

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности 7-06-0716-03 «Приборостроение»
очной и заочной форм обучения*



Могилев 2025

УДК 621:537
ББК 22.213:31.291
Т38

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «12» декабря 2024 г.,
протокол № 4

Составитель д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Хомченко

Рецензент канд. техн. наук, доц. Н. В. Герасименко

В методических рекомендациях представлен краткий теоретический материал для самостоятельной подготовки к практическим занятиям по курсу технической электродинамики. Приводятся примеры решения задач по основам электродинамики и задания для самостоятельного выполнения. В приложении указаны некоторые физические величины и постоянные.

Учебное издание

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Ответственный за выпуск	А. В. Хомченко
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2025

Содержание

Основные обозначения	4
1 Основные уравнения электродинамики.....	5
2 Электромагнитные волны	14
3 Примеры решения задач.....	22
4 Задачи для самостоятельной работы.....	26
Список литературы	29
Приложение А	30

Основные обозначения

$\dot{P}$ – комплексная мощность;

i – мнимая единица ($i^2 = -1$);

$\vec{j}$ – плотность тока;

$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орты соответствующих переменных декартовой системы координат;

Z_c – характеристическое сопротивление;

α – коэффициент фазы;

β – коэффициент ослабления;

ρ – коэффициент распространения;

Δ – глубина проникновения;

ϵ, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;

$\dot{\epsilon}, \dot{\mu}$ – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;

$\vec{P}$ – вектор Пойнтинга;

$\dot{\vec{P}}$ – комплексный вектор Пойнтинга;

ρ_q – объемная плотность зарядов;

σ – поверхностная плотность заряда.

Сопряженные комплексные величины обозначаются символом «*» над буквенным обозначением.

Средние за период величины обозначаются нижним индексом «*ср*», например $P_{ср}$ – среднее за период значение вектора Пойнтинга.

1 Основные уравнения электродинамики

1.1 Электромагнитные поля

Напряженность электрического поля. Напряженность электрического поля $\vec{E}$ определяется как сила $\vec{F}$, с которой электрическое поле действует на единичный точечный положительный заряд: $\vec{E} = \vec{F} / q$. Заряд q должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменением распределения зарядов, создающих исследуемое поле. Сила взаимодействия зарядов, а следовательно, и напряженность электрического поля в различных средах различны, т. к. под действием электрического поля вещество поляризуется, в результате чего появляется дополнительное электрическое поле и суммарное поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме. Для количественной характеристики поляризации вводят вектор поляризованности $\vec{P}$, определяемый как предел отношения суммарного дипольного момента вещества в объеме ΔV к величине этого объема при $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (1.1)$$

При не очень сильном внешнем поле величину индуцированного дипольного момента можно считать пропорциональной напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (1.2)$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость среды;
 ϵ_0 – электрическая постоянная.

При рассмотрении многих процессов удобно ввести вектор электрического смещения $\vec{D}$, связанный с вектором $\vec{P}$ соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.3)$$

С учетом (1.2), выражение (1.3) можно представить в виде

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1.4)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \kappa)$.

Так как диэлектрическая восприимчивость вакуума считается равной нулю ($\kappa = 0$), то электрическую постоянную ϵ_0 можно рассматривать как абсолютную диэлектрическую проницаемость вакуума.

Под действием электрического поля в среде, обладающей проводимостью, возникает электрический ток (ток проводимости), распределение которого удобно характеризовать вектором плотности тока проводимости

$$\vec{j} = \vec{i}_0 \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (1.5)$$

где $\vec{i}_0$ – единичный вектор, показывающий направление тока (направление движения положительных зарядов) в рассматриваемой точке;

ΔS – плоская площадка, расположенная перпендикулярно вектору $\vec{i}_0$;

ΔI – ток проводимости, протекающий через ΔS .

Вектор $\vec{j}$ связан с вектором $\vec{E}$ соотношением, которое представляет собой закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (1.6)$$

где γ – удельная проводимость среды.

Векторы магнитного поля. Сила, с которой электромагнитное поле воздействует на точечный электрический заряд, зависит не только от местоположения и величины заряда, но и от скорости его движения. Эту силу обычно раскладывают на две составляющие: электрическую и магнитную.

Электрическая сила не зависит от движения заряда:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}. \quad (1.7)$$

Магнитная составляющая силы F_L зависит от величины и направления скорости v движения заряда и всегда перпендикулярна ей:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (1.8)$$

где $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, характеризующий силовое воздействие магнитного поля. Как видно, магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный точечный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям $\vec{B}$.

Магнитное поле действует, конечно, не только на отдельные движущиеся заряды, но и на проводники, по которым течет электрический ток. Например, сила $\vec{F}$, с которой однородное магнитное поле действует на прямолинейный проводник длиной l с током I , определяется экспериментально установленным законом

$$\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}]. \quad (1.9)$$

Если в магнитное поле внести достаточно малую плоскую рамку, обтекаемую током I и характеризуемую магнитным моментом $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, где $\vec{n}$ – орт нормали к плоскости рамки, то на нее будет действовать момент сил $\vec{M}$, стремящийся повернуть рамку таким образом, чтобы вектор магнитного момента рамки совпадал с направлением вектора $\vec{B}$.

