

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Методические рекомендации к самостоятельной работе  
для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство  
зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление  
недвижимостью» заочной формы обучения*



Могилев 2025

УДК 539.3/6  
ББК 30.121  
С86

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «27» декабря 2024 г.,  
протокол № 8

Составители: канд. техн. наук, доц. И. М. Кузменко;  
ст. преподаватель В. А. Кемова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. С. Федосенко

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» заочной формы обучения предназначены для выполнения аудиторной контрольной работы.

Учебное издание

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2025

## Содержание

Введение.....	4
1 Расчет трехшарнирных арок и рам.....	5
2 Метод перемещений и его применение к расчету плоских рам.....	14
Список литературы.....	25
Приложение А.....	26

## Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по курсу «Строительная механика» для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» заочной формы обучения.

В краткой форме изложены основные теоретические положения по выполнению типовых задач, приведены примеры решения, таблицы типовых эпюр для расчета статически неопределимых рам методом перемещений, а также список литературы, которую рекомендуется изучить студенту перед началом выполнения контрольных работ.

Цель изучения дисциплины – научить студентов проводить расчеты типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость, устойчивость; правильно выбирать конструкционные материалы и форму сечений конструкций, обеспечивающие требуемые запасы надежности, безопасность их эксплуатации и экономичность сооружений.

Задача курса – дать студентам навыки по применению методов строительной механики при изучении курсов строительной механики, оснований и фундаментов, механики грунтов, металлических и железобетонных конструкций.

Методические рекомендации разработаны в соответствии с Положением об аудиторной контрольной работе и компьютерном тестировании обучающихся по заочной (дистанционной) форме.

Аудиторная контрольная работа (далее – АКР) является формой промежуточного контроля результатов межсессионной самостоятельной работы обучающихся заочной (в том числе дистанционной) формы обучения, по дисциплинам учебного плана специальности, одним из элементов системы контроля качества обучения.

АКР организуется и проводится в период лабораторно-экзаменационной сессии в соответствии с расписанием – после проведения лекционных и практических занятий по дисциплине «Строительная механика».

Студенты строительных специальностей выполняют две аудиторные контрольные работы в письменной форме: в первом семестре – «Расчет трехшарнирных арок и рам», во втором – «Метод перемещений и его применение к расчету плоских рам».

Общая продолжительность АКР для учебной группы составляет два академических часа. АКР проводится в соответствии с расписанием.

К выполнению АКР допускаются обучающиеся по заочной (в том числе дистанционной) форме, имеющие при себе зачетную книжку, удостоверение личности (паспорт либо вид на жительство, удостоверение беженца).

## 1 Расчет трехшарнирных арок и рам

К *рамам* относятся стержневые системы, состоящие как минимум из двух прямолинейных стержней, соединенных между собой в узлах. Принято считать, что в процессе нагружения системы и в процессе деформации ее элементов первоначально заданные углы между стержнями остаются постоянными.

Трехшарнирная система образуется двумя дисками, соединенными друг с другом шарниром и с землей – двумя шарнирами. В трехшарнирных арках диски представляют собой криволинейные стержни (рисунок 1.1, а); в трехшарнирных рамах – ломаные прямолинейные стержни (рисунок 1.1, б).

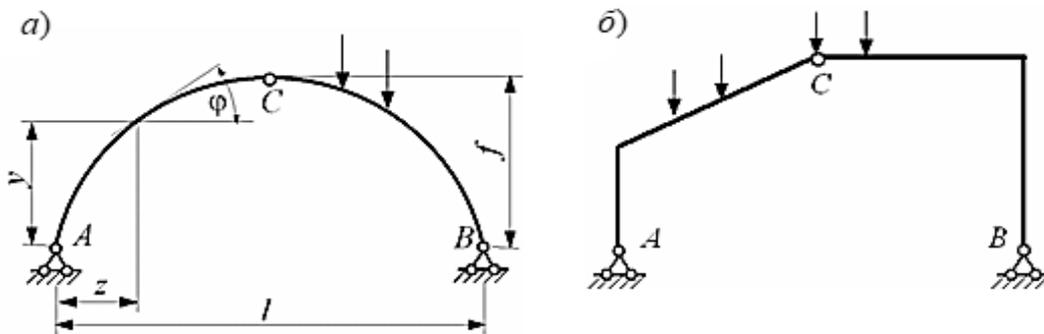


Рисунок 1.1 – Трехшарнирные системы

Трехшарнирные арки и рамы относятся к статически определимым *распорным системам*, т. к. от действия вертикальных нагрузок в них возникают *распоры* – горизонтальные опорные реакции  $H_A$  и  $H_B$ . Эти системы могут иметь опорные шарниры на одном или на разных уровнях.

Для определения вертикальных реакций в системах с опорными шарнирами на одном уровне составляют два уравнения статического равновесия моментов относительно опорных шарниров  $A$  и  $B$ :

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

Для определения горизонтальных реакций составляют два уравнения статического равновесия моментов слева и справа относительно соединительного шарнира  $C$ :

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad \sum M_C^{прав} = 0.$$

Проверкой правильности определения реакций служат уравнения равновесия сил

$$\sum x = 0; \quad \sum y = 0.$$

В рамах действуют все три внутренних силовых фактора: изгибающий момент  $M$ , поперечная  $Q$  и продольная  $N$  силы. Границами участков являются сечения, в которых приложены нагрузки, а также узлы рамы.

Вначале строят эпюру изгибающих моментов  $M$  на *растянутых волокнах*, без указания знаков. При необходимости принимается стандартное правило знаков: если растянуты нижние волокна – момент считается положительным (рисунок 1.2, а).

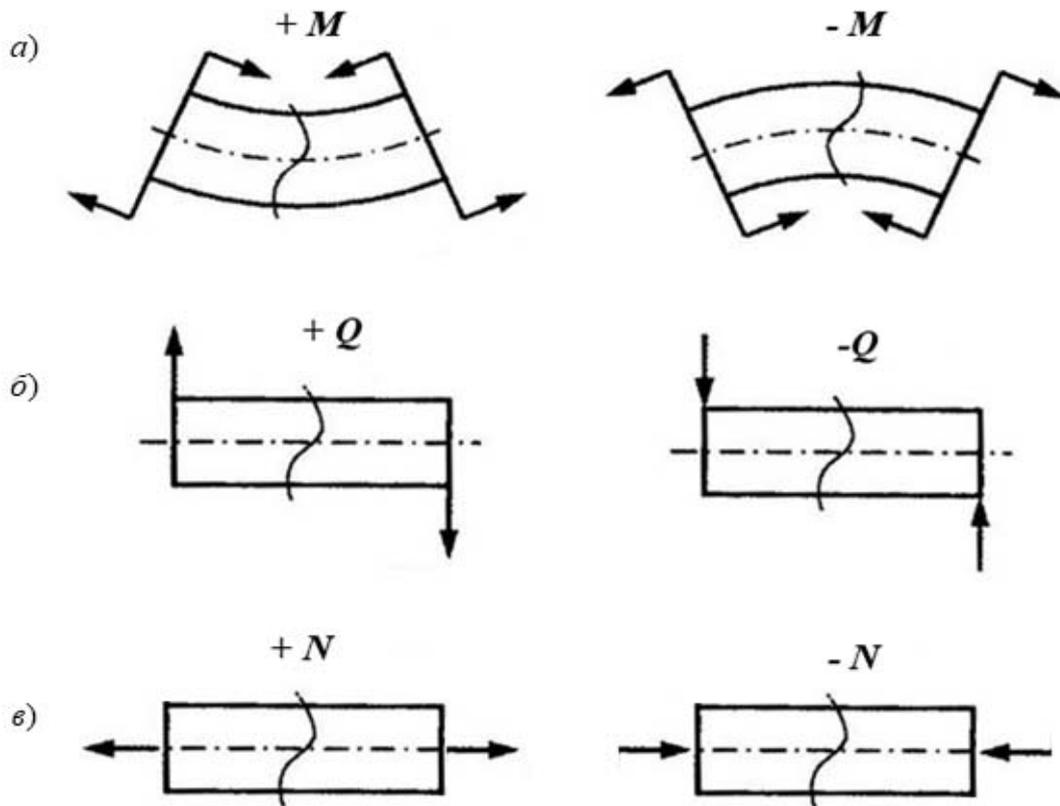


Рисунок 1.2 – Правило знаков внутренних силовых факторов

Скачок на эпюре изгибающих моментов  $M$  возможен только в месте приложения сосредоточенных моментов на их величину. В шарнире изгибающий момент равен нулю.

