

УДК 517.925

К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

Д. В. РОГОЛЕВ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Исследуется краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = & A_1(t)XC_1(t) + D_1(t)XK_1(t) + \Phi_1(t)X\Psi_1(t) + \\ & + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} = & A_2(t)YC_2(t) + D_2(t)YK_2(t) + \Phi_2(t)X\Psi_2(t) + \\ & + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t); \end{aligned} \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \quad (3)$$

где $t \in [0, \omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$, $D_i(t)$, $K_i(t)$, Φ_i , Ψ_i , $S_i(t)$, $P_i(t)$, $F_i(t)$ ($i=1,2$) определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$; $\omega > 0$.

Система уравнений (1) и (2) является многомерной системой дифференциальных уравнений специального вида. К таким уравнениям относятся матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения [1–4]. Данная система впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [1, 2]). Задача типа (1)–(3) рассмотрена в [1, 4].

В предлагаемой работе, являющейся обобщением [5, 6], с помощью метода [4, гл. 3] получены коэффициентные, т. е. явно в терминах задачи (1)–(3), достаточные условия её однозначной разрешимости на компакте и предложен удобный для применений алгоритм построения решения. Исследования выполнены в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций $T(t)$ с нормой $\|T\|_C = \max_t \|T(t)\|$.

Обозначения:

$$\begin{aligned} D = \{ (t, X, Y) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2 \}, \quad \tilde{A}_i(\omega) = \int_0^\omega A_i(\tau) d\tau, \quad \gamma_i = \|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\|, \\ \alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_t \|B_i(t)\|, \quad c_i = \max_t \|C_i(t)\|, \quad d_i = \max_t \|D_i(t)\|, \quad k_i = \max_t \|K_i(t)\|, \\ \varphi_i = \max_t \|\Phi_i(t)\|, \quad \psi_i = \max_t \|\Psi_i(t)\|, \quad \delta_i = \max_t \|S_i(t)\|, \quad \mu_i = \max_t \|P_i(t)\|, \quad h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \\ q_{11} = \gamma_1 \left[0,5\alpha_1 (\alpha_1 c_1 + d_1 k_1 + \varphi_1 \psi_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega^2 + \right. \\ \left. + (d_1 k_1 + \varphi_1 \psi_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega \right], \quad q_{12} = \gamma_1 \delta_2 \rho_1 \omega (0,5\alpha_1 \omega + 1), \\ q_{21} = \gamma_2 \mu_1 \rho_2 \omega (0,5\alpha_2 \omega + 1), \end{aligned}$$

$$q_{22} = \gamma_2 \left[0,5\alpha_2 (\alpha_2 c_2 + d_2 k_2 + \varphi_2 \psi_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega^2 + \right. \\ \left. + (d_2 k_2 + \varphi_2 \psi_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega \right],$$

где $t \in [0, \omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения алгебры $\mathfrak{B}(n)$.

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [2].

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\det \tilde{A}_i \neq 0$ ($i = 1, 2$);

2) $\gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \left[(\alpha_1 c_1 + d_1 k_1 + \varphi_1 \psi_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] \omega^2 + \right. \\ \left. + \left[(d_1 k_1 + \varphi_1 \psi_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] \omega \right\} \leq \rho_1,$

$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \left[(\alpha_2 c_2 + d_2 k_2 + \varphi_2 \psi_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] \omega^2 + \right. \\ \left. + \left[(d_2 k_2 + \varphi_2 \psi_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] \omega \right\} \leq \rho_2;$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - Q) > 0$, где $E = \text{diag}(1, 1)$, $Q = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D .

При доказательстве теоремы задача (1)–(3) сведена к эквивалентной интегральной задаче, к которой применима модификация [4] обобщённого принципа Каччопполи – Банаха сжимающих отображений.

Для построения решения интегральной задачи предложен алгоритм типа [6] с явной вычислительной схемой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. **Lucas, J.** Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / J. Lucas // Applied Mathematics Letters. – 1990. – Vol. 3, № 4. – P. 9–12.
3. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
5. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.
6. **Роголев, Д. В.** Периодическая краевая задача для системы матричных уравнений Риккати (левосторонняя регуляризация) / Д. В. Роголев // XIV Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г.: в 2 ч. – Минск: Беларус. навука, 2024. – Ч. 2. – С. 66–68.