Величина вектора $\vec{B}$ зависит от свойств среды, т. к. под действием магнит-

ного поля вещество намагничивается и суммарное магнитное поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме. Намагниченность среды характеризуется вектором намагниченности $\vec{J}$, который определяют как суммарный магнитный момент единицы объема вещества:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\sum_{\Delta V} \vec{p}_m / \Delta V \right). \quad (1.10)$$

При этом вектор намагниченности связан с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (1.11)$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

При не очень сильном внешнем магнитном поле можно считать, что вектор намагниченности пропорционален вектору $\vec{H}$:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (1.12)$$

где χ – магнитная восприимчивость среды.

Подставляя выражение (1.12) в (1.11), получаем

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.13)$$

где μ – магнитная проницаемость среды, $\mu = \mu_0 (1 + \chi)$.

Магнитная восприимчивость вакуума считается равной нулю, поэтому магнитную постоянную μ_0 можно рассматривать как магнитную проницаемость вакуума.

Графическое изображение полей. Векторное поле обычно изображают с помощью линий, которые в каждой точке касаются характеризующего его вектора (рисунок 1.1). Их называют векторными линиями. Чтобы дать представление о величине поля, векторные линии проводят так, чтобы их число на единицу площади, расположенной перпендикулярно линиям, было пропорционально величине вектора. Там, где поле сильнее, линии проводят гуще, там, где оно слабее, – реже.



Рисунок 1.1 – Силовые линии векторного поля

1.2 Уравнения Максвелла

Первое уравнение Максвелла. Для описания электромагнитного поля было введено шесть векторов $\vec{E}$, $\vec{P}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$ и $\vec{H}$. Так как векторы электрического поля $\vec{E}$, $\vec{P}$, $\vec{D}$ связаны соотношением (1.3), а векторы магнитного поля $\vec{B}$, $\vec{M}$, $\vec{H}$ – соотношением (1.11), то для определения электромагнитного поля можно ограничиться нахождением четырех векторов $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, в линейных изотропных средах электромагнитное поле может быть полностью определено двумя векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Все электромагнитные процессы, относящиеся к макроскопической электродинамике, подчиняются законам, впервые сформулированным в виде дифференциальных уравнений Д. Максвеллом. Эти уравнения были получены в результате обобщения накопленных к тому времени экспериментальных данных и называются уравнениями Максвелла.

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока для магнитного поля: циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля по замкнутому контуру ℓ равна току I , пронизывающему данный контур:

$$\oint_{\ell} H_l dl = I, \quad (1.14)$$

где dl – элемент контура, направленный по касательной к контуру ℓ ;

H_l – проекция вектора $\vec{H}$ на направление dl , которое выбирается в соответствии с направлением обхода контура. В качестве контура ℓ может быть взят любой одновитковый замкнутый контур.

Если распределение тока I внутри контура неравномерное, то

$$I = \int_S j_n dS, \quad (1.15)$$

где j_n – проекция вектора плотности тока проводимости $\vec{j}$ на направление нормали к поверхности S ;

S – произвольная поверхность, опирающаяся на контур ℓ .

Подставляя (1.15) в (1.14), получаем

$$\oint_{\ell} H_l dl = \int_S j_n dS. \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) неприменимо в случае переменных полей, и Максвелл дал обобщенную формулировку закона полного тока. Он ввел понятие тока смещения и, основываясь на работах Фарадея, предположил, что в случае переменных полей ток смещения, с точки зрения образования магнитного поля, равноценен току проводимости. Плотность тока смещения определяется как

$$\vec{j}_{см} = \partial \vec{D} / \partial t. \quad (1.17)$$

Подчеркнем, что ток проводимости и ток смещения в вакууме имеют различную физическую сущность. Ток проводимости – это упорядоченное движение свободных электрических зарядов. Ток смещения в вакууме соответствует только изменению электрического поля и не сопровождается каким-либо движением свободных электрических зарядов. В вакууме $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ и уравнение (1.17) принимает вид $\vec{j}_{см} = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$. Ток смещения в вакууме не сопровождается выделением тепла.

Рассмотрим общий случай, когда ток смещения возникает в какой-либо среде. Вектор электрического смещения связан с векторами $\vec{E}$ и $\vec{P}$ соотношением (1.4). Подставляя это соотношение в (1.17), получаем

$$\vec{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Первое слагаемое в правой части вышеприведенной формулы совпадает с выражением для плотности тока смещения в вакууме, т. е. определяет как бы «чистый» ток смещения, не связанный непосредственно с движением зарядов. Второе слагаемое определяет ток смещения, обусловленный движением зарядов, связанных с атомами вещества, в результате действия переменного поля. Эту составляющую тока смещения можно рассматривать как своеобразный ток проводимости, т. к. она, по существу, обусловлена упорядоченным перемещением связанных зарядов. На ее поддержание в реальной среде затрачивается некоторая часть энергии электромагнитного поля.

Как уже указывалось ранее, Максвелл предположил, что уравнение (1.16) имеет частный характер, т. к. не учитывает токов смещения. Для того чтобы оно было справедливым и в случае переменных полей, нужно в его правую часть, кроме тока проводимости I , ввести ток смещения $I_{см}$:

$$\oint_{\ell} H_l dl = I + I_{см}. \quad (1.18)$$

Ток смещения выражается через плотность тока смещения $\vec{j}_{см}$ соотношением

$$I_{см} = \int_S j_{см_n} dS = \int_S \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS. \quad (1.19)$$

Подставляя формулы (1.15) и (1.19) в (1.18), получаем

$$\oint_{\ell} H_l dl = \int_S j_n dS + \int_S \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.20) представляет собой *первое уравнение Максвелла в интегральной форме*.