Эпюра поперечных сил  $Q$  строится по формуле Журавского

$$Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \pm \frac{ql}{2}, \quad (1.1)$$

где  $M_{np}$ ,  $M_{лев}$  – ординаты эпюры изгибающего момента на правой и левой границах участка соответственно;

$l$  – длина рассматриваемого участка;

$q$  – величина интенсивности распределенной нагрузки на участке.

Если распределенная нагрузка действует сверху вниз, то для определения ординаты на левой границе участка берется слагаемое со знаком «+», а на правой – «-». Скачок на эпюре поперечных сил  $Q$  возможен только в месте приложения сосредоточенных сил (реакций) на их величину. Общее правило знаков для поперечной силы гласит, что если равнодействующая всех поперечных сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, вращает по часовой стрелке, то она считается положительной (рисунок 1.2, б).

Эпюра продольных сил  $N$  строится методом вырезания узлов из эпюры поперечных сил  $Q$  с учетом действия узловой нагрузки и правила знаков для поперечных сил  $Q$ . Для проверки правильности построения эпюры используется правило знаков: продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение (рисунок 1.2, в). Скачок на эпюре  $N$  возможен только в месте приложения сосредоточенных продольных сил (реакций) на их величину.

### 1.1 Расчет трехшарнирной рамы

**Пример 1** – Построить эпюры распределения внутренних силовых факторов для заданной рамы (рисунок 1.3, а).

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 3,5 + 5 \cdot 1,5 - 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{210 - 7,5 + 6}{4} = 52,125 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 1 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{40 - 10}{4} = 12,875 \text{ кН};$$

$$\sum M_K^{\text{слева}} = 0: -R_A \cdot 2 + 5 \cdot 3,5 - 6 + H_A \cdot 4 = 0;$$

$$H_A = \frac{52,125 \cdot 2 - 5 \cdot 3,5 + 6}{4} = 3,5625 \text{ кН};$$

$$\sum M_K^{\text{справа}} = 0: R_B \cdot 2 - H_B \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0;$$

$$H_B = \frac{52,125 \cdot 2 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5}{4} = 3,5625 \text{ кН}.$$

Проводим проверки правильности нахождения реакций:

$$\sum y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 3 = 0;$$

$$12,875 + 52,125 - 5 - 20 \cdot 3 = 0;$$

$$\sum x = 0: H_A - H_B = 0;$$

Если при определении реакций получен минус, то меняем их направление на противоположное. Показываем значения реакций на схеме (рисунок 1.3, б).

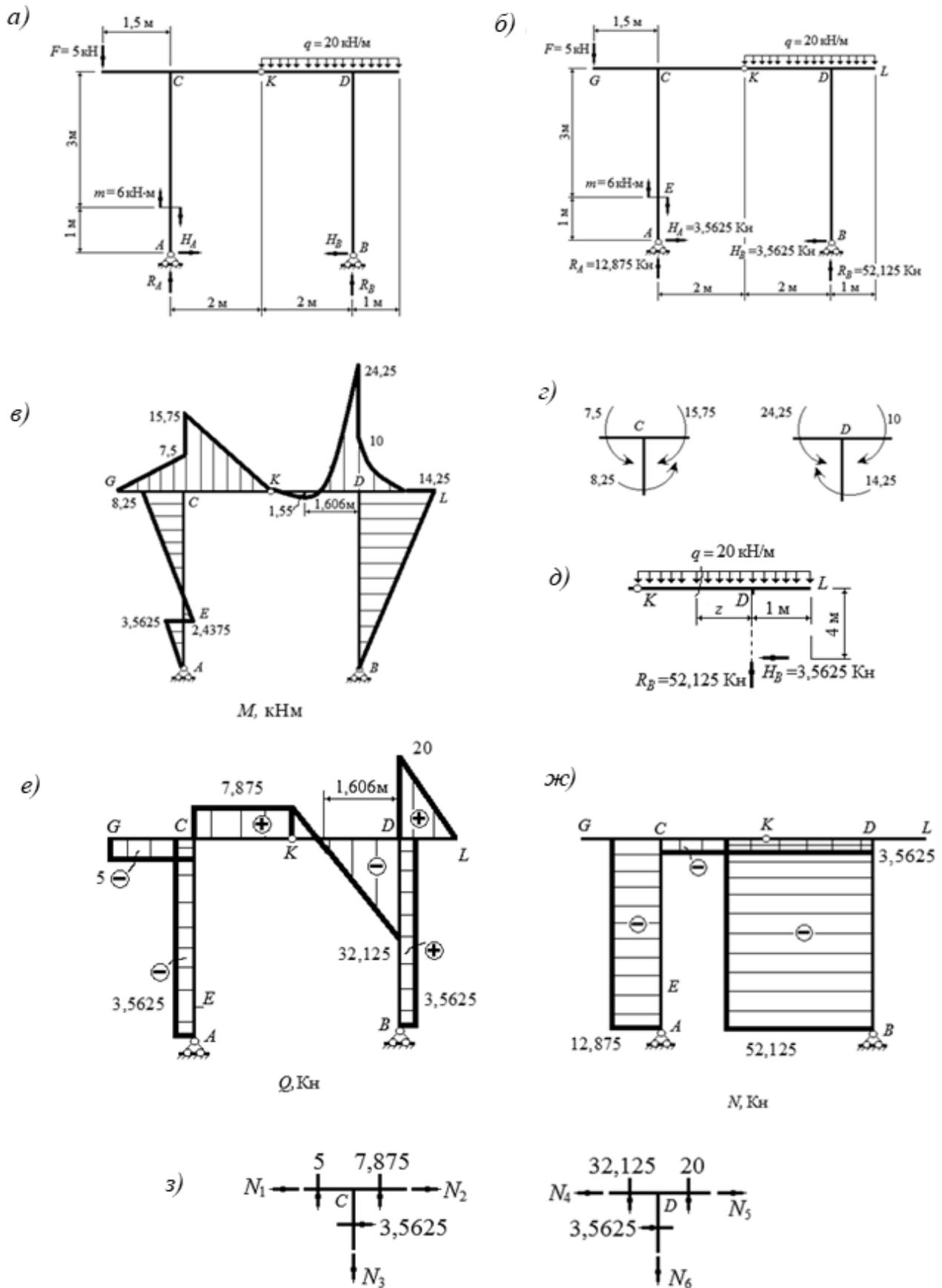


Рисунок 1.3 – Расчет трехшарнирной рамы (пример 1)

Находим ординаты эпюры изгибающих моментов по участкам и строим эпюру  $M$  (рисунок 1.3, в):

– участок  $AE$ :

$$0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м};$$

$$M_{AE} = H_A \cdot z_1 = 3,5625 \cdot z_1 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=1} = 3,5625 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $EC$ :

$$0 \leq z_2 \leq 3 \text{ м};$$

$$M_{EC} = H_A \cdot (1 + z_2) - 6 = 3,5625 \cdot (1 + z_2) - 6 \Big|_{z=0} = -2,4375 \Big|_{z=3} = 8,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $GC$ :

$$0 \leq z_3 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$M_{GC} = 5 \cdot z_3 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=1,5} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $CK$ :

$$0 \leq z_4 \leq 2,0 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_{CK} &= 5 \cdot (1,5 + z_4) + H_A \cdot 4 - R_A z_4 - 6 = \\ &= 5 \cdot (1,5 + z_4) + 3,5625 \cdot 4 - 12,875 z_4 - 6 \Big|_{z=0} = 15,75 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_{z=2} = 0; \end{aligned}$$

