

УДК 004.421.2:06:519.67

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Компьютерное моделирование в образовательном процессе становится важным инструментом, который помогает улучшить качество образования и повысить интерес студентов к изучаемым дисциплинам. Его рассматривают и как метод научного познания, и как самостоятельный вид деятельности. Компьютерное моделирование – это процесс создания компьютерных моделей для анализа и прогнозирования поведения различных процессов и явлений в разных областях знаний – физика, химия, биология, математика, инженерные науки. В компьютерное моделирование входят: построение математической модели с учетом оговоренных допущений и рамок ее применимости; разработка аналитических и

численных алгоритмов решения сформулированной математической задачи; создание компьютерной программы; проведение вычислительного эксперимента; обработка результатов расчетов и формулировка выводов [1]. Применение систем компьютерной математики существенно облегчает и расширяет возможности проведения аналитических и численных вычислений, визуализацию и хранение данных на всех этапах компьютерного моделирования. Визуализация промежуточных результатов и решения задачи облегчает студенту понимание сути исследуемых процессов и явлений, изменения решения в зависимости от значений используемых параметров или переменных [2, 3].

Задача. Пусть в пространстве R^3 находится бесконечно длинный токопроводящий эллиптический цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz . На цилиндр направлено однородное электростатическое поле напряженности $\vec{E}$ в отрицательном направлении оси Ox . На поверхности цилиндра S поддерживается заданный потенциал V . Определить напряженность и потенциал электростатического поля вне цилиндра для разных значений геометрических величин. Физические величины измеряются в системе СИ.

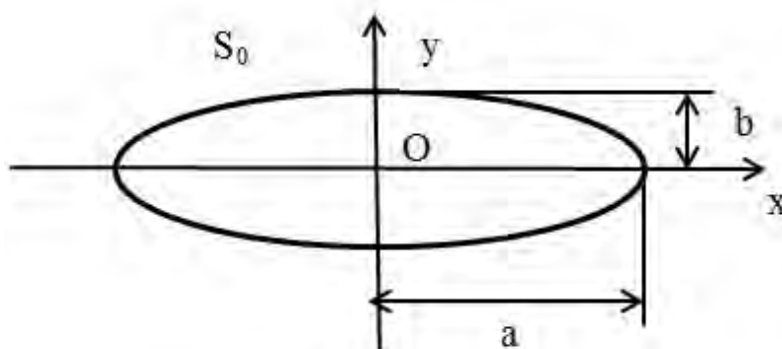


Рис. 1. Геометрия задачи

Постановка задачи (плоскопараллельная задача). Напряженность внешнего электростатического поля задается формулой $\vec{E} = -E\vec{i}$, где $\vec{i}$ – единичный вектор вдоль оси Ox . Потенциал внешнего электростатического поля U_0 связан с напряжённостью поля $\vec{E} = -E\vec{i}$ соотношением [4]

$$\vec{E} = -\text{grad } U_0, \quad -E\vec{i} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} U_0 \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} U_0 \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} U_0 \vec{k} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} U_0 = E, \quad \frac{\partial}{\partial y} U_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} U_0 = 0, \quad U_0(x) = Ex.$$

Для решения задачи в точке O (см. рис. 1) введем декартовы $\{x, y\}$ и эллиптические $\{\mu, \phi\}$ координаты, связанные соотношением [5]

$$x = c \operatorname{sch} \mu \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \mu \sin \varphi, \quad 0 \leq \mu < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

где a, b – большая и малая полуоси эллипса.

Сечение поверхности цилиндра S плоскостью Oxy описывается следующим образом:

$$S_0 = \{ \mu = \mu_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}, \quad \operatorname{ch} \mu_0 = a / c.$$

Требуется найти потенциал вторичного электростатического поля U_1 , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \varphi)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} U_1 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} U_1 \right) = 0, \quad (1)$$

граничному условию на поверхности цилиндра S и условию на бесконечности

$$U_0(\mu_0, \varphi) + U_1(\mu_0, \varphi) = V(\varphi); \quad (2)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} U_1(\mu, \varphi) = 0. \quad (3)$$

Аналитическое решение задачи. Используя метод разделения переменных и учитывая условие на бесконечности (3), потенциал вторичного поля U_1 представим в следующем виде:

$$U_1(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \exp(-n\mu), \quad \mu \geq \mu_0.$$

