УДК 517.925

О МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Изучается многоточечная краевая задача для уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)XA_2(t) + B_1(t)XB_2(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A_j, B_j \in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $j = 1,2$, $F \in C(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X): t\in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$; M_i – вещественные постоянные матрицы. Предполагается, что нелинейная функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида (см., например, [1–3]). Краевая задача (1), (2) является задачей типа [2] применительно к уравнению Ляпунова вида (1). Такие задачи играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–5].

С помощью качественных методов эта задача исследовалась в [2] в области $I\times\mathbb{R}^{n\times n}$. Предлагаемая работа является обобщением и развитием [6]. Задача (1), (2) исследуется с помощью метода [7] в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Примем следующие обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i, \quad \gamma = \|M^{-1}\|, \quad m = \sum_{i=1}^{k}\|M_i\|, \quad \tilde\alpha = \int_0^\omega \|A_1(\tau)\|\|A_2(\tau)\|d\tau,$$

$$\tilde\beta = \int_0^\omega \|B_1(\tau)\|\|B_2(\tau)\|d\tau, \quad \tilde h = \int_0^\omega \|F(\tau,0)\|d\tau, \quad \tilde q = \gamma m(\tilde\alpha + \tilde\beta + L), \quad p = \gamma m\tilde h,$$

где $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области $D_\rho = \{(t,X): t\in I, \|X\| \le \rho\}$, $0 < \rho < \tilde\rho$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\det M \ne 0; \tag{3}$$

$$\tilde q < 1; \tag{4}$$

$$p/(1-\tilde q) \le \rho. \tag{5}$$

Тогда задача (1), (2) *однозначно разрешима в области* D_ρ, *при этом справедлива оценка* $\|X(t)\| \le p/(1-\tilde{q})$.

При доказательстве этой теоремы сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t) = M^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A_1(\tau)X(\tau)A_2(\tau) + B_1(\tau)X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau. \qquad (6)$$

С использованием условий (4), (5) с помощью принципа Каччопполи – Банаха сжимающих отображений установлена однозначная разрешимость уравнения (6) в шаре $\|X\|_C \le \rho$.

Теорема 2. *При выполнении условий* (3)–(5) *решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности* $\{X_s(t)\}_0^\infty$, *определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2).

Решение задачи строится с помощью классического метода последовательных приближений, примененного к уравнению (6),

$$X_{s+1}(t) = M^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A_1(\tau)X_s(\tau)A_2(\tau) + B_1(\tau)X_s(\tau)B_2(\tau) + F(\tau, X_s(\tau))]\, d\tau,$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots,$ $X_0(t)$ – произвольная непрерывная матрица-функция, принадлежащая шару $\|X\|_C \le \rho$.

Сходимость последовательности $\{X_s(t)\}_0^\infty$ характеризуется неравенством

$$\|X(t) - X_s(t)\|_C \le \frac{\tilde{q}^s}{1-\tilde{q}}\|X_1 - X_0\|_C, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

2. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

3. **Параев, Ю. И.** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск: Томский гос. ун-т, 1989. – 166 с.

4. **Бойчук, А. А.** Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – Киев: Наукова думка, 1990. – 96 с.

5. **Ешуков, Л. Н.** Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Н. Ешуков // Успехи математических наук. – 1958. – Т. 13, вып. 3 (81). – С. 191–196.

6. **Бондарев, А. Н.** Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 423–427.

7. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.