УДК 378.147:51

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОИСКА ИДЕИ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

«Идея – это особая психологическая структура, с помощью которой мы организуем, понимаем и придаем значение внешней информации и впечатлениям».

Мэтью Фредерик, архитектор

Некоторые сведения, необходимые для понимания дальнейшего.

Настоящая статья является продолжением исследований из [1–3]. *Идеей* мы будем называть мыслеформу (т. е. оформившуюся, сформировавшуюся мысль), возникшую в результате изучения условия задачи. Она должна содержать указание (план) возможной дальнейшей деятельности, т. е. предположительно отвечать на вопрос «Что делать?». Характерная особенность феномена под названием «идея» заключается в том, что идея – это нечто новое в данной конкретной ситуации.

Пусть информационное поле (для нас – это математика) содержит некоторый элемент с неполной информацией. Назовем этот элемент *задачей*, если требуется восстановить отсутствующую информацию [1, с. 4]. *Информационной базой задачи* (*ИБЗ*) будем называть ту часть информационного поля, которая необходима для решения данной задачи.

Относительно конкретной задачи используемые идеи можно классифицировать так (рис. 1).

Рис. 1

Примечание – По поводу того, что первично, т. е. было раньше на уровне идеи «Ситуация или Операция», см. оргцикл [1, с. 66–67].

Демонстрация конкретных способов поиска идеи на примерах задач.

Задача 1. В ΔABC проведены медиана AM, биссектриса AD и высота AH. Доказать, что т. D лежит между т. M и т. H, если стороны AB и AC не равны.

Решение

Пусть $AB > AC$.

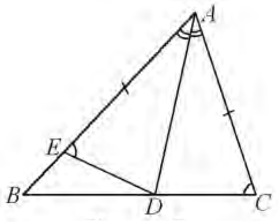

Рис. 2

Этап 1. В ΔABC проведем биссектрису $\angle A$ до пересечения с основанием BC в т. D и на стороне AB отложим отрезок AE, равный AC (рис. 2). Тогда имеем $\Delta ADE = \Delta ADC$. Следовательно, $\angle AED = \angle ACD = \angle C$. Очевидно, $\angle B + \angle BDE = \angle C \Rightarrow \angle BDE = \angle C - \angle B$.

Этап 2. В условиях этапа 1 покажем, что $\angle ADB > \angle ADC$. Действительно, $\angle ADB = \angle ADE + \angle BDE = \angle ADC + \angle BDE = \angle ADC + (\angle C - \angle B)$. Значит, $\angle ADB > \angle ADC$.

Следствие 1. Покажем, что $BD > DC$. Действительно, $\angle BED + \angle AED = 180^\circ$ (смежные углы). $\angle AED = \angle C$. Значит, $\angle BED = 180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$. Следовательно, $\angle BED > \angle B$. Но против большего угла в треугольнике лежит большая сторона. Поэтому $BD > DE = DC$.

Замечание. Последнее утверждение можно получить значительно проще, если воспользоваться известным свойством биссектрисы:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} > 1 \Rightarrow BD > DC .$$

Но это доказательство основано на отношении подобия треугольников, а предыдущее использует лишь простейший инструментарий.

Этап 3. Согласно этапу 2 имеем $BD > DC \Rightarrow BD + BD > BD + DC \Rightarrow 2BD > BC \Rightarrow BD > BC/2$. Значит, т. D лежит дальше от т. B, чем т. M, которая является основанием медианы. Согласно этапу 2 $\angle ADB > \angle ADC \Rightarrow \angle ADB + \angle ADB > \angle ADC + \angle ADB = 180^\circ \Rightarrow \angle ADB > 90^\circ$, т. е. $\angle ADB$ – тупой и, следовательно, т. D ближе к т. B, чем т. H, которая является основанием высоты (в противном случае тупой угол оказался бы внутренним углом прямоугольного треугольника). Ч. т. д.

Следствие 2. В условиях задачи 1 биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Замечание. Приведенное доказательство следствия 1 основано на внутренней операции-идее, а именно: создание нового объекта ΔADE. Приведем более простое доказательство, основанное на внешней операции-идее, а именно: построение связной пары «треугольник – описанная окружность» (рис. 3).