– участок  $LD$ :

$$0 \leq z_5 \leq 1,0 \text{ м};$$

$$M_{LD} = qz_5 \cdot \frac{z_5}{2} = 20 \frac{z_5^2}{2} \Big|_0 = 0 \Big|_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $DK$ :

$$0 \leq z_6 \leq 2,0 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_{DK} &= -R_B z_6 + H_B \cdot 4 + q \frac{(1 + z_6)^2}{2} = \\ &= -52,125 z_6 + 3,5625 \cdot 4 + 20 \frac{(1 + z_6)^2}{2} \Big|_0 = -24,25 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_2 = 0. \end{aligned}$$

Проверяем равновесие моментов в узлах  $C$  и  $D$  (рисунок 1.3,  $з$ ): сумма изгибающих моментов в узле должна быть равна нулю. Условия равновесия в узлах выполняются, следовательно, эпюра  $M$  построена правильно.

Расчет ординат эпюры  $Q$  можно также выполнить, используя формулу Журавского (1.1). Знаки ординат эпюры  $M$  определяются с учетом правила знаков, применяемого для балок: растянуто верхнее (горизонтальные стержни) и левое (вертикальные стержни) волокно – знак минус:

$$Q_{AE} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{-3,5625 - 0}{1} = -3,5625 \text{ кН};$$

$$Q_{EC} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{-8,25 - 2,4375}{3} = -3,5625 \text{ кН};$$

$$Q_{GC} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{-7,5 - 0}{1,5} = -5 \text{ кН};$$

$$Q_{CK} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{0 - (-15,75)}{2} = 7,875 \text{ кН};$$

$$Q_{KD} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{-24,25 - 0}{2} \pm \frac{20 \cdot 2}{2} = -12,125 \pm 20 \text{ кН};$$

$$Q_K = -12,125 + 20 = 7,875 \text{ кН}; \quad Q_D = -12,125 - 20 = -32,125 \text{ кН};$$

$$Q_{DL} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{0 - (-10)}{1} \pm \frac{20 \cdot 1}{2} = 10 \pm 10 \text{ кН};$$

$$Q_D = 10 + 10 = 20 \text{ кН}; \quad Q_L = 10 - 10 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_{LB} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{0 - (-14,25)}{4} = 3,5625 \text{ кН}.$$

Строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рисунок 1.3,  $е$ ).

На участке  $KD$  наблюдаем изменение знака эпюры  $Q$ , т. е. в сечении, где  $Q=0$ , изгибающий момент принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение. Проведем исследование на экстремум  $M$  на данном участке:

а) определим координату сечения, где  $Q$  равно нулю. Запишем, а затем приравняем нулю уравнение поперечной силы на участке  $KD$  в сечении с координатой  $z$  (рисунок 1.3,  $д$ );

б) определим экстремальное значение момента в сечении с координатой  $z = 1,606$  м (в уравнении изгибающего момента знаки проставляются так, как они приняты для балки: плюс, если по отношению к сечению с координатой  $z = 1,606$  м сжато верхнее волокно, минус – если сжато нижнее волокно).

$$Q_{KD} = -52,125 + 20(1 + z) = 0; \quad z = 1,606 \text{ м};$$

$$M_{экстр} = 52,125 \cdot 1,606 - 3,5625 \cdot 4 - 20 \frac{(1 + 1,606)^2}{2} = 1,55 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим продольные силы  $N$  методом вырезания узлов  $C$  и  $D$  (рисунок 1.3,  $ж$ ). Поскольку со стороны консоли не действует никаких продольных сил, усилия  $N_1$  и  $N_5$  равны нулю:

– узел *C*:

$$\begin{aligned}\sum y = 0: N_3 + 5 + 7,875 &= 0; \\ N_3 &= -12,875 \text{ кН}; \\ \sum x = 0: -N_1 + 3,5625 + N_2 &= 0; \\ N_1 &= 0; N_2 = -3,5625 \text{ кН};\end{aligned}$$

– узел *D*:

$$\begin{aligned}\sum y = 0: -N_6 - 32,125 - 20 &= 0; \\ N_6 &= -52,125 \text{ кН}; \\ \sum x = 0: -N_4 + N_5 - 3,5625 &= 0; \\ N_4 &= 0; N_5 = 3,5625 \text{ кН}.\end{aligned}$$

**Пример 2** – Построить эпюры распределения внутренних силовых факторов для заданной рамы (рисунок 1.4, *a*).

Данная рама является трехшарнирной системой с двумя опорными шарнирами *A* и *B* и ключевым шарниром *III*. Причем опорные шарниры расположены не на одном уровне. Таким образом, опорные реакции можно найти из совместного рассмотрения системы уравнений статики:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= P_3 \cdot 3 + M + q \cdot 2 \cdot 3 - V_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = 0; \\ 15 \cdot 3 + 6 + 10 \cdot 2 \cdot 3 - V_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 &= 111 - V_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = 0; \\ \sum M_B &= M - q \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = 0; \\ 6 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 &= -14 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = 0; \\ \sum M_{III}^{лев.} &= M - P \cdot 2 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = 0; \\ 6 - 15 \cdot 2 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 &= -24 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = 0; \\ \sum M_{III}^{праг.} &= q \cdot 2 \cdot 1 - V_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 0; \\ 10 \cdot 2 \cdot 1 - V_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 &= 20 - V_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -4 \cdot V_A + 3 \cdot H_A = 14; \\ -2 \cdot V_A + 5 \cdot H_A = 24; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A = 0,14 \text{ кН}; \\ H_A = 4,86 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot V_B + 3 \cdot H_B = 111; \\ -2 \cdot V_B + 2 \cdot H_B = -20; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_B = 20,14 \text{ кН}; \\ H_B = 10,14 \text{ кН}.\end{cases}$$

Проверка (рисунок 1.4, *б*):

$$\begin{aligned}\sum x = 0: -H_A + P - H_B &= -4,86 + 15 - 10,14 = 0; \\ \sum y = 0: -V_A - q \cdot 2 + V_B &= -0,14 - 10 \cdot 2 + 20,14 = 0.\end{aligned}$$

