

УДК 517.925

К ОБОБЩЕНИЮ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. КАШПАР

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Изучается задача типа [1, 2]

$$d^2\mathbf{X}/dt^2 = \mathbf{A}(t)d\mathbf{X}/dt + d\mathbf{X}/dt\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{A}_2(t) + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{B}_2(t) + \\ + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_2(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, d\mathbf{X}/dt), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}(D, \mathbb{R}^{n \times n})$, $D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I, \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1, \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\}$, $(\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt)$, $i = 1, 2$; $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что нелинейная функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально); $0 < \tilde{\rho}_i \leq \infty$, $I = [0, \omega]$.

С помощью конструктивного метода [3] получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представленные в ее терминах. Разработан итерационный алгоритм типа [1, 2] построения решения. Исследования выполнены в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max_{t \in I} \|\mathbf{X}(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – норма матриц в рамках определения этой алгебры.

Вместо (1), (2) рассматривается эквивалентная ей задача

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{Y}, \quad d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{A}_2(t) + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{B}_2(t) + \\ + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_2(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}); \quad (3)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}. \quad (4)$$

Обозначения:

$$h_1 = \max_{t \in I} \|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|, \quad h_2 = \max_{t \in I} \|\mathbf{Q}_{UV}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|, \quad h = \max_{t \in I} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0})\|,$$

$$a_i = \max_{t \in I} \|\mathbf{A}_i(t)\|, \quad b_i = \max_{t \in I} \|\mathbf{B}_i(t)\|, \quad c_i = \max_{t \in I} \|\mathbf{C}_i(t)\|, \quad d_i = \max_{t \in I} \|\mathbf{D}_i(t)\|,$$

$$\lambda_U = \max_{0 \leq s \leq \tau \leq \omega} \|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \quad \lambda_V = \max_{0 \leq s \leq \tau \leq \omega} \|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\|,$$

$$G = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in [0, \omega], \|\mathbf{X}\| \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\| \leq \rho_2\}, \quad \tilde{G} = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leq \rho_2\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \omega^3 (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 + L_1), \quad p_2 = \frac{1}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \omega^2 (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 + L_1),$$

$$q_1 = \frac{1}{3} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \omega^3 L_2, \quad q_2 = \frac{1}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \omega^2 L_2, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_U(\tau, s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_V(s, \tau) = \mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau),$$

где $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$; $i = 1, 2$; $U(t)$, $V(t)$ – интегральные матрицы уравнений $dU/dt = A(t)U$ ($U(0) = E$), $dV/dt = VB(t)$ ($V(0) = E$), E – единичная матрица;

$$P_{UV}(t) = \int_0^t U(\tau)(\Phi^{-1}(N - M))V(\tau)d\tau, \quad Q_{UV}(t) = U(t)(\Phi^{-1}(N - M))V(t);$$

Φ – линейный оператор, $\Phi Z(t) = \int_0^\omega U(\tau)Z(t)V(\tau)d\tau$, $Z(t) = U^{-1}(t)Y(t)V^{-1}(t)$;

$L_i = L_i(\rho_1, \rho_2)$, ($i = 1, 2$) – постоянные Липшица для $F(t, X, Y)$ в области G ; $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – интегральные операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(X, Y) = & \int_0^t U(\varphi)\Phi^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi K_U(\tau, s)(A_1(s)X(s)A_2(s) + B_1(s)X(s)B_2(s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_1(s)X(s)C_2(s) + D_1(s)X(s)D_2(s) + F(s, X(s), Y(s)))K_V(s, \tau)ds\right)d\tau\right)V(\varphi)d\varphi, \\ \mathcal{L}_2(X, Y) = & U(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t K_U(\tau, s)(A_1(s)X(s)A_2(s) + B_1(s)X(s)B_2(s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_1(s)X(s)C_2(s) + D_1(s)X(s)D_2(s) + F(s, X(s), Y(s)))K_V(s, \tau)ds\right)d\tau\right)V(t). \end{aligned}$$

Теорема. Пусть оператор Φ однозначно обратим и выполнены условия $p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \leq \rho_1$, $p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \leq \rho_2$, $p_1 + q_2 < 1$. Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима в области G , при этом справедлива оценка $Z \leq (E - P)^{-1}N$.

Решение задачи (3), (4) строится классическим методом последовательных приближений (см., например, [4, с. 606]):

$$X_m(t) = M + P_{UV}(t) + \mathcal{L}_1(X_{m-1}, Y_{m-1}), Y_m(t) = Q_{UV}(t) + \mathcal{L}_2(X_{m-1}, Y_{m-1}), m = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где в качестве начального приближения $(X_0(t), Y_0(t))$ принимаются произвольные матрицы-функции класса $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$, при этом все приближения удовлетворяют условиям (2).

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости последовательности $\{X_m(t), Y_m(t)\}_0^\infty$, построенной по алгоритму (5), а также получены оценки $\tilde{Z}_m \leq (E - P)^{-1}P^m Z_0$, $Z \leq \tilde{Z}_0 + (E - P)^{-1}Z_0$, где $\tilde{Z}_0 = colon(\|X_0\|, \|Y_0\|)$, $\tilde{Z}_m = colon(\|X - X_m\|_C, \|Y - Y_m\|_C)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашпар, А. И. Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 570–583.
2. Кашпар, А. И. Обобщение задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института НАН Беларуси: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г.: в 2 ч. – Минск: Беларус. навука, 2024. – Ч. 2. – С. 39–41.
3. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
4. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.