.25 из [5].

4.7 Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравновешиваются. Если $\vec{F}_i$ – равнодействующая всех активных сил, приложенных к i-й точке, а $\vec{R}_i$ – реакция связей этой точки, то $\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$ (рисунок 4.8).

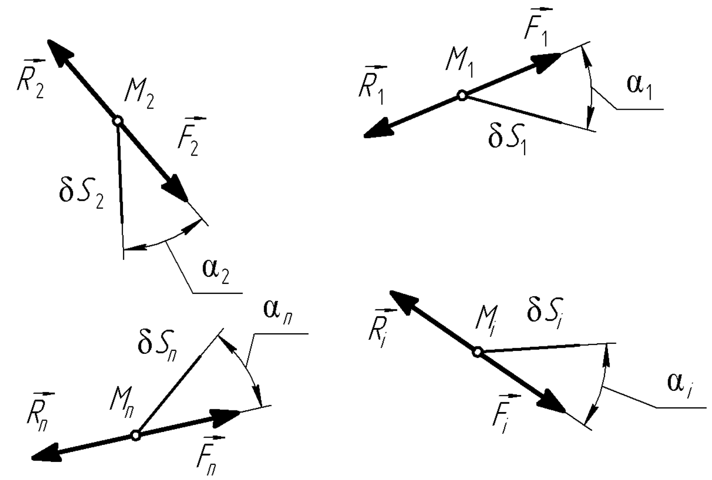


Рисунок 4.8

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения δS_1, δS_2, δS_3, …, δS_n. Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке, уравновешиваются и $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$, то сумма работ этих сил на перемещении δS_i будет равна нулю:

$$\vec{F}_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i - \vec{R}_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i = 0.$$

Значит, и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i = 0. \qquad (4.35)$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики.*

Принцип возможных перемещений. При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых, сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей: $\delta S_i = v_i \cdot \delta t$, где время δt – произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (4.35) запишется так: $\sum F_i \cdot v_i \cdot \delta t \cdot \cos\alpha_i = 0$, а поделив его на δt, получим

$$\sum F_i \cdot v_i \cdot \cos\alpha_i = 0, \qquad (4.36)$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Принцип возможных скоростей. Равенство (4.36) можно назвать принципом возможных скоростей (уравнением мощностей). Оно иногда бывает более удобным, т. к. используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Общее уравнение статики позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности, находить неизвестные реакции связей. В качестве достоинства отметим, что применение принципа возможных перемещений не требует рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) механической системы и позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции идеальных связей. Отметим также, что число расчетных уравнений равно числу степеней свободы системы.

Задача 8. Для заданной составной конструкции (рисунок 4.9, *а*) определить реактивный момент в заделке *A*, считая заданными интенсивность равномерно распределенной нагрузки q, угол α, длины стержней $AB = l$ и $BC = l_2$.

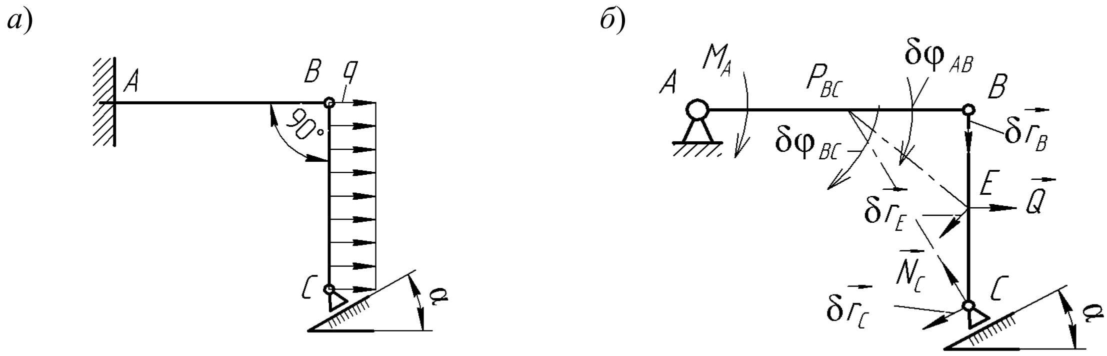


Рисунок 4.9

Решение

Для решения задачи используем принцип возможных перемещений.

Заменим заделку в точке A шарнирно неподвижной опорой, компенсировав отброшенную связь ее реакцией – реактивной парой сил с неизвестным моментом M_A (рисунок 4.9, *б*).

Распределенную нагрузку на участке BC заменим приложенной к точке E равнодействующей силой $Q = q \cdot l_2$. Расстояние $BE = EC = \dfrac{l_2}{2}$.