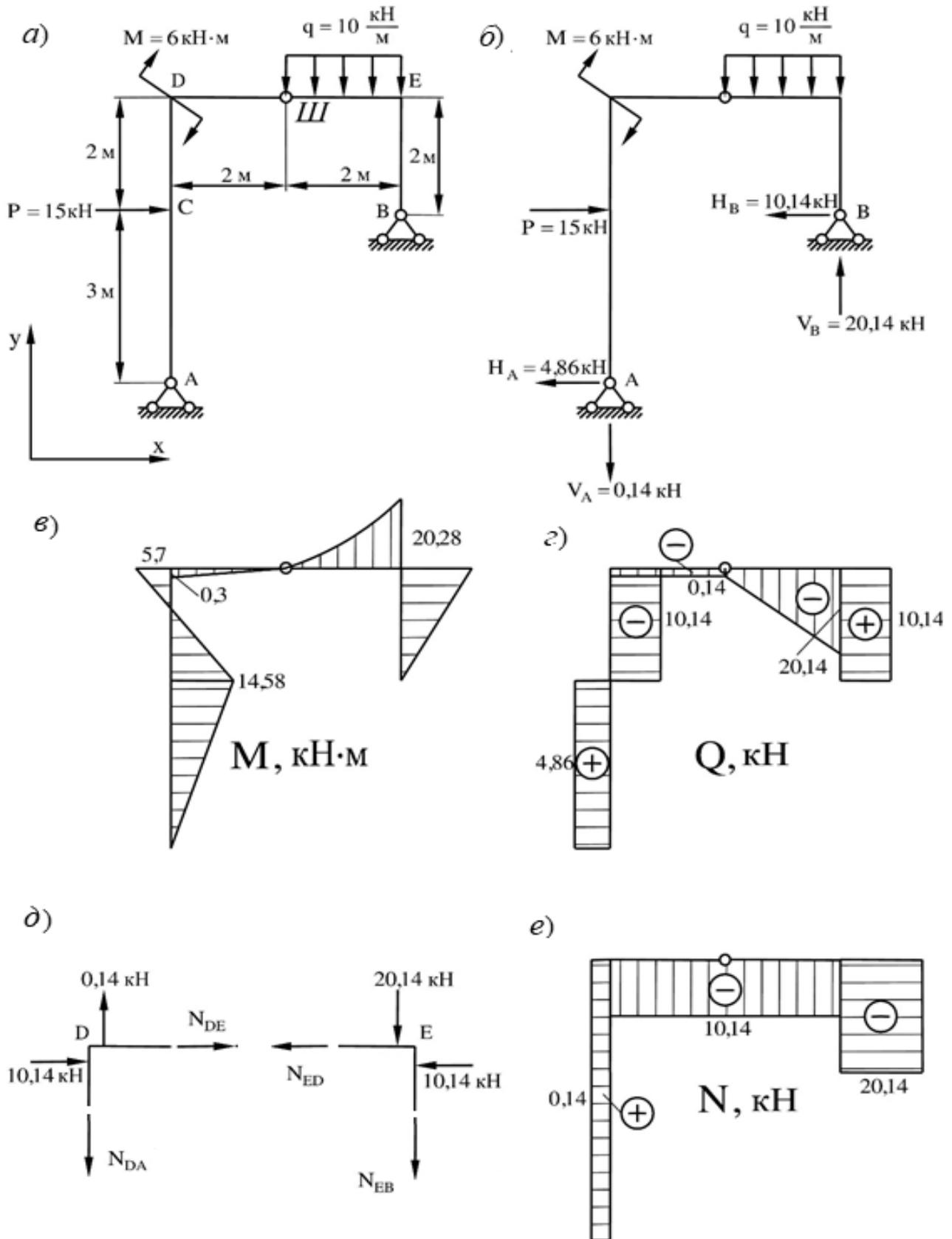


Рисунок 1.4 – Расчет трехшарнирной рамы (пример 2)

Строим эпюру изгибающих моментов (рисунок 1.4, в):

$$\begin{aligned}
 M_{AC}^A &= 0; M_{AC}^C = H_A \cdot 3 = 4,86 \cdot 3 = 14,58; \\
 M_{DC}^D &= H_A \cdot 5 - P \cdot 2 = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7; \\
 M_{DIII}^D &= H_A \cdot 5 - V_A \cdot 2 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2; \\
 M_{AC}^A &= 0; M_{AC}^A = H_A \cdot 3 = 4,86 \cdot 3 = 14,58 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{DC}^D &= H_A \cdot 5 - P \cdot 2 = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{DIII}^D &= H_A \cdot 5 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 + 6 = 0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{DIII}^{III} &= H_A \cdot 5 - V_A \cdot 2 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 0,14 \cdot 2 - 15 \cdot 2 + 6 = 0; \\
 M_{BE}^B &= 0; M_{BE}^E = -H_B \cdot 2 = -10,14 \cdot 2 = -20,28 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{EIII}^E &= -H_B \cdot 2 = -10,14 \cdot 2 = -20,28 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{EIII}^{III} &= -H_B \cdot 2 + V_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -10,14 \cdot 2 + 20,14 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Согласно заданной схеме, узел  $D$  уравновешивается внешним моментом  $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Строим эпюру поперечных сил  $Q$ , используя формулу Журавского (рисунок 1.4, з):

$$\begin{aligned}
 Q_{AC} &= \frac{14,58 - 0}{3} = 4,86 \text{ кН}; & Q_{CD} &= \frac{-5,7 - 14,58}{2} = -10,14 \text{ кН}; \\
 Q_{DIII} &= \frac{0 - 0,3}{2} = -0,14 \text{ кН}; & Q_{BE} &= \frac{20,28 - 0}{2} = 10,14 \text{ кН}; \\
 Q_{III E} &= \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{-20,28 - 0}{2} = \pm 10 - 10,14 \text{ кН}; \\
 Q_{III E}^{III} &= 10 - 10,14 = -0,14 \text{ кН}; & Q_{III E}^E &= -10 - 10,14 = -20,14 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Способом вырезания узлов (рисунок 1.4, д) из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил (рисунок 1.4, е):

– узел  $D$ :

$$\begin{aligned}
 \sum x = 0: & 10,14 + N_{DE} = 0; N_{DE} = -10,14 \text{ кН}; \\
 \sum y = 0: & 0,14 - N_{DA} = 0; N_{DA} = 0,14 \text{ кН};
 \end{aligned}$$

– узел  $E$ :

$$\begin{aligned}
 \sum x = 0: & -10,14 + N_{ED} = 0; N_{ED} = -10,14 \text{ кН}; \\
 \sum y = 0: & -20,14 - N_{EB} = 0; N_{EB} = -20,14 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

## 1.2 Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 1.5 приведены схемы нагрузки трехшарнирных рам для самостоятельной подготовки.

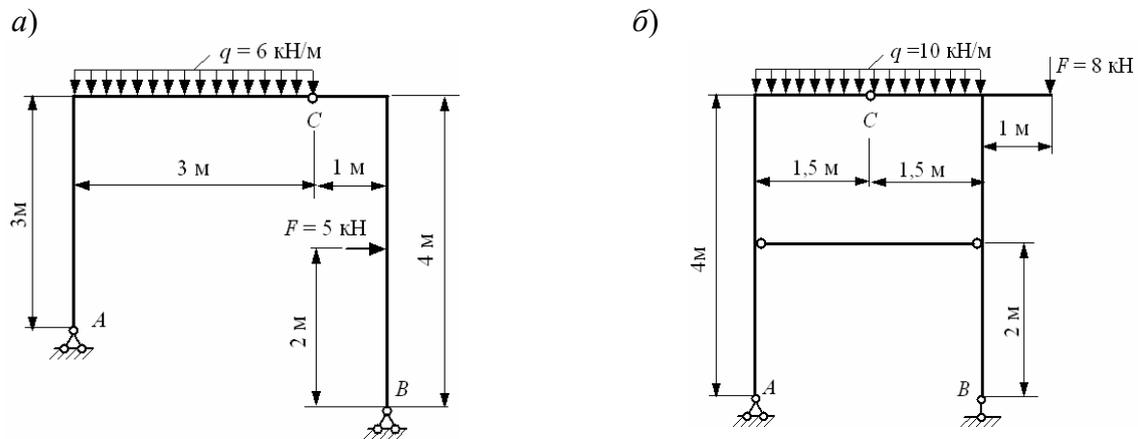


Рисунок 1.5 – К расчету трехшарнирных рам

## 2 Метод перемещений и его применение к расчету плоских рам

Алгоритм расчета статически неопределимой рамы методом перемещений следующий.

1 Определяется степень кинематической неопределимости рамы как сумма числа возможных угловых  $n_y$  и линейных  $n_l$  перемещений:

$$n = n_y + n_l.$$

Число возможных углов поворота  $n_y$  равно числу жестких узлов рамы, исключая опорные. Для определения числа возможных линейных перемещений  $n_l$  во все жесткие узлы рамы, в том числе и опорные, врезают шарниры. Степень подвижности полученного механизма будет равна числу возможных линейных перемещений узлов.

