

$$- \int_0^{\omega} [\lambda X_k(\tau, \lambda) Q(\tau) X_k(\tau, \lambda) + F(\tau, X_k(\tau, \lambda))] d\tau \}, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\Phi^{-1} \int_0^{\omega} F(\tau, 0) d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q\|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + q_2\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками:

$$\begin{aligned} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} &\leq \gamma\omega h; \\ \|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} &\leq \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)\omega^2[(\alpha + \beta)\rho + h] + \gamma\omega(\varepsilon\delta\rho^2 + L\rho), \end{aligned}$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Замечание. В [7] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен для реализации тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая О. А. Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43-50.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 937-946.
3. Лаптинский В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300с.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: БРУ, 2012. 167 с.
5. Лаптинский В. Н. О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems—existence and uniqueness // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. Vol. 167, Is. 2. P. 505-515.
7. Маковецкая О. А. К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения - 2019”, Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.
8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967. 472 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования ‘Белорусско-Российский университет’,
проспект Мира, 43, 212000 Могилев, Беларусь,
imi.makzi@gmail.com

Рассматривается краевая задача для матричного уравнения типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X) \quad (1)$$

с интегральным условием

$$\int_0^{\omega} [\Phi_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)\Phi_2(\tau)] d\tau = 0, \quad (2)$$

где $A, B, \Phi_1, \Phi_2 \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$; предполагается, что функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde{\rho}}$ условию Липшица (локально); $F(t, 0) \not\equiv 0$, $\omega > 0$.

Исследуются вопросы существования, единственности и построения решения этой задачи в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$. Здесь $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$D_{\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \beta = \max_{t \in I} \|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t \in I} \|F(t, 0)\|, \delta_i = \max_{t \in I} \|\Phi_i(t)\| (i = 1, 2), b = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq \omega} \|U^{-1}(\tau)U(t)\|,$$

$$q = \frac{1}{2}\gamma(\delta_1 + \delta_2)(\beta + L)b^2\omega^2, p = \frac{1}{2}\gamma(\delta_1 + \delta_2)b^2\omega^2h,$$

$$\tilde{\Phi}Z = (\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2)Z, Z \in \mathbb{Z}^{n \times n},$$

$L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_{ρ} , $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $\tilde{\Phi}_1 Z = \int_0^{\omega} \Phi_1(\tau)U(\tau)d\tau Z(t)$, $\tilde{\Phi}_2 Z = \int_0^{\omega} U(\tau)Z(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau$; $U(t)$, $U(0) = E$, – интегральная матрица уравнения $dU/dt = A(t)U$; E – единичная матрица.

С помощью метода регуляризации [3] в случае однозначной обратимости оператора $\tilde{\Phi}$ задача (1), (2) сведена к эквивалентному матричному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} X(t) = U(t)\tilde{\Phi}^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} \Phi_1(\tau)U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma)(X(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma)))d\sigma \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\omega} U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma)(X(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma)))d\sigma \right) \Phi_2(\tau)d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: оператор $\tilde{\Phi}$ однозначно обратим, $q < 1$, $p/(1 - q) \leq \rho$. Тогда в области D_{ρ} решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{p}{1 - q}.$$

Это решение представимо как предел равномерно по $t \in I$ сходящейся к решению уравнения (3) последовательности матричных функций $\{X_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = U(t)\tilde{\Phi}^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} \Phi_1(\tau)U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma)(X_k(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma)))d\sigma \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\omega} U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma)(X_k(\sigma)B(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma)))d\sigma \right) \Phi_2(\tau)d\tau \right\}, k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где $X_0(t) \in D_{\rho}$ – произвольная функция класса $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (4).

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — existence and uniqueness* // J. Math. Anal. Appl. 1992. Vol. 167, No 2. P. 505–515.
2. Murty K. N., Howell G. W., Sarma G. V. R. L. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an n th order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness* // Mathematical Problems in Engineering. 2000. Vol. 6. Art. 805903.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1998.