

ВОЛНОВОЙ ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА

Ф. М. ТРУХАЧЕВ^{1, 2}, Н. В. ГЕРАСИМЕНКО¹,
М. М. ВАСИЛЬЕВ², О. Ф. ПЕТРОВ²

¹Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

²Объединенный институт высоких температур

Москва, Россия

Введение. Солитонном принято называть нелинейную уединенную волну, которая распространяется в пространстве с постоянными скоростью, амплитудой и формой благодаря балансу нелинейных эффектов и дисперсии. Феномен впервые описан в 1884 г. Джоном Скотом Расселом, наблюдавшим его на поверхности водного канала в Глазго (Великобритания) [1]. Математическое описание солитонов появилось почти полвека спустя [2] в результате работ Дидерика Кортевега и Густава де Вриза. Соответствующая статья вызвала заметный резонанс в волновом научном сообществе. В частности, солитоны разрушили монополию линейных волн на область малых амплитуд. Действительно, из анализа уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ) следует, что его солитонные решения вида $f(x) \sim A \cdot \text{sech}^2(x)$ остаются нелинейными при любой амплитуде, даже сколь угодно малой. Дальнейшие исследования показали, что солитоны являются универсальным явлением природы, описывающим свойства нелинейных ионно-звуковых волн [3–5], магнитозвуковых волн [3–6], электрических токов в нелинейных линиях передачи [7–10] и др. (см., например, [11, 12]). Изучению свойств солитонов посвящено большое количество научных работ, но физика нелинейных волн и солитонов далека от завершения.

Цель работы – исследовать способность уединенных волн переносить вещество наряду с энергией и импульсом. С одной стороны, солитон – это волна. Принято считать, что материальные волны (механические и электромагнитные) переносят импульс и энергию, но не переносят вещество. Последнее утверждение справедливо только для линейных волн (с гармоническим профилем и бесконечно малой амплитудой). При этом для волн конечной амплитуды (даже гармонических) начинают проявляться нелинейные эффекты, приводящие к возникновению ненулевого дрейфа вещества. Данное нелинейное явление было открыто в 1847 г. Джорджем Стоксом (и названо дрейфом Стокса) [13]. Скорость дрейфа для гармонической волны малой, но конечной амплитуды a пропорциональна ее квадрату: $v_{St} \sim ka^2/\omega$, где k , ω – волновое число и частота соответственно (см. [14, уравнение (2.20)] для монохроматической акустической волны). Результаты анализа явлений переноса нелинейными периодическими волнами можно найти в [15–17], где рассмотрены волны на поверхности воды, а также ионно-звуковые волны. Во всех этих случаях отмечалось наличие потока вещества, индуцированного волнами. В рассмотренных случаях движение частиц представляло собой суперпозицию дрейфового и колебательного движений. Как известно, уменьшение амплитуды периодической волны ведет к

линеаризации волнового процесса и последующему быстрому (квадратичному) уменьшению дрейфовой составляющей. Таким образом, для гармонических волн малой амплитуды этим нелинейным эффектом обычно пренебрегают, а стандартное определение понятия волны становится справедливым.

В случае солитонов нелинейностью пренебречь нельзя. В настоящее время имеется ряд работ, посвященных исследованию переноса вещества солитонами. Одной из первых работ в этой области является статья Добролюбова «О переносе жидкости одиночной поверхностной волной», в которой экспериментально и теоретически показано, что выпуклая уединенная волна (солитон) на поверхности воды может переносить жидкость в направлении своего движения. Перенос имеет характер последовательного смещения воды на конечное расстояние. Объем переносимой воды равен объему, содержащемуся в выпуклой части солитона [18]. Этот результат был подтвержден (на базе уравнения Кортевега – де Вриза) в [19]. Кроме того, в [19] показано, что перенос воды является неотъемлемым (фундаментальным) свойством КдВ солитонов. Сходная задача для внутренней океанической уединенной волны рассматривалась в [20], где показано, что солитоны могут перемещать водные слои на дистанцию в сотни метров в направлении движения волны. В [21] с использованием уравнения Власова рассчитаны параметры нелинейных ионно-звуковых волн и получена формула для плотности ионных токов j_i , индуцированных ионно-звуковыми солитонами в пределе малых амплитуд. В [22] (см. также обзор [23]) в рамках гидродинамической модели получена формула, описывающая j_i для солитонов произвольных амплитуд. Проведен также анализ свойств ионных токов, индуцированных солитонами. В частности, показано, что солитоны ИА приводят к возникновению импульсов ионного тока положительной полярности, соответствующих однонаправленному транспорту ионов. Модель, учитывающая захваченные (резонансные) электроны [24], позволила рассчитать электронные токи, индуцированные ионно-звуковыми солитонами. В [25] был введен термин «солитонные токи» для описания токов, индуцированных солитонами в плазме (в [26] этот термин использовался для описания течений в многослойных жидкостях). Способность солитонов переносить вещество использовалась в [27] для объяснения механизма разделения вещества и антивещества в ранней Вселенной. В [28, 29] было изучено влияние солитонов на функции распределения фоновой плазмы. Было показано, что изначально равновесные (максвелловские) функции распределения ионов приобретают асимметричную «пучковую» форму в областях плазмы, занятых ионно-звуковыми солитонами. После прохождения солитона функции распределения снова возвращаются к равновесной форме. Наконец, в [30] солитонный перенос вещества подтвержден для электромагнитной волновой моды в нелинейной линии передач.