2 Основная система по методу перемещений получается из заданной рамы путем введения дополнительных связей, число которых равно общему количеству неизвестных. Во все жесткие узлы рамы вводятся плавающие связи (заделки), препятствующие только повороту узлов, но не их линейному перемещению. Реакции таких связей представляют собой моменты, приложенные в узлах рамы. Таким образом, основная система метода перемещений представляет собой ряд однопролетных статически неопределимых балок, для которых в справочной литературе приводятся эпюры изгибающих моментов и реакции при различных воздействиях (рисунок А.1).

3 Составляется система канонических уравнений метода перемещений, которая имеет вид

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + \dots + r_{1n} \cdot Z_n + R_{1P} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + \dots + r_{2n} \cdot Z_n + R_{2P} = 0; \\ \dots \\ r_{n1} \cdot Z_1 + r_{n2} \cdot Z_2 + \dots + r_{nn} \cdot Z_n + R_{nP} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $r_{n1}$  – реактивное усилие в связи  $n$  от действия единичного перемещения в связи 1;

$r_{nn}$  – реактивное усилие, возникающее в связи  $n$  от ее перемещения, равного единице;

$R_{nP}$  – реактивное усилие в связи  $n$  от действия внешней нагрузки;

$Z_n$  – неизвестное перемещение узла.

Для определения коэффициентов уравнений необходимо построить единичные  $\overline{M}_n$  и грузовую  $M_P$  эпюры изгибающих моментов. Коэффициенты с одинаковыми индексами  $r_{nn}$  называются главными и их значения всегда положительны. Побочные коэффициенты  $r_{n1}$  и свободные члены уравнений  $R_{nP}$  могут быть положительными, отрицательными и равняться нулю. Побочные коэффициенты обладают свойством взаимности, т. е.  $r_{1n} = r_{n1}$ .

Для простоты определения усилий можно считать, что первый индекс при реактивном усилии  $r_{n1}$  обозначает номер узла (линейной связи), который вырезается (узел, где приложено неизвестное усилие  $\overline{Z}_n = 1$ ), а второй индекс – номер такой эпюры, из которой он вырезается (из эпюры  $\overline{M}_1$ ).

При действии единичного угла поворота эпюры изгибающих моментов строятся на стержнях, примыкающих к поворачивающейся заделке (*кроме консоли!*), а при единичном смещении – для всех деформирующихся (изгибающихся) стержней. Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений проще определять статическим способом из условия равновесия соответствующих узлов рамы или отдельных частей основной системы. *Реактивные моменты всегда направляются по ходу часовой стрелки.*

4 После определения коэффициентов и свободных членов решают систему канонических уравнений, находят значения неизвестных  $Z_n$ , строят «исправленные» эпюры моментов  $M_n = \overline{M}_n \cdot Z_n$ .

5 Строят окончательную (действительную) эпюру изгибающих моментов  $M$ , алгебраически суммируя ординаты «исправленных» и грузовой эпюры моментов по характерным точкам:

$$M = M_P + M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad (2.2)$$

Проверкой правильности построения эпюры изгибающих моментов является равновесие узлов рамы.

6 После статической проверки выполняют кинематическую проверку правильности построения эпюры  $M$ , для чего строят единичную эпюру моментов в основной системе метода сил  $\overline{M}_1$  и перемножают ее с эпюрой  $M$  по правилу Верещагина:

$$\delta = \frac{\overline{M'} \cdot M}{E \cdot I} = 0. \quad (2.3)$$

7 Строят эпюры поперечных  $Q$  и продольных  $N$  сил таким же образом, как и при расчете рам методом сил.

8 Выполняют статическую проверку правильности решения задачи по условию равенства нулю суммы проекций всех сил и реакций, действующих на раму:

$$\sum x = 0; \quad \sum y = 0. \quad (2.4)$$

### 2.1 Расчет один раз статически неопределимой рамы методом перемещений

**Пример 1** – Построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных  $Q$  и продольных  $N$  сил для рамы, считая жесткость стержней постоянной величиной ( $EI = \text{const}$ ) (рисунок 2.1, а).

#### Решение

Число неизвестных углов поворота  $n_y = 1$ . При введении шарниров в жесткий узел  $B$  и жесткую заделку  $A$  линейная подвижность системы  $n_l$  будет равна нулю (рисунок 2.1, б). Общая степень кинематической неопределимости

$$n = n_y + n_l = 1 + 0 = 1.$$

Основную систему получаем из заданной путем постановки плавающих заделок в жесткий узел  $B$  (рисунок 2.1, в). Система канонических уравнений для заданной рамы имеет вид обычного линейного уравнения

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

При помощи таблицы готовых решений (см. рисунок А.1) строим единичную эпюру моментов  $\overline{M}_1$ , задавая единичное угловое перемещение введенной в основную систему плавающей заделке (рисунок 2.1, з), а также грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_P$  от действия внешней (заданной) нагрузки (рисунок 2.1, д). На рисунке 2.1, е представлено определение коэффициентов уравнений:

$$r_{11} = \frac{4E \cdot I}{l} + \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{7E \cdot I}{l};$$

$$R_{1P} = -0,1875P \cdot l.$$

Подставляя их в уравнение, находим неизвестное усилие, действующее во введенной связи:

