

УДК 517.977.1

К РЕШЕНИЮ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется задача типа [1] построения возможных управлений $u \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^r)$ и соответствующих функций состояний $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u; \quad (1)$$

$$x(t_s) = x_s; \quad (2)$$

$$\int_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \quad (3)$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times r})$, $u \in \mathbb{R}^r$, $a_i, b_i \in I = [0, \omega]$, $s = \overline{0, m}$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n_i \times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{1, k}$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq \omega$, $\omega > 0$; также вводятся структурные функции $\Phi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n_i})$ управления.

Соотношения (1) и (2) рассматривались в [1]; (3) представляют собой ограничения на функцию состояний, аналогичные соответствующим изопериметрическим интегральным ограничениям [1]. Класс изопериметрических задач играет большую роль как в технике, технологиях, так и в экономике [2].

Данная работа является развитием [1]. Ее основная цель состоит в получении достаточных условий разрешимости задачи (1)–(3), а также замкнутых соотношений для функций $u(t)$, $x(t)$.

Сначала от (1), (2) перейдем к эквивалентной интегральной задаче

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau; \quad (4)$$

$$\int_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = X^{-1}(t_s)x_s - x_0, \quad (5)$$

где $X(t)$ – матрицант свободной системы.

Запишем (3), (5) в операторном виде

$$B_\nu u = \tilde{\mu}_\nu, \quad \nu = \overline{1, m+k},$$

где

$$B_\nu u = \int_{t_0}^{t_\nu} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \tilde{\mu}_\nu = X^{-1}(t_\nu)x_\nu - x_0 \quad \text{при } \nu = \overline{1, m},$$

$$B_\nu u = \int_{a_\nu}^{b_\nu} \Psi_\nu(\tau)u(\tau)d\tau \int_{t_0}^\tau X^{-1}(s)Q(s)u(s)ds, \quad \tilde{\mu}_\nu = \mu_\nu \quad \text{при } \nu = \overline{m+1, m+k}.$$

Согласно методике [1], при выполнении условий

$$\det(B_{j+1}F_j\Phi_{j+1}) \neq 0, \quad j = \overline{0, m+k-1}, \quad (6)$$

получим выражение

$$u(t) = F(t, y) + f(t), \quad (7)$$

где $F(t, y)$, $f(t)$ – величины, аналогичные принятым в [1], т. е.

$$y_j = \Phi_{j+1}c_{j+1} + y_{j+1}; \quad (8)$$

$$F_{j+1}(y_{j+1}) = F_j(y_{j+1}) - F_j\Phi_{j+1}(B_{j+1}F_j\Phi_{j+1})^{-1}B_{j+1}F_j(y_{j+1}); \quad (9)$$

$$f_{j+1} = f_j + F_j\Phi_{j+1}(B_{j+1}F_j\Phi_{j+1})^{-1}(\tilde{\mu}_{j+1} - B_{j+1}f_j); \quad (10)$$

$j = \overline{0, m+k-1}$, при этом $f_0 = 0$, $F_{m+k}(y_{m+k}) = F(t, y)$, $f_{m+k} = f(t)$, $y_{m+k} = y$, y – произвольная функция.

Выполнение условия (6) обеспечивает реализуемость процесса (8)–(10) построения $F(t, y)$, $f(t)$, начиная с

$$F_1(y_1) = y_1 - \Phi_1(B_1\Phi_1)^{-1}B_1y_1, \quad f_1(t) = \Phi_1(B_1\Phi_1)^{-1}\tilde{\mu}_1.$$

Подставляя (7) в (4), получим соответствующую функцию состояний

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)Q(\tau)[F(\tau, y) + f(\tau)]d\tau.$$

Для иллюстрации применения полученного алгоритма рассмотрена задача

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 4, \quad \int_0^2 x(\tau)d\tau = 0,$$

которая сведена к соответствующей эквивалентной интегральной задаче

$$x(t) = 3 + \int_0^t u(\tau)d\tau, \quad \int_0^1 u(\tau)d\tau = -1, \quad \int_0^2 u(\tau)d\tau = 1.$$

Ее решение получено в виде

$$u(t) = u_0(t) + v(t, \varphi),$$

где

$$u_0(t) = -\frac{5}{2} + 3t + \frac{15}{2}(3 - 7t + 2t^3), \quad v(t, \varphi) = \frac{15}{2}(3 - 7t + 2t^3) + \\ + \left(\frac{5}{3} \int_0^2 \varphi d\tau - \frac{4}{3} \int_0^1 \varphi d\tau - \int_0^2 \tau \varphi d\tau \right) + \frac{1}{2} \int_0^2 \varphi d\tau - 2 \int_0^1 \varphi d\tau + 2t \left(\int_0^1 \varphi d\tau - \frac{1}{2} \int_0^2 \varphi d\tau \right) + \varphi,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ – произвольная функция.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Решение многоточечной задачи управления с интегральными ограничениями типа равенств / В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 10. – С. 1386–1393.

2. **Моисеев, Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1971. – 424 с.