Далее представлено обобщение указанных результатов.

Дрейф Стокса. Рассмотрим периодическую ионно-звуковую волну с гармоническим профилем. Для ионной скорости данное выражение с точностью до фазы можно переписать в виде

$$v_i(x, t) = \hat{v}_{i1} \sin(kx - \omega t). \quad (1)$$

Очевидно, что средняя скорость движения ионов равна нулю. Однако в случае, если амплитуда ионно-звуковой волны хоть и мала, но отлична от нуля, возникает дрейф ионов в положительном направлении, который получил название «дрейф Стокса» [13]. Рассмотрим монохроматическую волну с заданной частотой и волновым числом как эйлерово поле скорости (1). Лагранжева координата произвольно выбранного иона $X(t)$ в таком случае удовлетворяет уравнению $dX/dt = v_i(X, t) = a \cdot \sin(kX - \omega t)$. Здесь $a \approx \hat{v}_{i1}$ – амплитуда. Данное уравнение является обычным нелинейным дифференциальным уравнением, которое в общем случае требует численного интегрирования (например, с помощью стандартного метода Рунге – Кутты четвертого порядка). Для случая малых амплитуд, который математически можно выразить неравенством $v_i \ll \omega/k$, можно найти приближенное решение в виде

$$X(t) = \frac{a}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t) + \frac{ka^2}{2\omega^2} \sin[2(kX_0 - \omega t)] + \frac{ka^2}{2\omega} t. \quad (2)$$

Последний член в правой части уравнения (2) описывает дрейф Стокса, а величина $v_{St} = ka^2/2\omega$ есть средняя скорость поступательного движения ионов в положительном направлении. Очевидно, что дрейф Стокса является нелинейным эффектом второго порядка. Его физическая природа заключается в следующем: под воздействием гармонической продольной волны ионы начинают совершать продольное колебательное движение. При этом ион проводит больше времени в области переднего фронта волны по сравнению с задним фронтом. С уменьшением амплитуды волны величина v_{St} довольно быстро (квадратично) уменьшается и для ионно-звуковых волн малой амплитуды дрейф Стокса становится пренебрежимо малым. На рис. 1 (символами «квадрат») отображена зависимость среднего смещения ионов за период под действием гармонической ионно-звуковой волны конечной амплитуды $\Delta X(a) = \frac{ka^2}{2\omega} \tau$, где τ – период волны.

Солитонный перенос вещества. Свойства ионного тока, индуцируемого ионно-звуковыми солитонами, обсуждались в [22–24]. Там было показано, что солитоны сжатия ($\Delta N > 1$) переносят ионную популяцию в направлении своего движения. При движении группы солитонов возникает ионный ток с постоянной составляющей, что соответствует дрейфу ионной фракции. Плотность ионного тока, индуцируемого солитоном, можно найти по известной формуле $j_i = en_i v_i^*$, где v_i^* – размерная скорость ионов. Для нормированной плотности ионных токов J_i , индуцированных солитонами, можно записать выражение $J_i = M(N_i - 1)$ (см. [22–24]) или

$$J_i(X, t) = \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 2\Phi(X, t)}} - M. \quad (3)$$

Ионный ток имеет форму положительного импульса [22–24]. Полный заряд, перемещенный солитоном через единичное сечение в начале координат, можно найти по формуле

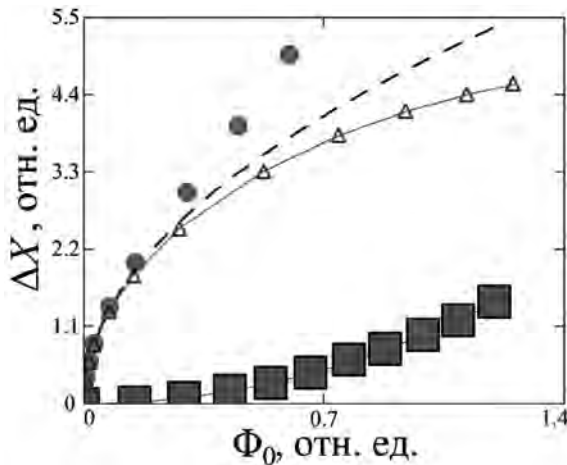


Рис. 1. Зависимость дистанции переноса фоновых ионов (среднего смещения ионов) от амплитуды: для гармонической при $k = 0,2$, $\omega = 0,2$ – символы «■»; для ионно-звукового солитона – треугольники (из анализа динамики пробного иона), сплошная кривая (из численного анализа ионных токов, индуцированных солитоном), штриховая кривая (аналитически), символы «●» (из связи эйлера и лагранжева описания движения)