Максвеллом этот закон был сформулирован также в дифференциальной форме. Для перехода к дифференциальной форме можно воспользоваться теоремой Стокса и, заменяя в уравнении (1.20) циркуляцию вектора $\vec{H}$ интегралом от $\text{rot } \vec{H}$ по поверхности S , получить

$$\int_S \text{rot} H_n dS = \int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n dS. \quad (1.21)$$

Так как S – произвольная поверхность, то выполнение равенства (1.21) возможно только в том случае, если

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.22)$$

Равенство (1.22) называют **первым уравнением Максвелла**. Векторное уравнение (1.22) эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в декартовой системе координат XYZ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона индукции Фарадея, который формулируется следующим образом: в замкнутом контуре возникает ЭДС индукции, равная скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$\varepsilon = -d\Phi/dt. \quad (1.24)$$

Знак «минус» в правой части выражения (1.24) означает, что возникающая в контуре ЭДС всегда стремится воспрепятствовать изменению потока, пронизывающего данный контур. Это положение известно под названием «правило Ленца».

Ранее считалось, что уравнение (1.24) справедливо только в случае наличия проводящего контура. Максвелл предположил, что это уравнение будет справедливо и в том случае, когда контур отсутствует.

Пусть ℓ – произвольный одновитковый замкнутый контур, а S – произвольная поверхность, опирающаяся на этот контур. Электродвижущая сила,

наводимая в этом контуре,

$$\varepsilon = \oint_{\ell} E_l dl, \quad (1.25)$$

а магнитный поток Φ связан с вектором $\vec{B}$ соотношением

$$\Phi = \int_S B_n dS, \quad (1.26)$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности S , образующий правовинтовую систему с направлением обхода контура ℓ .

Подставляя (1.25) и (1.26) в (1.24), получаем

$$\varepsilon = \oint_{\ell} E_l dl = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS. \quad (1.27)$$

Соотношение (1.27) называют *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме*. Максвеллом это уравнение было сформулировано также в дифференциальной форме.

Предположим, что контур ℓ неподвижен и не изменяется со временем. В этом случае производную по времени в правой части уравнения (1.27) можно внести под знак интеграла. Преобразовывая левую часть равенства (1.27) по теореме Стокса, имеем

$$\int_S \text{rot} E_n dS = -\int_S \frac{dB_n}{dt} dS, \quad (1.28)$$

откуда

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.29)$$

Равенство (1.29) называют *вторым уравнением Максвелла*. Переходя к декартовой системе координат XYZ , получаем три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла. Третье уравнение

Максвелла является обобщением теоремы Гаусса для электрического поля на случай переменных процессов:

$$\oint_S D_n dS = q, \quad (1.31)$$

т. е. Максвелл предположил, что эта теорема справедлива и в случае переменных полей.

Заряд q может быть произвольно распределен внутри поверхности S , поэтому в общем случае

$$q = \int_V \rho_q dV, \quad (1.32)$$

где ρ_q – объемная плотность зарядов;

V – объем, ограниченный поверхностью S .

Подставляя (1.32) в (1.31), получаем

$$\oint_S D_n dS = \int_V \rho_q dV. \quad (1.33)$$

Уравнение (1.33) обычно называют *третьим уравнением Максвелла в интегральной форме*. Это равенство можно записать в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_q. \quad (1.34)$$

Соотношение (1.34) принято называть *третьим уравнением Максвелла*. В декартовой системе координат оно записывается в виде

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_q. \quad (1.35)$$

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме совпадает с теоремой Гаусса для магнитного поля, которую можно сформулировать следующим образом: поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность S равен нулю, т. е.

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) называют *четвертым уравнением Максвелла в интегральной форме*. В дифференциальной форме уравнение (1.36) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.37)$$

Уравнение (1.37) представляет собой четвертое уравнение Максвелла.

Анализ электромагнитных процессов возможен только на основе системы уравнений электродинамики. Такой системой являются уравнения Максвелла

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_q; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.38}$$

совместно с уравнениями, связывающими векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{j}$ и $\vec{E}$, которые в случае изотропных сред имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E}; \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}; \\ \vec{j} &= \gamma \vec{E}.\end{aligned}\tag{1.39}$$

1.3 Уравнение непрерывности и закон сохранения зарядов

Из первого и третьего уравнений Максвелла вытекает важное соотношение, называемое уравнением непрерывности,

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0.\tag{1.40}$$

Правая часть уравнения (1.22) представляет собой сумму плотностей тока проводимости и тока смещения, т. е. плотность полного тока $j_{\text{полн}} = j + dD/dt$, поэтому уравнение (1.40) эквивалентно условию $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{полн}} = 0$. Равенство нулю дивергенции какого-либо вектора означает непрерывность линий этого вектора. Следовательно, уравнение (1.40) показывает, что линии плотности полного тока являются непрерывными, в то время как линии плотности токов проводимости и смещения могут иметь начало и конец. Например, линии плотности тока проводимости начинаются в тех точках пространства, где плотность зарядов уменьшается, и оканчиваются там, где плотность зарядов возрастает.