Выполним граничное условие (2), учитывая представления потенциалов U_0, U_1 . Получим

$$E c \operatorname{sch} \mu_0 \cos \varphi + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \exp(-n\mu_0) = V(\varphi). \quad (4)$$

Умножим обе части соотношения (4) на $\cos(m\varphi), \sin(m\varphi), m = 0, 1, 2, \dots$, и проинтегрируем по переменной φ от 0 до 2π . Получим

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi) d\varphi, \quad a_1 = \frac{\exp(\mu_0)}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \cos \varphi d\varphi - E c \operatorname{sch} \mu_0,$$

$$a_k = \frac{\exp(k\mu_0)}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad b_k = \frac{\exp(k\mu_0)}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad k = 2, 3, \dots$$

Вектор напряженности вторичного поля вычислим по формуле

$$\bar{E}_1 = -\text{grad } U_1, \quad \bar{E}_1 = -\frac{1}{c\sqrt{\text{sh}^2\mu + \sin^2\varphi}} \left(\frac{\partial}{\partial\mu} U_1 \bar{e}_\mu + \frac{\partial}{\partial\varphi} U_1 \bar{e}_\varphi \right).$$

С помощью системы Mathcad [2] вычислим потенциал вторичного поля $U_1(\mu, \varphi)$, $\mu > \mu_0$, и построим графики.

На рис. 2 слева приведены графики потенциала $U_1(\mu, \varphi)$ для некоторых значений $\mu > \mu_0$ при $b/a = 0,5$, $a/c = 1,155$, $m_0 = 0,549$; справа – при $b/a = 0,25$, $\frac{a}{c} = 1,033$, $m_0 = 0,255$, $E = 1$. Потенциал на поверхности цилиндра – $V(\varphi) = 1$, $\varphi \in \Omega$, $\Omega = (0, \pi/4) \cup (\pi/2, 3\pi/4) \cup (\pi, 5\pi/4) \cup (3\pi/2, 7\pi/4)$.

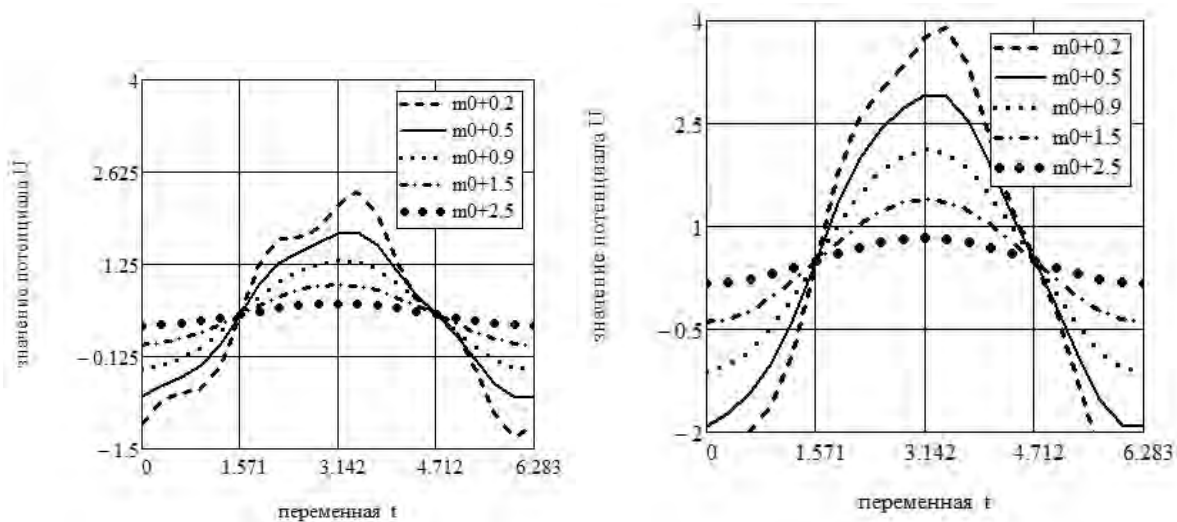


Рис. 2. Графики вторичного потенциала $U_1(\mu, \varphi)$, $\mu > \mu_0$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, С. В.** Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.
2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учеб. пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
3. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерное моделирование физических процессов с использованием системы Mathematica / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф. – М.: Научный консультант, 2018. – С. 525–530.
4. **Шушкевич, Г. Ч.** Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
5. **Ерофеев, В. Т.** Теоремы сложения / В. Т. Ерофеев. – Минск: Наука и техника, 1989. – 255 с.