ковых солитонов сжатия и им нельзя пренебрегать при любых амплитудах (в отличие от гармонических волн). Полученные результаты являются общими для широкого класса солитонов [18–30].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Russell, J. S.** Report of the Committee on Waves / J. S. Russell // Appointed by the British Association at Bristol in 1836 (R. and JE Taylor). – 1838.
2. **Korteweg, D. J.** Philosophical Magazine and Journal of Science 39, 422 / D. J. Korteweg, G. De Vries. – 1895.
3. **Sagdeev, R.** Reviews of plasma physics / R. Sagdeev, M. Leontovich. – 1966.
4. **Washimi, H.** Physical Review Letters 17, 996 / H. Washimi, T. Taniuti. – 1966.
5. **Tran, M.** Physica Scripta, 20, 317 / M. Tran. – 1979.
6. **Hussain, S.** Physics of Plasmas 24, 032106 / S. Hussain, H. Hasnain. – 2017.
7. Journal of applied physics 64, 3277 / H. Ikezi, S. Wojtowicz, R. Waltz [et al.]. – 1988.
8. **Giambo, S.** American Journal of Physics 52, 238 / S. Giambo, P. Pantano, P. Tucci. – 1984.
9. **Cher, K. D.** 11th International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) / K. D. Cher, P. Tatarinov. – 2012.
10. **Kuusela, T.** Chaos, Solitons & Fractals 5, 2419 / T. Kuusela. – 1995.
11. **Newell, A. C.** Solitons in mathematics and physics (SIAM) / A. C. Newell. – 1985.
12. **Manukure, S.** Partial Differential Equations in Applied Mathematics 4, 100140 / S. Manukure, T. Booker. – 2021.
13. **Stokes, G. G.** Trans. Cam. Philos. Soc. 8, 441 / G. G. Stokes. – 1847.

$$Q_i = \int_{-\infty}^{\infty} J_i(0, t) dt. \quad (4)$$

Зная ток, используя (3), можно найти дистанцию переноса ионов одним солитоном:

$$\Delta X = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 2\Phi(0, t)}} - M \right) dt, \quad (5)$$

где $\Phi(0, t)$ – профиль солитона.

Далее, используя уравнение КдВ, можно получить

$$\Delta X(\Phi_0) = 2\sqrt{6a}, \quad (6)$$

где a – амплитуда солитона.

Зависимость (6) показана на рис. 1 штриховой кривой. Из формулы (6) в явном виде следует аппроксимация $\Delta X(\Phi_0) \sim \sqrt{\Phi_0}$. Таким образом, перенос вещества является неотъемлемым свойством ионно-звуковых солитонов сжатия и им нельзя пренебрегать при любых амплитудах

14. **Falkovich, G.** Fluid mechanics: A short course for physicists (Cambridge University Press) / G. Falkovich. – 2011.
15. **Fenton, J.** Computers & Geosciences 14, 357 / J. Fenton. – 1988.
16. **Konno, K.** Journal of the Physical Society of Japan 46, 1907 / K. Konno, T. Mitsuhashi, Y. H. Ichikawa. – 1979.
17. **Dubinov, A.** Physics of Plasmas 28, 083702 / A. Dubinov, I. Kitayev, D. Kolotkov. – 2021.
18. **Добролюбов, А. И.** О переносе жидкости одиночной поверхностной волной / А. И. Добролюбов // Водное хозяйство и гидротехническое строительство: Респ. межведомств. сб. – Минск: Выш. шк., 1985. – Вып. 14.
19. Nonlinear Phenomena in Complex Systems 24 (7), 398 / F. M. Trukhachev, N. V. Gerasimenko, M. M. Vasiliev, O. F. Petrov. – 2024.
20. **Lamb, K. G.** JGR 102 (C8). 18, 641 / K. G. Lamb. – 1997.
21. **Aleshin, I.** Moscow University Physics Bulletin 55(1), 9 / I. Aleshin, D. Peregodov. – 2000.
22. **Trukhachev, F.** Cosmic Research 54, 351 / F. Trukhachev, A. Tomov. – 2016.
23. **Trukhachev, F.** High Temperature 58, 520 / F. Trukhachev, M. Vasiliev, O. Petrov. – 2020.
24. Technical Physics Letters 44, 494 / F. Trukhachev, A. Tomov, M. Mogilevsky, D. Chugunin. – 2018.
25. Phys. Rev. E 100, 063202 / F. Trukhachev, M. Vasiliev, O. Petrov, E. Vasilieva. – 2019.
26. **Bole, J.** Offshore Technology Conference (One Petro) / J. Bole, C. Ebbesmeyer, R. Romea. – 1994.
27. **Dubinov, A. E.** Chaos, Solitons & Fractals 152, 111391 / A. E. Dubinov, X. I. Lebedeva. – 2021.
28. **Trukhachev, F.** Plasma Physics Reports 48, 1116 / F. Trukhachev, M. Vasiliev, O. Petrov. – 2022.
29. Phys. Plasm. 30 / F. Trukhachev, N. Gerasimenko, M. Vasiliev, O. Petrov. – 2023.
30. Bulletin of the Lebedev Physics Institute 51 (12), 576 / F. M. Trukhachev, N. V. Gerasimenko, M. M. Vasiliev, O. F. Petrov. – 2024.