$$\frac{7E \cdot I}{l} \cdot z_1 - 0,1875 P \cdot l = 0;$$

$$z_1 = \frac{0,027P \cdot l^2}{E \cdot I}.$$

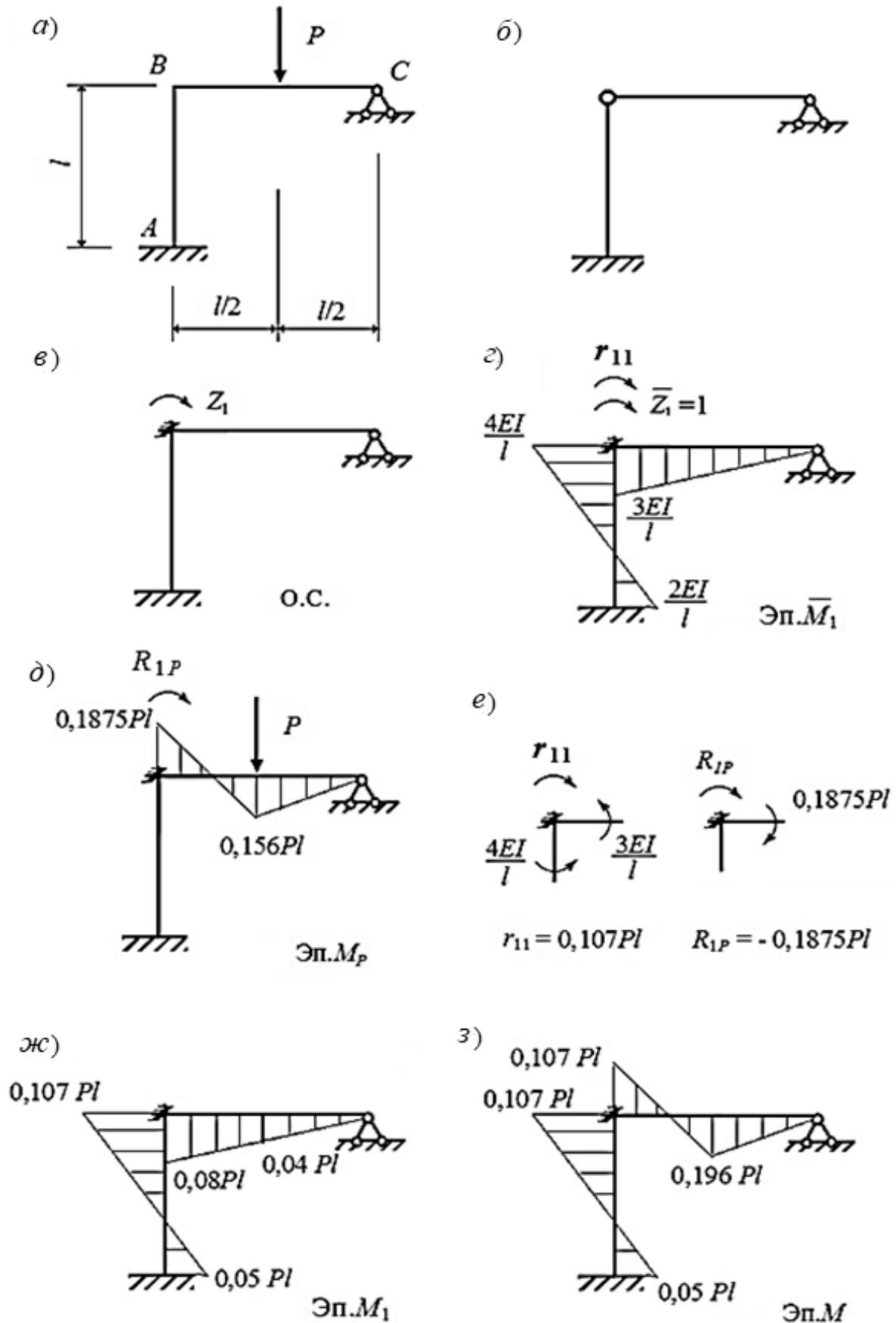
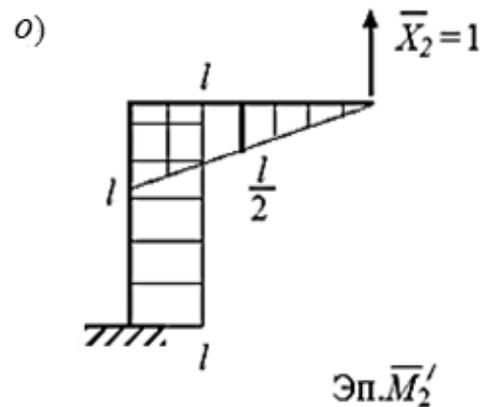
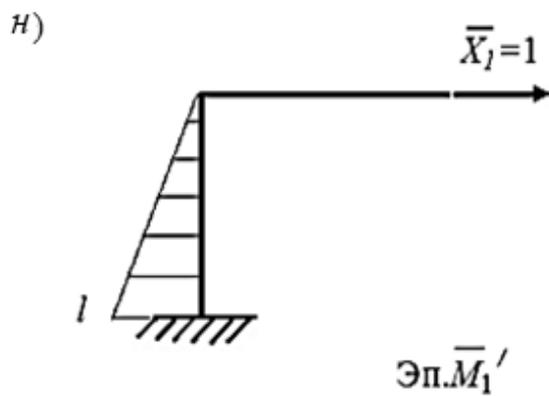
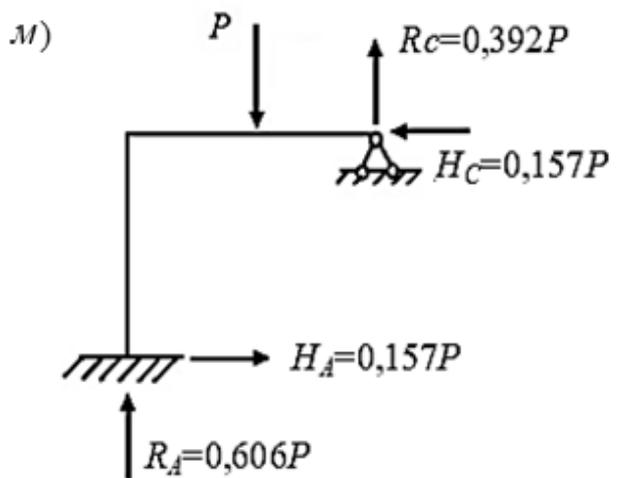
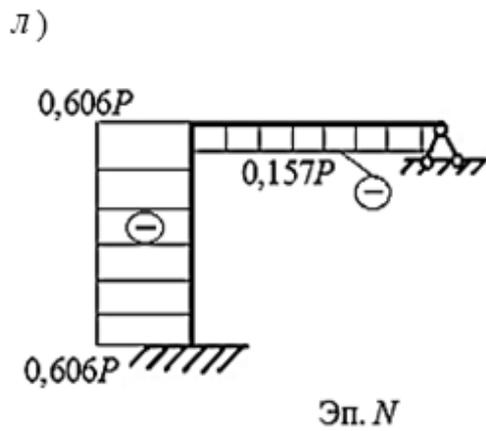
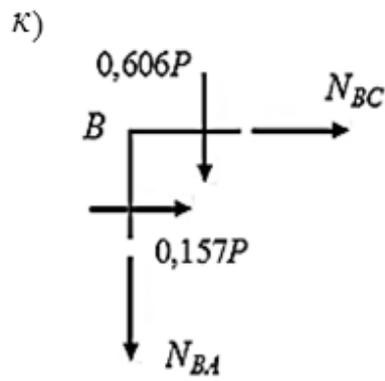
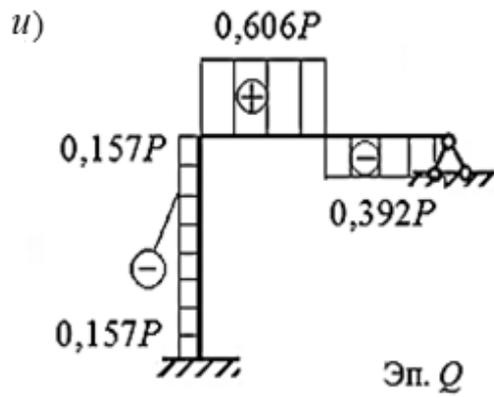


Рисунок 2.1 – К расчету один раз статически неопределимой кинематической рамы



Окончание рисунка 2.1

На рисунке 2.1, ж показана «исправленная» эпюра изгибающих моментов  $M_1$ , ординаты которой умножены на найденный коэффициент  $Z_1$ . Суммируя алгебраически ординаты грузовой  $M_p$  и «исправленной» эпюры  $M_1$ , строим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$  (рисунок 2.1, з). По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рисунок 2.1, и).

$$Q_{AB} = \frac{-0,107P \cdot l - 0,05P \cdot l}{l} = -0,157 P;$$

$$Q_{BC}^{лев} = \frac{0,196P \cdot l - (-0,107P \cdot l)}{\frac{l}{2}} = 0,606 P;$$

$$Q_{BC}^{прав} = \frac{0 - 0,196P \cdot l}{\frac{l}{2}} = 0,392 P.$$

Вырезая узел  $B$  (рисунок 2.1,  $\kappa$ ), строим эпюру продольных сил  $N$  (рисунок 2.1,  $\lambda$ ):

$$\sum X = 0: 0,157 P + N_{BC} = 0; \quad N_{BC} = -0,157 P;$$

$$\sum Y = 0: -0,606 P - N_{BA} = 0; \quad N_{BA} = -0,606 P.$$

Проводим статическую проверку равновесия рамы (рисунок 4.1,  $m$ ):

$$\begin{aligned} \sum X = 0: H_A - H_C &= 0,157 P - 0,157 P = 0; \\ \sum Y = 0: R_A - P + R_C &= 0,606 P - P + 0,392 P = 0. \end{aligned}$$

Для кинематической проверки строим единичные эпюры моментов в основной системе метода сил (рисунок 2.1,  $n, o$ ) и перемножаем их с окончательной эпюрой  $M$  по правилу Верещагина:

$$\delta_1 = \frac{\overline{M_1'} \cdot M}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \left( \frac{1}{2} \cdot 0,107 P \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot l - \left( \frac{1}{2} \cdot 0,05 P \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{0,001 P l^3}{EI} \approx 0;$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{\overline{M_2'} \cdot M}{E \cdot I} &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \left( \frac{1}{2} \cdot 0,196 P \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{l}{2 \cdot 6} \left( 2 \cdot 0,196 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cdot 0,107 P \cdot l \cdot l + 0,196 P \cdot l \cdot l - 0,107 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{l}{6} \left( -2 \cdot 0,107 P \cdot l \cdot l + 2 \cdot 0,05 P \cdot l \cdot l - 0,107 P \cdot l \cdot l + 0,05 P \cdot l \cdot l \right) \right) = \frac{0,0142 P l^3}{EI} \approx 0.$$

Проверка полностью выполняется, следовательно, эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  построены верно.