2 Электромагнитные волны

2.1 Уравнения Максвелла в комплексной форме

Все реальные электромагнитные процессы можно представить либо в виде суммы дискретных гармонических колебаний, либо в виде непрерывного спектра гармонических колебаний. Поэтому изучение гармонических во времени электромагнитных полей представляет практический интерес. Такие поля часто называют также *монохроматическими*. Анализ гармонических процессов существенно упрощается при использовании метода комплексных амплитуд. В этом случае вместо любой скалярной функции, изменяющейся по закону

$$\psi = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A – амплитуда;

φ – начальная фаза;

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (f и T – частота и период гармонического колебания), вводится в рассмотрение комплексная функция

$$\dot{\psi} = A e^{i(\omega t + \varphi)} = \dot{A} e^{i\omega t}.$$

Величину $\dot{A} = A e^{i\varphi}$ принято называть комплексной амплитудой функции $\dot{\psi}$. Для перехода от комплексной функции $\dot{\psi}$ к исходной функции ψ нужно взять от $\dot{\psi}$ реальную часть:

$$\psi = \operatorname{Re} \dot{\psi} = \operatorname{Re}(\dot{A} e^{i\omega t}).$$

Уравнения Максвелла являются *линейными дифференциальными уравнениями*. Поэтому при изучении монохроматических электромагнитных полей можно вместо векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ рассматривать комплексные векторы

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t) \quad \text{и} \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m \exp(i\omega t).$$

Комплексные амплитуды $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ определяются выражениями вида $\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m e^{i\varphi}$. Аналогичные соотношения выполняются для вектора $\dot{\vec{H}}_m$.

Перейдем в системе уравнений Максвелла (1.38) к комплексным векторам $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$. При этом первое уравнение Максвелла примет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}} + i\omega \dot{\vec{D}}.$$

Учитывая, что $\dot{\vec{j}} = \gamma \dot{\vec{E}}$, а $\dot{\vec{D}} = \epsilon \dot{\vec{E}}$, приходим к соотношению

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + i\omega \varepsilon \dot{\vec{E}} = i\omega \varepsilon \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega \varepsilon}\right) \dot{\vec{E}}.$$

Вводя обозначение

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega \varepsilon}\right), \quad (2.1)$$

получаем

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = i\omega \dot{\varepsilon} \dot{\vec{E}}. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) является первым уравнением Максвелла для монохроматического поля. Величина $\dot{\varepsilon}$, определяемая формулой (2.1), характеризует электрические свойства среды и называется *комплексной диэлектрической проницаемостью* среды. Ее значение зависит от частоты. Входящая в (2.1) величина $\gamma/\omega \varepsilon$ равна *отношению амплитуд плотностей тока проводимости и тока смещения* и называется тангенсом угла электрических потерь:

$$\gamma/\omega \varepsilon = \operatorname{tg} \delta.$$

Аналогично

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \mu \dot{\vec{H}}. \quad (2.3)$$

Полученные уравнения называют *уравнениями Максвелла в комплексной форме записи*. Важной характеристикой в уравнении (2.1) является сомножитель при $\dot{\vec{E}}$

$$\gamma + i\omega \varepsilon = \dot{Y}, \quad (2.4)$$

который получил название *удельной комплексной проводимости среды*.

В электродинамике интерес для исследования представляют три возможных варианта соотношений параметров в (2.4):

- 1) $\gamma \gg \omega \varepsilon$ – проводящая среда (металлы);
- 2) $\gamma \ll \omega \varepsilon$ – непроводящая среда;
- 3) $\gamma \approx \omega \varepsilon$ – полупроводящая среда (например, раствор соли).

Уравнения Максвелла для общего случая полупроводящих сред имеют вид

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{Y} \dot{\vec{E}}; \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \mu \dot{\vec{H}}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим приведенные выше волновые уравнения в синусоидальных полях и сделаем прямой переход к их символической форме записи:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}(i\omega\mu\gamma - \omega^2\epsilon\mu). \quad (2.7)$$

Обозначим в (2.7) $i\omega\mu\gamma - \omega^2\epsilon\mu = \rho^2$. Тогда волновые уравнения для векторов $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ примут вид

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \rho^2 \dot{\vec{H}}; \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} = \rho^2 \dot{\vec{E}}. \quad (2.9)$$

Уравнения (2.8) и (2.9) носят название *уравнений Гельмгольца*. В этих уравнениях параметр $\rho = \sqrt{i\omega\mu\gamma - \omega^2\epsilon\mu} = \beta - i\alpha$ называют коэффициентом распространения; β – коэффициентом затухания; α – коэффициентом фазы.

2.2 Плоские электромагнитные волны

Рассмотрим простейший случай, когда вектор напряженности $\dot{\vec{E}}$ имеет одну составляющую $\dot{E}_x$. Упрощая задачу, будем также считать, что составляющая $\dot{E}_x$ является функцией одной переменной: $\dot{E}_x = f(z)$, $\dot{E}_x \neq f(x)$ и $\dot{E}_x \neq f(y)$.

Далее выясним, какие компоненты будет иметь вектор магнитной напряженности $\dot{\vec{H}}$ при принятых допущениях. Для этого раскроем второе уравнение Максвелла $\text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega\mu \dot{\vec{H}}$.

Для компоненты $\dot{H}_x$

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right).$$

Так как по условию задачи $\dot{E}_z = 0$ и $\dot{E}_y = 0$, то $\dot{H}_x = 0$. Далее для компоненты $\dot{H}_y$ получим

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right)$$

и при $\dot{E}_x = 0$ компонента $\dot{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}$.

