

Литература

1. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.
2. Сергеев И. Н. *Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем* // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.
3. Хаусдорф Ф. *Теория множеств*. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

Д.В. Роголев

Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь
d-rogolev@tut.by

Изучается краевая задача типа

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)XC_1(t) + D_1(t)XK_1(t) + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t) = G_1(t, X, Y), \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = A_2(t)YC_2(t) + D_2(t)YK_2(t) + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t) = G_2(t, X, Y), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (3)$$

$$Y(0) = Y(\omega), \quad (4)$$

где $t \in [0, \omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, матрицы $A_i(t), B_i(t), C_i(t), D_i(t), K_i(t), S_i(t), P_i(t), F_i(t)$ ($i = 1, 2$) определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$; $\omega > 0$.

Система уравнений (1), (2) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида. В частности, к таким уравнениям относятся матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–4]. Указанная система впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [1, 2]). Задача типа (1)–(4) рассмотрена в [1, 4].

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [5, 6], с помощью метода [4, гл. 3] получены коэффициентные, то есть явно в терминах задачи (1)–(4), достаточные условия её однозначной разрешимости на компакте и дан удобный для применений алгоритм построения решения. В работах [5, 6] рассмотрен случай, когда линейные части в (1), (2) имеют соответственно вид $A_1(t)X + XB_1(t)$, $A_2(t)Y + YB_2(t)$, при этом в [6] использована правосторонняя регуляризация. Исследования выполнены в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций $T(t)$ с нормой $\|T\|_C = \max_t \|T(t)\|$.

Обозначения:

$$\begin{aligned} D &= \{(t, X, Y) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2\}, \tilde{A}_i(\omega) = \int_0^\omega A_i(\tau) d\tau, \gamma_i = \|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\|, \\ \alpha_i &= \max_t \|A_i(t)\|, \beta_i = \max_t \|B_i(t)\|, c_i = \max_t \|C_i(t)\|, d_i = \max_t \|D_i(t)\|, k_i = \max_t \|K_i(t)\|, \\ \delta_i &= \max_t \|S_i(t)\|, \mu_i = \max_t \|P_i(t)\|, h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \\ q_{11} &= \gamma_1 [0, 5\alpha_1 (\alpha_1 c_1 + d_1 k_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega^2 + (d_1 k_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega], \\ q_{12} &= \gamma_1 \delta_2 \rho_1 \omega (0, 5\alpha_1 \omega + 1), q_{21} = \gamma_2 \mu_1 \rho_2 \omega (0, 5\alpha_2 \omega + 1), \\ q_{22} &= \gamma_2 [0, 5\alpha_2 (\alpha_2 c_2 + d_2 k_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega^2 + (d_2 k_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega], \end{aligned}$$

где $t \in [0, \omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения алгебры $\mathfrak{B}(n)$, например, любая из норм I, II, приведённых в [7, с. 21].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [2].

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\det \tilde{A}_i \neq 0$ ($i = 1, 2$),

$$2) \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 [(\alpha_1 c_1 + d_1 k_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] \omega^2 + \right. \\ \left. + [(d_1 k_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] \omega \right\} \leq \rho_1,$$

$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 [(\alpha_2 c_2 + d_2 k_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] \omega^2 + \right. \\ \left. + [(d_2 k_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] \omega \right\} \leq \rho_2,$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - Q) > 0$, где $E = \text{diag}(1, 1)$, $Q = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D .

При доказательстве теоремы задача (1)–(4) с помощью тождества-регуляризатора

$$\int_0^\omega A(\tau) Z(\tau) d\tau = \int_0^\omega A(\tau) d\tau Z(t) - \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dZ(\tau) + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dZ(\tau)$$

сведена к эквивалентной интегральной задаче, к которой применён обобщённый принцип Кач-чопполи – Банаха сжимающих отображений.

Для построения решения интегральной задачи предложен алгоритм

$$X_{k+1}(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_1(\sigma) d\sigma \right) [A_1(\tau) X_k(\tau) C_1(\tau) + D_1(\tau) X_{k-1}(\tau) K_1(\tau) + X_{k-1}(\tau) B_1(\tau) + \right. \\ \left. + X_{k-1}(\tau) (S_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma) d\sigma \right) [A_1(\tau) X_k(\tau) C_1(\tau) + D_1(\tau) X_{k-1}(\tau) K_1(\tau) + X_{k-1}(\tau) B_1(\tau) + \right. \\ \left. + X_{k-1}(\tau) (S_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^\omega [D_1(\tau) X_k(\tau) K_1(\tau) + X_k(\tau) B_1(\tau) + X_k(\tau) (S_1(\tau) X_k(\tau) + S_2(\tau) Y_k(\tau)) + F_1(\tau)] d\tau \right\}, \quad (5)$$