## 2.2 Расчет два раза статически неопределимой рамы методом перемещений

**Пример 2** – Построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных  $Q$  и продольных  $N$  сил для рамы, считая жесткость стержней постоянной величиной ( $EI = \text{const}$ ) (рисунок 2.2, а).

### Решение

Число неизвестных углов поворота  $n_y = 1$ . При введении шарниров во все жесткие узлы и заделки линейная подвижность системы  $n_l$  будет равна единице (рисунок 2.2, б). Таким образом, степень кинематической неопределимости

$$n = n_y + n_l = 1 + 1 = 2.$$

Основную систему получаем из заданной путем постановки подвижных заделок в жесткие узлы  $E$  и  $F$  (рисунок 2.2, в). Система канонических уравнений для заданной рамы имеет вид

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

При помощи таблицы готовых решений (см. рисунок А.1) строим единичные эпюры моментов  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_2$ , задавая поочередно единичные перемещения введенным в основную систему связям (рисунок 2.2, з, д), а также грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_P$  от действия внешней (заданной) нагрузки (рисунок 2.2, е). Определяем коэффициенты уравнений:

$$r_{11} = \frac{4E \cdot I}{l} + \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{7E \cdot I}{l};$$

$$r_{12} = r_{21} = -\frac{6E \cdot I}{l^2};$$

$$r_{22} = \frac{12E \cdot I}{l^3};$$

$$R_{1P} = -0,1875P \cdot l;$$

$$R_{2P} = 0.$$

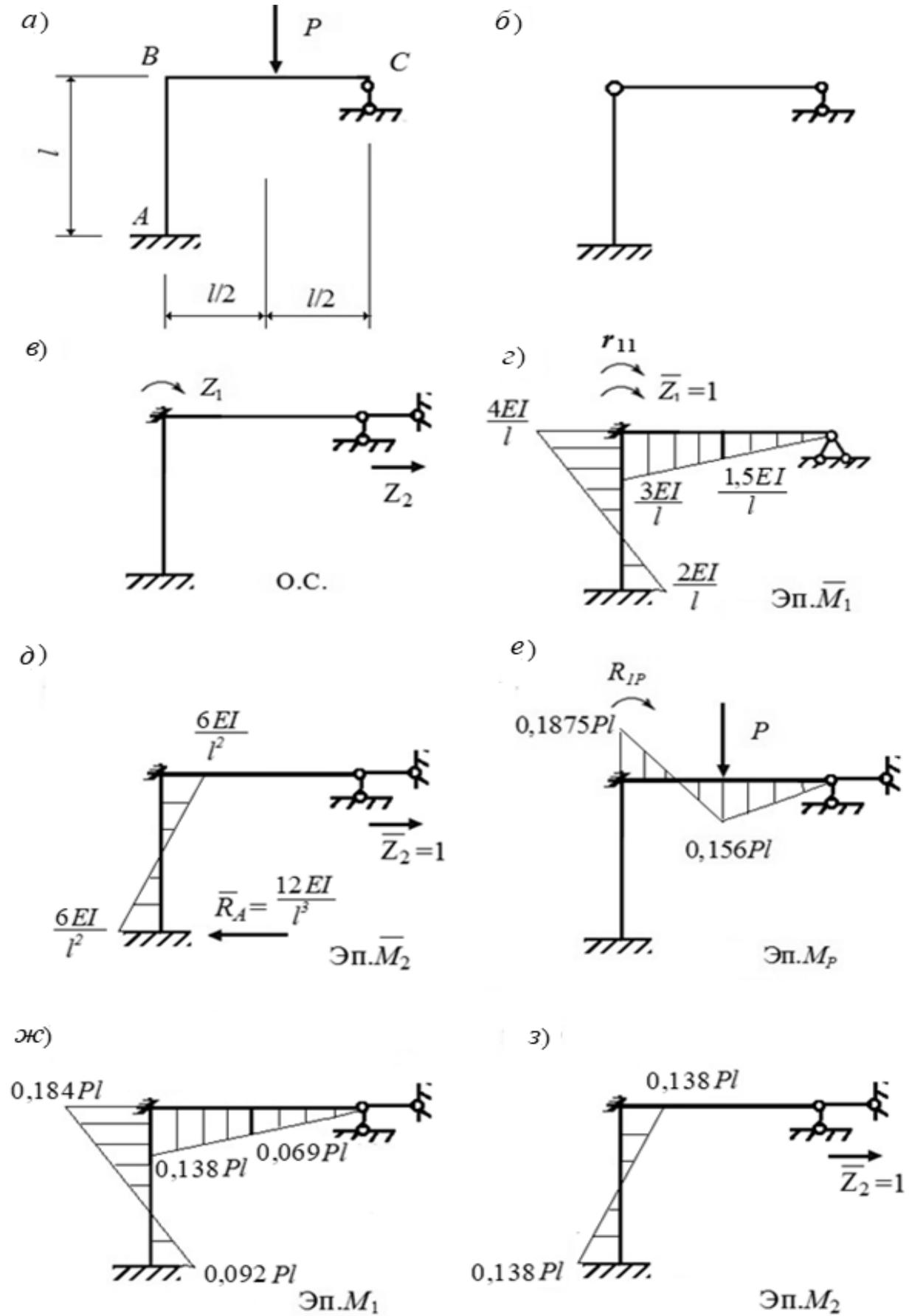
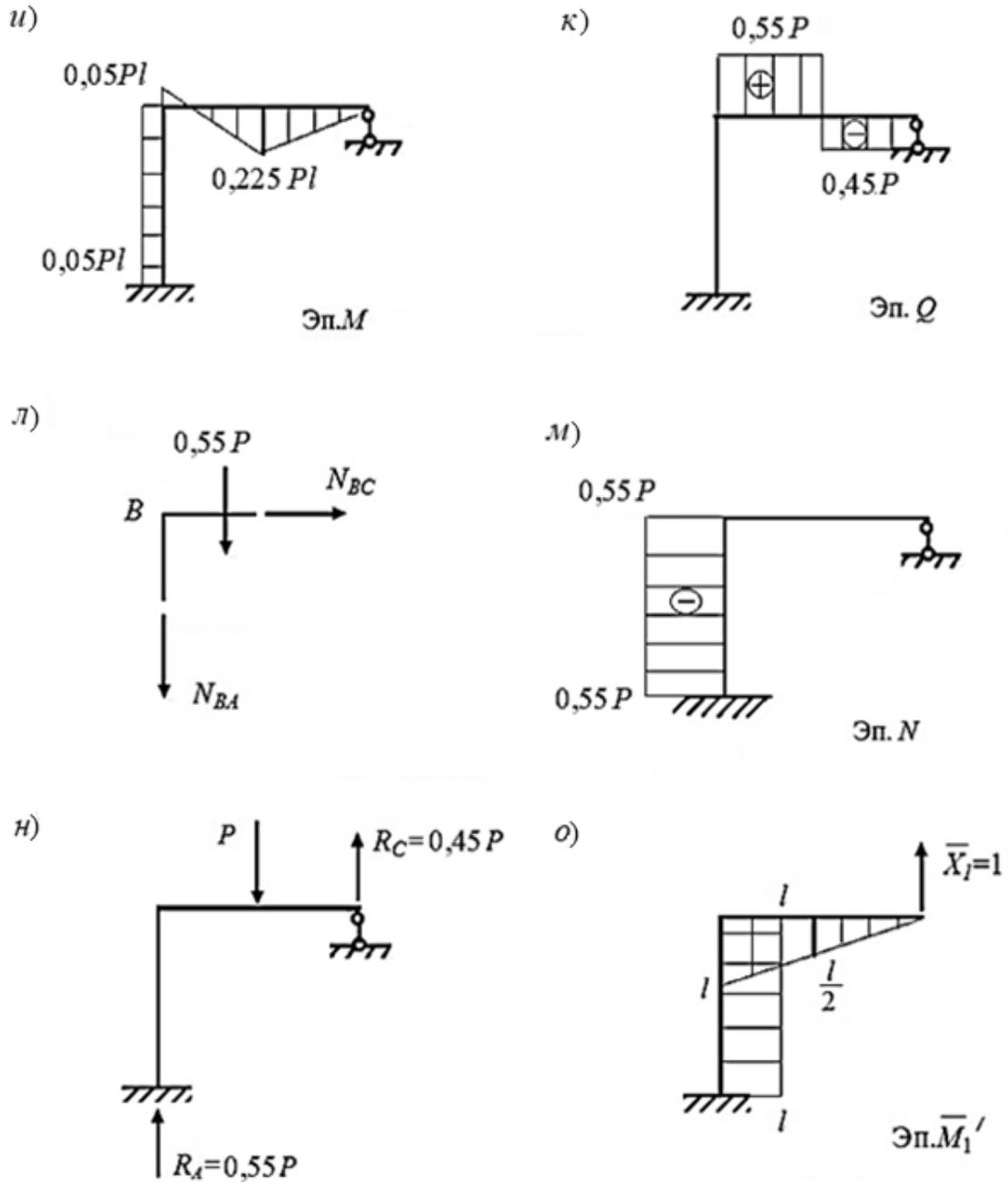