Для компоненты $\dot{H}_z$, соответственно, получим

$$\dot{H}_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right),$$

но $\dot{E}_y = 0$, а $\dot{E}_x \neq f(y)$, поэтому компонента $\dot{H}_z = 0$.

Таким образом, если положить, что $\dot{E} = \dot{E}_x = f(z)$, то вектор $\dot{H}$ имеет одну составляющую $\dot{H}_y$, которая является также функцией одной координаты z : $\dot{H}_y = f(z)$.

Запишем теперь уравнение Гельмгольца для вектора $\dot{E}$ при принятых ранее допущениях:

$$\nabla^2 \dot{E} = \rho^2 \dot{E}, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} = \rho^2 \dot{E}_x.$$

Решением этого однородного дифференциального уравнения второго порядка является линейная комбинация двух экспоненциальных функций $\dot{E}_x = C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z}$. Пусть комплексному числу $C_2 e^{-\rho z}$ соответствует функция $E_2(\omega t, z)$. Если $\rho = \beta + i\alpha$, а $C_2 = E_{2m} e^{i\varphi}$, то

$$E_2 = E_{2m} e^{-\rho z} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) описывает *бегущую затухающую синусоидальную волну электрической напряженности*.

Известно, что бегущая волна характеризуется двумя параметрами: фазовой скоростью распространения и длиной волны. Фазовая скорость – это скорость, двигаясь с которой наблюдатель фиксирует постоянство фазы колебания. Так как фаза колебаний – аргумент синусоидальной функции $(\omega t - \alpha z + \varphi)$, то уравнение для определения фазовой скорости будет иметь вид $\frac{\partial}{\partial t}(\omega t - \alpha z + \varphi) = 0$ или $\omega - \alpha \frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Отсюда, учитывая, что $V_\phi = \frac{\partial z}{\partial t}$, фазовая скорость распространения волны направлена в сторону возрастания координаты z и равна

$$V_\phi = \omega / \alpha. \quad (2.11)$$

Так как длина волны λ – это расстояние, на котором фаза колебания изменяется на 2π , то справедливо, что $\omega t - \alpha z_1 + \varphi - \omega t + \alpha z_2 - \varphi = 2\pi$ или $\alpha(z_2 - z_1) = 2\pi$. Если $z_2 - z_1 = \lambda$, то длина волны определяется выражением

$$\lambda = 2\pi / \alpha. \quad (2.12)$$

Подставив (2.12) в (2.11), получим

$$V_\phi = \frac{\omega}{\alpha} \lambda = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T},$$

откуда

$$\lambda = V_{\phi} T.$$

Таким образом, длина волны – это расстояние, которое пробегает волна за время, равное одному периоду.

Рассмотрим распространение волны в вакууме. Коэффициент распространения $\rho = \sqrt{i\omega\mu_0\gamma - \omega^2\varepsilon_0\mu_0}$, при $\gamma = 0$ постоянная распространения $\rho = i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = i\alpha$. Отсюда коэффициент фазы $\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, а фазовая скорость $V_{\phi} = \omega / \alpha = 1 / \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Для вакуума $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Подставив эти значения, получаем $V_{\phi} = 3 \cdot 10^8$ (м/с) = 300000 км/с (скорость света), соответственно, длина волны на частоте $f = 50$ Гц будет $\lambda_f = V_{\phi} / 50 = 6000$ км.

Полученный результат говорит о том, что в вакууме плоские электромагнитные волны, независимо от частоты, распространяются без затухания со скоростью света. Особенность плоских волн состоит в том, что в каждой плоскости, сформированной векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (рисунок 2.1), амплитудные или действующие значения этих векторов остаются неизменными, а волны распространяются в сторону возрастания или убывания координаты z .

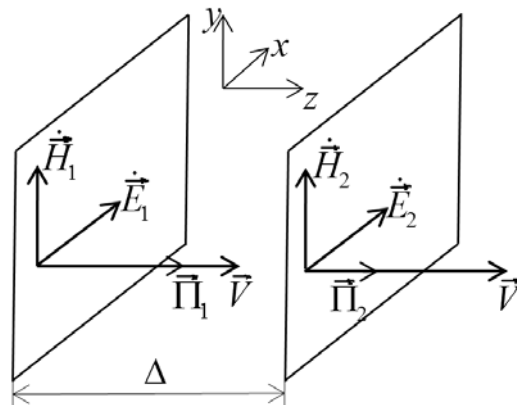


Рисунок 2.1 – Распространение электромагнитной волны в пространстве

Вектор Пойнтинга также направлен в сторону распространения волны, т. е. энергия электромагнитного поля передается в сторону распространения волны.

2.3 Плоские электромагнитные волны в проводящей среде

Для проводящей среды коэффициент распространения

$$\rho = \sqrt{i\omega\mu\gamma}. \quad (2.13)$$

Раскрыв (2.13), получим $\rho = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+i)$, а это значит, что коэффициент

затухания в проводящей среде определяется выражением

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}.$$

В инженерной практике проникновение плоской волны в проводящую среду характеризуется параметром, который называют *глубиной проникновения волны* Δ (Δ – это расстояние, на котором амплитуда волны при проникновении вглубь среды уменьшается в e раз).

