9. Бондарев А. А. *Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью* // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 1. С. 24–42.

10. Сергеев И. Н. *Определение и свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 6. С. 858–859.

11. Сергеев И. Н. *О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем* // Тр. семинара имени И. Г. Петровского. 2023. Т. 33. С. 353–423.

12. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1576–1578.

О МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет, Мира 43, 212000 Могилёв, Беларусь,
alex-bondarev@tut.by

Рассматривается многоточечная краевая задача для уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где A, $B \in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}},\mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leqslant \infty$, M_i – вещественные постоянные матрицы. Предполагается, что функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde{\rho}}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида (см., например, [1–3]). Краевая задача (1), (2) является задачей типа [2] применительно к уравнению Ляпунова вида (1). Такие задачи играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–5].

Качественными методами эта задача исследовалась в [2]. С периодическими краевыми условиями она рассмотрена в [6] на основе конструктивного метода регуляризации [7]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [8, 9]. Задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [10, с. 21].

Обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i, \quad \gamma = \|M^{-1}\|, \quad m = \sum_{i=1}^{k} \|M_i\|, \quad \tilde{\alpha} = \int_0^{\omega} \|A(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{\beta} = \int_0^{\omega} \|B(\tau)\| d\tau,$$

$$\tilde{h} = \int_0^{\omega} \|F(\tau,0)\| d\tau, \quad \tilde{q} = \gamma m(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + L), \quad p = \gamma m \tilde{h},$$

где $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области $D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \|X\| \leqslant \rho\}$, $0 < \rho < \tilde{\rho}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\det M \neq 0, \tag{3}$$

$$\tilde{q} < 1, \tag{4}$$

$$\frac{p}{1-\tilde{q}} \leqslant \rho. \tag{5}$$

Тогда задача (1), (2) *однозначно разрешима в области* D_ρ, *при этом справедлива оценка*

$$\|X(t)\| \leqslant \frac{p}{1-\tilde{q}}.$$

Для доказательства, следуя [7], сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t) = M^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau. \quad (6)$$

Однозначная разрешимость уравнения (6) в шаре $\|X\|_C \leqslant \rho$ установлена с помощью принципа Каччопполи–Банаха сжимающих отображений (см., например, [11, с. 605]) с использованием условий (4) и (5).

Теорема 2. *При выполнении условий* (3)–(5) *решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности* $\{X_s(t)\}_0^\infty$, *определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2).

Для построения решения применительно к уравнению (6) используется классический метод последовательных приближений

$$X_{s+1}(t) = M^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X_s(\tau) + X_s(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_s(\tau))]d\tau, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad (7)$$

где $X_0(t)$ – произвольная непрерывная матрица-функция, принадлежащая шару $\|X\|_C \leqslant \rho$.

На основе (7) с использованием условия (4) получена оценка

$$\|X(t) - X_s(t)\|_C \leqslant \frac{\tilde{q}^{s+1}}{1-\tilde{q}}\|X_1 - X_0\|_C, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \quad (8)$$

В случае $X_0(t) \equiv 0$ оценка (8) примет вид

$$\|X(t) - X_s(t)\|_C \leqslant \frac{p\tilde{q}^{s+1}}{1-\tilde{q}}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

поскольку $\|X_1\|_C \leqslant p$.

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М.: Наука, 1975.

2. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journ. Mathem. Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

3. Параев Ю. И. *Уравнения Ляпунова и Риккати*. Томск: Томский госуниверситет, 1989.

4. Бойчук А. А. *Конструктивные методы анализа краевых задач*. Киев: Наукова думка, 1990.

5. Ешуков Л. Н. *Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13, Вып. 3 (81). С. 191–196.

6. Лаптинский В. Н. *О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

7. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

8. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

9. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 423–427.

10. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.

11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977.