

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования 'Белорусско-Российский университет',
проспект Мира, 43, 212000 Могилев, Беларусь,
imi.makzi@gmail.com

Исследуется краевая задача типа [1,2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \lambda XQ(t)X + F(t, X), \quad (1)$$

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \quad (2)$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n}$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что $Q(t) \neq 0$, матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t, 0) \neq 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В случае $Q(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5 и др.]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n \times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением, обобщением и развитием [1, 2, 7]. Задача (1), (2) рассматривается в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [8, с.21],

Введем следующие обозначения:

$$D_{\rho} = \{(t, X) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho\}, M = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau, N = - \int_0^{\omega} B(\tau) d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \alpha = \max_t \|A(t)\|, \beta = \max_t \|B(t)\|, \delta = \max_t \|Q(t)\|, h = \max_t \|F(t, 0)\|, \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q(\rho, \varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \varphi(\rho, \varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega[(\alpha + \beta)\omega + 2]\rho, q_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha + \beta)^2 + \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega],$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega]\rho^2, \varphi_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha + \beta)^2\rho + [1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega](L\rho + h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)}, \varepsilon_2 = \frac{1 - q_2(\rho)}{q_1(\rho)}, \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_{ρ} , Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_{ρ} существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho, \varepsilon)$.

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t, \lambda) = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau \int_{\tau}^t [A(\sigma)X_k(\sigma, \lambda) + X_k(\sigma, \lambda)B(\sigma) + \lambda X_{k-1}(\sigma, \lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma, \lambda) + \right. \\ & + F(\sigma, X_{k-1}(\sigma, \lambda))] d\sigma + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t [A(\sigma)X_k(\sigma, \lambda) + X_k(\sigma, \lambda)B(\sigma) + \right. \\ & \left. + \lambda X_{k-1}(\sigma, \lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma, \lambda) + F(\sigma, X_{k-1}(\sigma, \lambda))] d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \end{aligned}$$

$$- \int_0^{\omega} [\lambda X_k(\tau, \lambda) Q(\tau) X_k(\tau, \lambda) + F(\tau, X_k(\tau, \lambda))] d\tau \}, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\Phi^{-1} \int_0^{\omega} F(\tau, 0) d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q\|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + q_2\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками:

$$\begin{aligned} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} &\leq \gamma\omega h; \\ \|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} &\leq \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)\omega^2[(\alpha + \beta)\rho + h] + \gamma\omega(\varepsilon\delta\rho^2 + L\rho), \end{aligned}$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Замечание. В [7] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен для реализации тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая О. А. Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43-50.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 937-946.
3. Лаптинский В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300с.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: БРУ, 2012. 167 с.
5. Лаптинский В. Н. О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems—existence and uniqueness // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. Vol. 167, Is. 2. P. 505-515.
7. Маковецкая О. А. К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения - 2019”, Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.
8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967. 472 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования ‘Белорусско-Российский университет’,
проспект Мира, 43, 212000 Могилев, Беларусь,
imi.makzi@gmail.com

Рассматривается краевая задача для матричного уравнения типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X) \quad (1)$$

с интегральным условием

$$\int_0^{\omega} [\Phi_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)\Phi_2(\tau)] d\tau = 0, \quad (2)$$