Как видно, затухание волны $E = Ce^{-\rho z} = Ce^{-\beta z} e^{-i\alpha z}$ целиком определяется показателем экспоненциальной функции $e^{-\beta z}$. Согласно определению, Δ можно найти из уравнения $\frac{e^{-\beta z}}{e^{-\beta(z+\Delta)}} = e$, откуда $e^{\beta\Delta} = e$ и $\beta\Delta = 1$. Таким образом, глубина проникновения волны будет определяться выражением

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}.$$

При проникновении внутрь проводника волна затухает тем быстрее, чем больше частота, магнитная проницаемость и удельная проводимость среды. Для проводниковых материалов (алюминий, медь) на промышленной частоте $\Delta \cong 1...2$ см, для сплошной ферромагнитной среды, у которой магнитная проницаемость $\mu = 10^3...10^5$, глубина проникновения волны резко уменьшается и составляет доли миллиметра.

Если рассмотреть две плоскости (1 и 2) в проводящей среде, отстоящие на расстоянии Δ друг от друга (см. рисунок 2.1), то для этих плоскостей выполняется соотношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{H_1}{H_2} = e$, а поскольку $\vec{P}_1 = [\vec{E}_1 \times \vec{H}_1]$, $\vec{P}_2 = [\vec{E}_2 \times \vec{H}_2]$, то $\vec{P}_1 / \vec{P}_2 = e^2$.

2.4 Теорема и вектор Пойнтинга в комплексной форме

Пусть вновь, как и в стационарных полях, в некотором объеме $V(\omega, \mu, \gamma, \epsilon)$, ограниченном замкнутой поверхностью S (рисунок 2.2), сторонними токами $\vec{j}_{cm}$ возбуждено электромагнитное поле.

Закон сохранения энергии позволяет утверждать, что мощность источников частично расходуется на тепло и изменение электрической и магнитной энергий в объеме V , а оставшаяся часть излучается за пределы объема через поверхность, ограничивающую этот объем, $S_{ист} = S_V + S_{изл}$.

Установим соотношения для этих мощностей. В качестве исходных запишем уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + i\omega \epsilon \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{cm}; \quad (2.14)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \mu \dot{\vec{H}}. \quad (2.15)$$

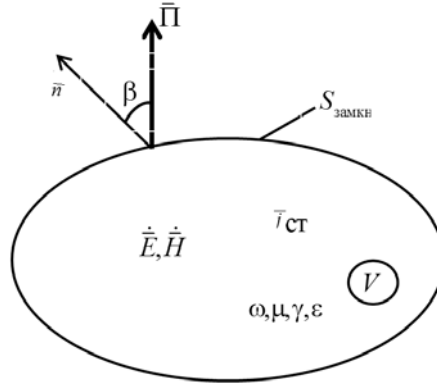


Рисунок 2.2 – Ориентация вектора Пойнтинга относительно поверхности, ограничивающей объем V

Перепишем уравнение (2.14) в сопряженных комплексах:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}^* = \gamma \dot{\vec{E}}^* - i\omega \epsilon \dot{\vec{E}}^* + \dot{\vec{j}}_{cm}^*. \quad (2.16)$$

Далее уравнение (2.15) скалярно умножим на $\dot{\vec{E}}^*$, уравнение (2.16) – на сопряженный комплекс $\dot{\vec{H}}^*$ и из (2.16) вычтем (2.15). Тогда

$$\dot{\vec{E}} \text{rot} \dot{\vec{H}}^* - \dot{\vec{H}} \text{rot} \dot{\vec{E}}^* = \gamma E^2 + j_{cm} \dot{E} + 2i\omega \left[\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\epsilon E^2}{2} \right]. \quad (2.17)$$

В квадратных скобках выражения (2.17) записана разность удельной магнитной и электрической энергий в объеме V , где 2ω – частота, с которой изменяются мгновенные значения этих энергий. Ранее было показано, что левая часть уравнения (2.17) раскрывается как $-\text{div}[\dot{\vec{E}}^* \times \dot{\vec{H}}]$. Отметим также, что комплексный вектор Пойнтинга определяется как

$$[\dot{\vec{E}}^* \times \dot{\vec{H}}] = \dot{\vec{\Pi}}. \quad (2.18)$$

Тогда (2.17) примет вид

$$-\text{div} \dot{\vec{\Pi}} = \gamma E^2 + j_{cm}^* \dot{E} + 2i\omega \left[\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\epsilon E^2}{2} \right]. \quad (2.19)$$

Интегрирование (2.19) по объему V позволяет получить

$$-\int_V \operatorname{div} \dot{\vec{P}} dV = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V j_{cm}^* \dot{\vec{E}} dV + 2i\omega \int_V \left[\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2} \right] dV. \quad (2.20)$$

К левой части (2.20) применим теорему Остроградского – Гаусса и перепишем в следующем виде:

$$-\oint_S \dot{\vec{P}}_n dS = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V j_{cm}^* \dot{\vec{E}} dV + 2i\omega \int_V \left[\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2} \right] dV.$$

Тогда

$$-\int_V \dot{\vec{E}} j_{cm}^* dV = \int_V \gamma E^2 dV + 2i\omega \int_V \left[\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2} \right] dV + \oint_S \dot{\vec{P}}_n dS. \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) и представляет собой теорему Пойнтинга для синусоидального электромагнитного поля. Здесь левая часть описывает комплексную мощность источников в объеме V . Как видно из (2.20) и (2.21), в объеме V происходит обменный процесс энергиями между электрическими и магнитными полями, а также между полями и источниками. Далее под реактивной мощностью будем понимать мощность в синусоидальном режиме, которая появляется при изменении электрической или магнитной энергии. При этом обмен энергиями происходит с двойной частотой относительно источника поля. Очевидно, что третье слагаемое – это мощность излучения, определяемая как поток вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность S .