$$Y_{k+1}(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_2(\sigma) d\sigma \right) [A_2(\tau) Y_k(\tau) C_2(\tau) + D_2(\tau) Y_{k-1}(\tau) K_2(\tau) + Y_{k-1}(\tau) B_2(\tau) + \right. \\ \left. + Y_{k-1}(\tau) (P_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_2(\tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \right) [A_2(\tau) Y_k(\tau) C_2(\tau) + D_2(\tau) Y_{k-1}(\tau) K_2(\tau) + Y_{k-1}(\tau) B_2(\tau) + \right. \\ \left. + Y_{k-1}(\tau) (P_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_2(\tau)] d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^\omega [D_2(\tau) Y_k(\tau) K_2(\tau) + Y_k(\tau) B_2(\tau) + Y_k(\tau) (P_1(\tau) X_k(\tau) + P_2(\tau) Y_k(\tau)) + F_2(\tau)] d\tau \right\}, \quad (6)$$

$k = 1, 2, \dots$,

$$X_0 = 0, Y_0 = 0; X_1 = -\tilde{A}_1^{-1}(\omega) \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau, Y_1 = -\tilde{A}_2^{-1}(\omega) \int_0^\omega F_2(\tau) d\tau.$$

Установлено, что последовательность $\{X_k(t), Y_k(t)\}_0^\infty$, построенная с помощью алгоритма (5), (6), при выполнении условий теоремы сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению полученной интегральной задачи. При этом получена оценка типа [5], характеризующая скорость сходимости алгоритма (5), (6).

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. М.: Наука, 1975. 496 с.
2. Lucas J. *Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games* // Applied Mathematics Letters. 1990. Vol. 3, No 4. P. 9–12.
3. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journ. Mathem. Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300 с.
5. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивный метод анализа периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 39(1). С. 138–147.
6. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* / В.Н. Лаптинский, // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1412–1420.
7. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М. : Наука, 1967. 472 с.

ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

А.Е. Руденок

Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, roudenok@bsu.by

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y(1 - dx - Dx^2), \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3x(B + Lx)y + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3, \quad (5)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x, y, t \in \mathbb{R}$, $d, D, A, B, K, L, M, N, U$ — действительные параметры. Если $d = D = 0$, то (1) — классическая система Куллеса [1], обозначим ее КСК. Любые монодромные системы, которые содержат КСК как частный случай, называют обобщенными системами Куллеса (ОСК).

Решению проблемы различения центра и фокуса КСК посвящено множество работ, см., например, библиографию в [2, 3]. В то же время, КСК оказалась простой для решения задачи об изохронности центра. Только одна система $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x + 3xy + x^3$ (с точностью до преобразования подобия) имеет изохронный центр [4]. Что касается ОСК, то работ по проблеме изохронности центра практически нет, кроме случаев обратимых систем [5].

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка $O(0,0)$, будучи центром или фокусом системы (1), была изохронной относительно луча $\varphi = \varphi_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовало формальное преобразование*

$$\omega = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} r^i v_i(\varphi), \quad v_i(\varphi + 2\pi) = v_i(\varphi), \quad v_i(\varphi_0) = 0, \quad \forall i \in N,$$

такое, что производная $d\omega/dt$ в силу системы равна 1.

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до преобразования подобия она сводилась к одной из систем*

- 1) $\dot{x} = -y(1 + dx - Dx^2)$, $\dot{y} = x(1 + Dy^2) - dy^2$;
- 2) $\dot{x} = -y(1 - x(d + Dx))$, $\dot{y} = x(1 + Dy^2) - \frac{1}{2}d(x^2 - y^2)$;
- 3) $\dot{x} = -y(1 - 9dx(1 - 2dx))$, $\dot{y} = x(1 + 9d^2y^2)$;
- 4) $\dot{x} = -y(1 - dx(1 + 3dx))$, $\dot{y} = x(1 + 6d^2y^2) + d(x^2 - y^2)$;
- 5) $\dot{x} = -y(1 - dx)$, $\dot{y} = x(-1 + dx)^2 + 2dy^2$;
- 6) $\dot{x} = -y(1 - 11dx(1 + 12dx))$, $\dot{y} = x + 11d(x^2(1 + 3dx) + (-1 + 36dx)y^2)$;
- 7) $\dot{x} = -y(1 - Dx^2)y$, $\dot{y} = x - \frac{1}{3}Dx(2x^2 - 9y^2)$;
- 8) $\dot{x} = -y(1 - (dx + (d + U)(3d + 2U)x^2))$,
 $\dot{y} = x(1 + (d + U)(x + 2(3d + 2U)y^2)) - (d + 2U)y^2$;