

УДК 517.927.4

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

И. И. МАКОВЕЦКИЙ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Изучается задача для матричного уравнения типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B_1(t)XB_2(t) + F(t, X) \quad (1)$$

с интегральным условием

$$\int_0^{\omega} [\Phi_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)\Phi_2(\tau)]d\tau = 0, \quad (2)$$

где $A, B_1, B_2, \Phi_1, \Phi_2 \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$. Предполагается, что функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde{\rho}}$ условию Липшица (локально); $F(t, 0) \neq 0$, $\omega > 0$.

Изучаются вопросы однозначной разрешимости и построения решения этой задачи в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$. Здесь $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$D_{\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \beta_i = \max_t \|B_i(t)\| \quad (i=1, 2),$$

$$h = \max_{t \in I} \|F(t, 0)\|,$$

$$\delta_i = \max_{t \in I} \|\Phi_i(t)\| \quad (i=1, 2), \quad b = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq \omega} \|U^{-1}(\tau)U(t)\|,$$

$$q = \frac{1}{2}\gamma(\delta_1 + \delta_2)(\beta_1\beta_2 + L)b^2\omega^2, \quad p = \frac{1}{2}\gamma(\delta_1 + \delta_2)b^2\omega^2h,$$

$$\tilde{\Phi}Z = (\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2)Z, \quad Z \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_{ρ} , $0 < \rho < \tilde{\rho}$,

$\tilde{\Phi}_1 Z = \int_0^{\omega} \Phi_1(\tau)U(\tau)d\tau Z(t)$, $\tilde{\Phi}_2 Z = \int_0^{\omega} U(\tau)Z(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau$; $U(0) = E$ – интегральная

матрица уравнения $dU/dt = A(t)U$; E – единичная матрица.

На основе применения метода регуляризации [3] в случае однозначной обратимости оператора $\tilde{\Phi}$ задача (1), (2) сведена к эквивалентному матричному интегральному уравнению

$$X(t) = U(t)\tilde{\Phi}^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} \Phi_1(\tau) U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma) (B_1(\sigma) X(\sigma) B_2(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma))) d\sigma \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\omega} U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma) (B_1(\sigma) X(\sigma) B_2(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma))) d\sigma \right) \Phi_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (3)$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: $\tilde{\Phi}$ однозначно обратим, $q < 1$, $p / (1 - q) \leq \rho$. Тогда в области D_{ρ} решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка

$$\|X\|_c \leq \frac{p}{1 - q}.$$

Это решение представимо как предел равномерно по $t \in I$ сходящейся к решению уравнения (3) последовательности матричных функций $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_{k+1}(t) = U(t)\tilde{\Phi}^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} \Phi_1(\tau) U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma) (B_1(\sigma) X_k(\sigma) B_2(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma))) d\sigma \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{\omega} U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(\sigma) (B_1(\sigma) X_k(\sigma) B_2(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma))) d\sigma \right) \Phi_2(\tau) d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $X_0(t) \in D_{\rho}$ – произвольная функция класса $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (4), при этом получена оценка

$$\|X - X_k\|_c \leq \frac{q^k \|X_1 - X_0\|_c}{1 - q}, \quad k = 1, 2, \dots$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
2. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G. V. R. L. Sarma // Mathematical Problems in Engineering, 6, 805903. – 2000. – 16 p.
3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.