Если в объеме V сторонние токи отсутствуют, теорема упрощается и принимает вид

$$-\oint_S \dot{\vec{P}}_n dS = \int_V \gamma E^2 dV + 2i\omega \int_V \left[\frac{\mu H^2}{2} - \frac{\varepsilon E^2}{2} \right] dV = P_V + jQ_V. \quad (2.21)$$

Таким образом, из (2.21) следует, что взятый с обратным знаком положительный поток комплексного вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность равен полной комплексной мощности, выделяемой в объеме V , ограниченном этой замкнутой поверхностью. Если, например, объем – это проводник, обтекаемый током I , то комплексное сопротивление этого проводника определяется как

$$Z = -\frac{\oint_S \dot{\vec{P}}_n dS}{I^2}.$$

Отметим, что теорема Пойнтинга в комплексной форме широко применяется при расчете и исследовании электротехнических устройств (электрических машин, трансформаторов, линий электропередач и т. д.).

3 Примеры решения задач

Задача 1. Записать первое и второе уравнения Максвелла в комплексной форме в декартовой системе координат.

Решение

Первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

где $\vec{H}$, $\vec{E}$ – векторы напряженности магнитного и электрического поля.

Векторное уравнение (3.1) эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в декартовой системе координат XVZ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Переходя к декартовой системе координат, из (3.2) получаем три скалярных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

Представляя векторы $\vec{j}$, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ в координатном виде, учитывая материальные уравнения и гармоническую временную зависимость векторов $\vec{D}$ и $\vec{B}$, для первого уравнения получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + i\omega D_x; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + i\omega D_y; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + i\omega D_z,\end{aligned}$$

а для второго уравнения, соответственно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu B_x; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu B_y; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega\mu B_z.\end{aligned}$$

Задача 2. Дано электрическое поле с неизменным направлением вектора $\vec{H}$. Показать, что вектор плотности полного тока перпендикулярен вектору напряженности магнитного поля.

Решение

Направим одну из осей декартовой системы координат (например, ось Z) параллельно вектору $\vec{H}$. Тогда

$$\vec{H} = \vec{z}_0 H_z,$$

а составляющие

$$H_y = H_x = 0.$$

Из третьего уравнения системы (3.3) следует, что $E_z = 0$, а следовательно, $\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y$ и плотность полного тока

$$\vec{j} + i\omega\epsilon\vec{E} = \vec{x}_0(j_x + i\omega\epsilon E_x) + \vec{y}_0(j_y + i\omega\epsilon E_y)$$

и находится в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{H}$.

Задача 3. Некая среда, имеющая диэлектрическую проницаемость $\epsilon = 5$ и удельную проводимость $\gamma = 10^{-12}$ См/м, в некоторый момент времени имеет объемно распределенный заряд q . Определить время, в течение которого заряд в любой точке внутренней области уменьшится в e раз. Объяснить, куда «исчезает» заряд.

Решение

Применим уравнение непрерывности линий тока

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0.$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

получаем

$$\gamma \operatorname{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0.$$

На основании третьего уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_q$$

и с учетом материального уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

находим

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} \rho_q + \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho_q}{\rho_q} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} dt.$$

Проинтегрируем последнее уравнение и получим

$$\ln \rho_q + C = -\frac{\gamma}{\varepsilon} t,$$

где постоянную интегрирования C запишем в виде $C = \ln(1/\rho_0)$.

Тогда

$$\ln \frac{\rho_q}{\rho_0} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} t, \quad \text{откуда} \quad \rho_q = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t},$$

где ρ_0 – плотность заряда в начальный момент времени.

Из условия задачи следует, что

$$\rho = \frac{\rho_0}{e} = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{e} = -\frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0} t \quad \text{или} \quad t = \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Тогда время, в течение которого заряд в любой точке внутренней области уменьшится в e раз, будет

$$t = \frac{5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{10^{-12}} = 44,25 \text{ с.}$$

Уменьшение плотности заряда внутри среды объясняется их перемещением на поверхность вследствие взаимодействия одноименных зарядов.

Задача 4. Определить для частоты 600 МГц комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\dot{\epsilon}$, которая имеет проницаемость $\epsilon = 50$ и удельную проводимость $\gamma = 4 \cdot 10^{-3}$ См / м. Найти соотношение между токами смещения и проводимости в данной среде.

Решение

Из первого уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

следует

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + i\omega\epsilon \dot{\vec{E}} = (\gamma + i\omega\epsilon) \dot{\vec{E}} = i\omega\dot{\epsilon} \dot{\vec{E}}.$$

Откуда $i\omega\dot{\epsilon} = \gamma + i\omega\epsilon$ и комплексная диэлектрическая проницаемость среды

$$\dot{\epsilon} = \epsilon - i\gamma/\omega.$$

Соотношение между токами смещения и проводимости определяется выражением

$$\frac{j_{см}}{j_{пр}} = \frac{\epsilon}{60\gamma\lambda}$$

и равно

$$\frac{j_{см}}{j_{пр}} = \frac{50}{60 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5} = 450.$$

4 Задачи для самостоятельной работы

1 Преобразовать уравнение $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ из дифференциальной формы в интегральную.