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержень AB на угол $\delta\varphi_{AB}$. Стержень BC совершит возможное плоскопараллельное перемещение, повернувшись на угол $\delta\varphi_{BC}$ вокруг точки P_{BC}. Точки B, C и E получат соответствующие возможные перемещения:

$$\left|\delta\vec{r}_B\right| = AB \cdot \delta\varphi_{AB} = l_1 \cdot \delta\varphi_{AB};$$

$$\left|\delta\vec{r}_E\right| = EP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = EP_{BC} \cdot \frac{\left|\delta\vec{r}_B\right|}{BP_{BC}} = \frac{EP_{BC}}{BP_{BC}} \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_{AB};$$

$$\left|\delta\vec{r}_C\right| = CP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = CP_{BC} \cdot \frac{\left|\delta\vec{r}_B\right|}{BP_{BC}} = \frac{CP_{BC}}{BP_{BC}} \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_{AB}.$$

Уравнение возможных работ имеет вид

$$M_A \cdot \delta\varphi_{AB} - (Q \cdot BE) \cdot \delta\varphi_{BC} = 0;$$

$$M_A = \frac{(Q \cdot BE) \cdot \delta\varphi_{BC}}{\delta\varphi_{AB}} = Q \cdot BE \cdot i.$$

Далее находим следующее:

$$i = \frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta S_B} \cdot \frac{\delta S_B}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta\varphi_{BC}}{BP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC}} \cdot \frac{AB \cdot \delta\varphi_{AB}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{AB}{BP_{BC}} = \frac{l_1}{l_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha}.$$

Окончательно получим

$$M_A = (Q \cdot BE) \cdot i = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \mathrm{ctg}\alpha.$$

Общее уравнение динамики. Идеальными называются связи, реакции которых не совершают работы. На практике чаще всего это связи, силами трения в которых пренебрегают.

Для идеальных связей

$$\sum \delta A_i^E = 0. \tag{4.37}$$

Для системы с идеальными связями, находящимися в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ внешних активных сил на любом возможном перемещении равнялась нулю.

Для системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum \delta A_i^E + \sum \delta A_i^\Phi = 0. \tag{4.38}$$

Для движущегося тела (системы) с идеальными связями сумма работ внешних активных сил и сил инерции на возможном перемещении равна нулю.

Задача 9. На клин *3* действует сила F = 100 Н. Определить, с какой силой толкатель *2* прижимает деталь *1* к опорной плоскости в положении равновесия, если угол $\alpha = 11°$ (рисунок 4.10).

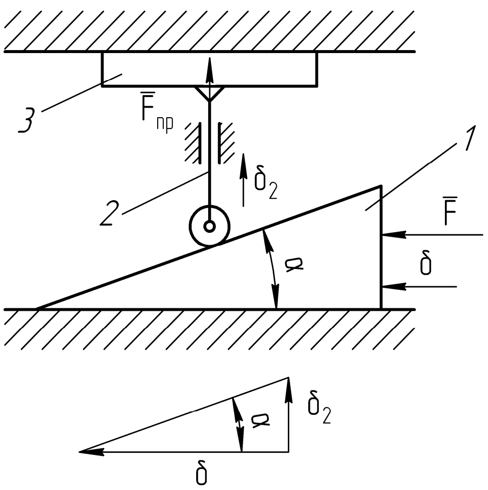


Рисунок 4.10

Решение

Предположим, что под действием силы F клин *3* переместится на расстояние δ. Тогда толкатель *2* сместится на расстояние δ_2.

Эти перемещения связаны между собой зависимостью

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\delta_2}{\delta} \Rightarrow \delta_2 = \mathrm{tg}\alpha \cdot \delta.$$

Запишем уравнение возможных работ уравновешенных сил, действующих на систему:

$$F \cdot \delta - F_{ПР} \cdot \delta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{ПР} = \frac{F \cdot \delta}{\delta_2} = \frac{F \cdot \delta}{\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \delta} = \frac{100}{\mathrm{tg} 11^{\circ}} = 514{,}45 \text{ Н.}$$

Ответ: $F_{ПР} = 514{,}45$ Н.

Решить задачи 18.2.4, 18.3.9, 18.3.23, 19.1.4, 19.1.8, 19.2.5, 19.3.7 из [5].

Список литературы

1 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: КУРС; ИНФРА-М, 2020. – 368 с.

2 **Чигарев, А. В.** Теоретическая механика. Решение задач: учеб. пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, И. С. Крук. – Минск: Минфин, 2016. – 478 с.

3 **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 46-е изд., стер. – М.: Лань, 2006. – 448 с.

4 **Кирсанов, М. Н.** Теоретическая механика. Сборник задач: учеб. пособие / М. Н. Кирсанов. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 430 с.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / Под ред. О. Э. Кепе. – 4-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2016. – 368 с.: ил.

6 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики: учебник / С. М. Тарг. – М.: Высш. шк., 1995. – 416 с.