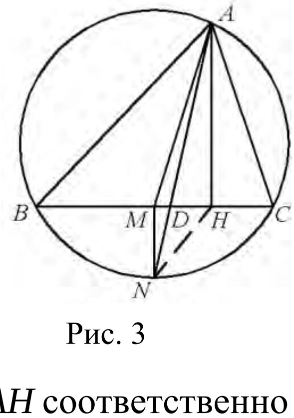

Рис. 3

Для этого опишем около ΔABC окружность и пусть AM, AD и AH соответственно медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины A. Далее, пусть N – точка пересечения биссектрисы с окружностью. Поскольку $\angle BAN = \angle CAN$, то дуги BN и CN равны. Соединим т. N и т. M отрезком прямой. Прямая NM делит как дугу BC, так и стягивающую ее хорду пополам. Следовательно, $NM \perp BC$.

Проекции M и H концов отрезка AN на прямую BC будут находиться по разные стороны от т. D, ибо т. D есть ни что иное, как точка пересечения диагоналей трапеции $AMNH$.

Задача 2. Определить углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части.

Решение

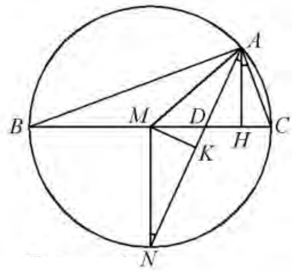

Рис. 4

Сохраняя обозначения рис. 3, докажем, что M – центр окружности, описанной около ΔABC (рис. 4). Рассмотрим ΔAMN. По ранее доказанному $NM \perp BC$, но и $AH \perp BC$. Следовательно, $NM \parallel AH \Rightarrow \angle MNA = \angle NAH$. По условию $\angle MAN = \angle NAH \Rightarrow \angle MNA = \angle MAN$. Значит, ΔAMN – равнобедренный. Проведем в ΔAMN высоту MK. Очевидно, что она будет срединным перпендикуляром к хорде AN. Учитывая теперь, что MN – срединный перпендикуляр к хорде BC, заключаем, что т. M – центр окружности, описанной около четырехугольника $ABNC$, а значит, и около ΔABC. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle BAM = 90^\circ/4 = 22{,}5^\circ$, $\angle ACB = 67{,}5^\circ$.

Замечание. В решении задачи 2 используются две ситуации-идеи: треугольник-описанная окружность (внешняя идея) и равнобедренный ΔAMN (внутренняя идея).

Заключительные замечания.

1. Существует множество попыток ответить на вопрос «Что такое идея?». В дополнение к нашему собственному определению скажем, что идея – это гипотеза (предположение), содержащая указание (план), что делать, чтобы решить данную задачу.

2. По-видимому, поиск идеи всегда предшествует началу деятельности, т. е. сначала идея, затем ее реализация (осуществление).

3. Подтверждением правильности разбиения множества идей на два класса: операции и ситуации могут служить следующие соображения. В [1, с. 52] приведена следующая иерархия видов деятельности (рис. 5).

Рис. 5

Теперь предположим, что на рис. 1 термин «операция» заменен на термин «метод» (рис. 6). Уверен, что в таком виде ни в ком не возникнут сомнения, что это разные подходы к решению проблемы.

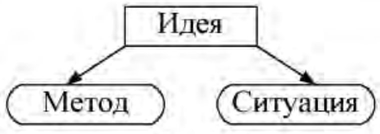

Рис. 6

4. В [4, с. 15] приведена концепция «веера возможностей», т. е. веера возможных дальнейших шагов в конкретном узле процесса конструирования решения (см. также [1, с. 35]). Очевидно, веер возможностей и есть источник наших идей.

5. При решении задач 1 и 2 мы использовали вспомогательную окружность. Аналогичный прием используется при выводе формулы, выражающей биссектрису треугольника через его стороны [1, с. 48–51].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: новый взгляд на старые истины: брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

2. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач как идеология принятия решений в условиях структурно-информационной неопределенности в математике / Л. Л. Великович // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2024. – С. 20–24.

3. **Великович, Л. Л.** Некоторые новые категории и результаты теории решения задач / Л. Л. Великович // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 18 апр. 2024 г. – Гомель: БелГУТ, 2024. – С. 76–80.

4. **Великович, Л. Л.** Подготовка к экзаменам по математике: учеб. пособие для абитуриентов и учащихся 9–11 кл.: в 2 ч. / Л. Л. Великович. – М.: Народное образование, 2006. – Ч. 1. – 610 с.