УДК 517.927.4

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ

Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Объектом исследования является задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \lambda Q_1(t)XQ_2(t)XQ_3(t) + F(t, X), \quad X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \quad (1)$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n}$, $A, B, Q_i \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ($i = 1, 2, 3$), $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что $Q_i(t) \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \neq 0$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, при этом правая часть в дифференциальном уравнении (1) ω – периодическая по t .

В случае $\lambda = 0$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4]. На основе применения качественных методов задача (1) в области $I \times \mathbb{R}^{n \times n}$ рассматривалась в [5]. Предлагаемая работа является обобщением и развитием [1, 2]. Данная задача рассматривается в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$D_{\rho} = \{(t, X) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| < \rho\}, \quad M = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau, \quad N = -\int_0^{\omega} B(\tau) d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta_i = \max_t \|Q_i(t)\| \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$h = \max_t \|F(t, 0)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad q(\rho, \varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \quad \varphi(\rho, \varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega \left[(\alpha + \beta)\omega + 2 \right] \rho, \quad q_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2 (\alpha + \beta)^2 + \gamma\omega L \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right],$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right] \rho^2,$$

$$\varphi_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2 (\alpha + \beta)^2 \rho + \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right] (L\rho + h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 - q_2(\rho)}{q_1(\rho)}, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $\delta = \delta_1\delta_2\delta_3$, $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_{ρ} ; Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho, \varepsilon)$.

Для построения решения задачи (1) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$\begin{aligned}
 X_{k+1}(t, \lambda) = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega A(\tau) d\tau \int_\tau^t \left[A(\sigma) X_k(\sigma, \lambda) + X_k(\sigma, \lambda) B(\sigma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \lambda Q_1(\sigma) X_{k-1}(\sigma, \lambda) Q_2(\sigma) X_{k-1}(\sigma, \lambda) Q_3(\sigma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + F(\sigma, X_{k-1}(\sigma, \lambda)) \right] d\sigma + \int_0^t \left[\int_\tau^\omega \left[A(\sigma) X_k(\sigma, \lambda) + X_k(\sigma, \lambda) B(\sigma) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \lambda Q_1(\sigma) X_{k-1}(\sigma, \lambda) Q_2(\sigma) X_{k-1}(\sigma, \lambda) Q_3(\sigma) + F(\sigma, X_{k-1}(\sigma, \lambda)) \right] d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \\
 & \left. - \int_0^\omega \left[\lambda Q_1(\tau) X_k(\tau, \lambda) Q_2(\tau) X_k(\tau, \lambda) Q_3(\tau) + F(\tau, X_k(\tau, \lambda)) \right] d\tau \right\}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\Phi^{-1} \int_0^\omega F(\tau, 0) d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (2), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_C \leq \frac{q \|X_{k+1} - X_k\|_C + q_2 \|X_k - X_{k-1}\|_C}{1 - q}, \quad k=1, 2, \dots \quad (3)$$

Оценка (3) дополнена следующими оценками:

$$\|X_1 - X_0\|_C \leq \gamma \omega h; \quad \|X_2 - X_1\|_C \leq \frac{1}{2} \gamma (\alpha + \beta) \omega^2 [(\alpha + \beta) \rho + h] + \gamma \omega (\varepsilon \delta \rho^2 + L \rho),$$

которые позволяют выразить оценку (3) через исходные данные задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкая, О. А.** Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя. Фізіка-матэматычныя навукі. – 2014. – № 1. – С. 43–50.
2. **Лаптинский, В. Н.** Построения и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 937–946.
3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
4. **Лаптинский, В. Н.** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.
5. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.