Рисунок 2.2 – К расчету дважды статически неопределимой кинематической рамы



Окончание рисунка 2.2

Подставляя коэффициенты в систему и решая ее, находим неизвестные усилия, действующие во введенных связях:

$$\begin{cases} \frac{7E \cdot I}{l} \cdot Z_1 - \frac{6E \cdot I}{l^2} \cdot Z_2 - 0,1875 P \cdot l = 0; \\ -\frac{6E \cdot I}{l^2} \cdot Z_1 + \frac{12E \cdot I}{l^3} \cdot Z_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Z_1 = \frac{0,046Pl^2}{E \cdot I}; \\ Z_2 = \frac{0,023Pl^3}{E \cdot I}. \end{cases}$$

На рисунке 2.2, ж, з показаны «исправленные» эпюры изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$ , умножая характерные ординаты единичных эпюр на найденные соответствующие коэффициенты  $Z_1$  и  $Z_2$ . Суммируя алгебраически ординаты грузовой  $M_P$  и «исправленных» эпюр  $M_1$  и  $M_2$ , строим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$  (рисунок 2.2, и). По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рисунок 2.2, к).

$$Q_{AB} = \frac{-0,046P \cdot l - (-0,046P \cdot l)}{l} = 0;$$

$$Q_{BC}^{лев} = \frac{0,225P \cdot l - (-0,0495P \cdot l)}{\frac{l}{2}} = 0,55 P; \quad Q_{BC}^{прав} = \frac{0 - 0,225P \cdot l}{\frac{l}{2}} = -0,45 P.$$

Вырезая узел  $B$  (рисунок 2.2, л), строим эпюру продольных сил  $N$  (рисунок 2.2, м):

$$\sum X = 0: \quad N_{BC} = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad -0,55 P - N_{BA} = 0; \quad N_{BA} = -0,55 P.$$

Проводим статическую проверку равновесия рамы (рисунок 2.2, н):

$$\sum Y = 0: \quad R_A - P + R_C = 0,55 P - P + 0,45 P = 0.$$

Для кинематической проверки строим единичную эпюру моментов в основной системе метода сил  $\overline{M}_2$  (рисунок 2.2, о) и перемножаем ее с окончательной эпюрой  $M$  по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{\overline{M}_2 \cdot M}{E \cdot I} = \frac{Pl^3}{E \cdot I} \cdot \left( \left( \frac{1}{2} \cdot 0,225 P \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) - \frac{l}{2 \cdot 6} (-2 \cdot 0,0495 P \cdot l \cdot l + \\ &+ 0,225 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - 0,0495 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 0,225 P \cdot l \cdot l) - 0,046 P \cdot l \cdot l \cdot l) = \\ &= \frac{(0,01875 + 0,027 - 0,046) \cdot Pl^3}{E \cdot I} \approx 0. \end{aligned}$$

Проверка полностью выполняется, следовательно, эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  построены верно.

### 2.3 Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 2.3 представлены задачи для самостоятельной подготовки.

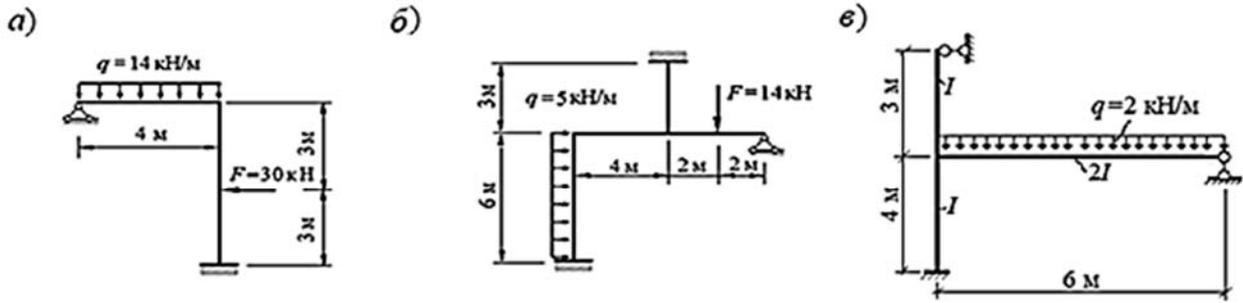


Рисунок 2.3 – К расчету статически неопределимой рамы

## Список литературы

1 **Дарков, А. В.** Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 12-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2020. – 656 с.: ил.

2 **Смирнов, В. А.** Строительная механика: учебник для вузов / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий; под ред. В. А. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2018. – 423 с.

3 **Гонорова, С. В.** Строительная механика. Пособие по решению задач : учеб.-метод. пособие / С. В. Гонорова; под общ. ред. И. М. Кузменко. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – 280 с. : ил.

4 **Шапошников, Н. Н.** Строительная механика: учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков; под общ. ред. Н. Н. Шапошникова. – 13-е изд., перераб. и доп. – СПб.: М.; Краснодар: Лань, 2017. – 692 с.: ил.

## Приложение А (справочное)

Номер схемы	Схема балки	Эпюра изгибающих моментов и реакция	Формула
1			$M_A = \frac{P \cdot L \cdot v}{2} \cdot (1 - v^2)$ $M_C = \frac{P \cdot L \cdot u^2 \cdot v}{2} \cdot (3 - u)$ $R_A = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2); R_B = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u)$
2			$M_A = \frac{q \cdot L^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L; R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$
3			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L}$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^2}$
4			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L^2}$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^3}$
5			$M_A = P \cdot L \cdot u \cdot v^2$ $M_B = P \cdot L \cdot u^2 \cdot v$ $M_C = 2 \cdot P \cdot L \cdot u^2 \cdot v^2$ $R_A = P \cdot v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u)$ $R_B = P \cdot u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v)$
6			$M_A = M_B = \frac{q \cdot L^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot L}{2}$
7			$M_A = \frac{4 \cdot EI}{L}; M_B = \frac{2 \cdot EI}{L}$ $R_A = R_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$
8			$M_A = M_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$ $R_A = R_B = \frac{12 \cdot EI}{L^3}$

Рисунок А.1 – Готовые решения метода перемещений