2 Преобразовать уравнение $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ из дифференциальной формы в интегральную.

3 Получить систему уравнений, описывающих квазистационарное электромагнитное поле.

4 Получить систему уравнений, описывающих стационарное (не изменяющееся во времени) электромагнитное поле.

5 Получить систему уравнений для случая электростатического поля.

6 Получить систему уравнений для случая магнитостатического поля.

7 Получить из уравнений Максвелла волновые уравнения.

8 Записать уравнения Максвелла в координатной форме, спроецировав векторы на оси декартовой системы координат.

9 Записать уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат.

10 Записать уравнения Максвелла в сферической системе координат.

11 Определить комплексные амплитуды векторов магнитного поля по известному значению $\vec{E} = \vec{x}_0 120 \cdot \cos(\omega t - \alpha z)$, если известны значения параметров среды ϵ , μ .

12 В некоторой точке пространства с $\mu = \mu_0$ и $\epsilon = \epsilon_0$, задан вектор $E = 12 \cos(2\pi \cdot 10^{12} t) \vec{x}_0 + 3 \cos(2\pi \cdot 10^{12} t) \vec{y}_0 - 37 \cos(2\pi 10^{10} t + \varphi_z) \vec{z}_0$. Показать, что уравнение непрерывности тока вытекает из уравнения Максвелла.

13 Показать, что векторное поле $\vec{H}$, изменяющееся в пространстве и во времени по закону $\vec{H} = 6x \cos(\omega t) \vec{x}_0 + 2e^{-2y} \sin(\omega t) \vec{z}_0$, не может быть полем магнитного вектора, удовлетворяющим уравнениям Максвелла.

14 Показать, что из четвертого уравнения Максвелла в неоднородной среде, магнитная проницаемость которой есть функция пространственных координат, вытекает уравнение вектора напряженности магнитного поля $\operatorname{div} \vec{H} = -\frac{1}{\mu_a} (\vec{H} \operatorname{grad} \mu)$.

15 Показать, что электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени с частотой ω в области пространства, свободной от источников, удовлетворяет уравнениям Гельмгольца $\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E}_m = 0$; $\nabla^2 \vec{H}_m + \omega^2 \epsilon \mu \vec{H}_m = 0$.

16 Некоторый магнитный процесс характеризуется тем, что все составляющие полей зависят только от координаты z . Показать, что на основании уравнений Максвелла при этом будут отсутствовать составляющие E_z и H_z .

17 В толще однородного диэлектрика с известной относительной проницаемостью ϵ первоначально было создано равномерное электрическое поле $\vec{E}$, а затем прорезаны две узкие полости (1 и 2), одна из которых

ориентирована параллельно, а другая перпендикулярно полю (рисунок 4.1). Полости заполнены воздухом. Какова величина напряженности электрического поля в обеих полостях?

18 Пусть электромагнитное поле характеризуется постоянным направлением вектора $\vec{H}$. Показать, что вектор плотности полного тока $\vec{j}_{np} + \vec{j}_{см}$ перпендикулярен вектору $\vec{H}$.

19 Пусть электромагнитное поле имеет постоянное направление вектора $\vec{E}$. Показать, что векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ перпендикулярны друг другу.

20 К какой группе относится морская вода ($\epsilon = 81\epsilon_0$, $\gamma = 3...5$ См/м) на частотах $f_1 = 10^3$ Гц, $f_2 = 10^{10}$ Гц, $f_3 = 10^{12}$ Гц?

21 На каких частотах медь можно считать диэлектриком?

22 Может ли существовать магнитное поле без электрического поля?

23 Может ли существовать однородное переменное магнитное поле без электрического поля?

24 Определить длину волны и фазовую скорость электромагнитной волны, распространяющейся в среде без потерь с относительными проницаемостями $\epsilon = 5\epsilon_0$, $\mu = 20$, если частота волны 10 МГц.

25 Определить предельную плотность потока мощности P_{max} , переносимую волной в диэлектрике с $\epsilon = 4\epsilon_0$, если известно, что в воздухе пробивная напряженность электрического поля равна 30 кВ/см.

26 Выбрать толщину листов для набора сердечников трансформатора с $\mu = 1000 \mu_0$, $\gamma = 10^7$ См/м, работающего на частоте $f = 50$ Гц.

27 Вычислить значение волнового числа k для графита с $\gamma = 3 \cdot 10^4$ См/м на частоте 10^{10} Гц.

28 Вычислить значение волнового числа k , фазовой постоянной и постоянной затухания при распространении электромагнитной волны в воде на частоте 10^{10} Гц, если $\epsilon = 81\epsilon_0$ и $\gamma = 2 \cdot 10^4$ См/м.

29 При каком фазовом сдвиге между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вектор Пойнтинга равен нулю?

30 Определить параметры плоской гармонической электромагнитной волны, у которой $\epsilon = 16\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 0$, для частот $f = 50$ Гц, $f = 10^9$ Гц.

31 Построить график изменения амплитуды магнитного поля внутри медного листа, на который нормально падает волна с амплитудой электрического поля 1 В/м при частоте 20 ГГц.

32 Определить фазовую постоянную, фазовую скорость, характеристическое сопротивление, частоту f для плоской гармонической волны в воздухе

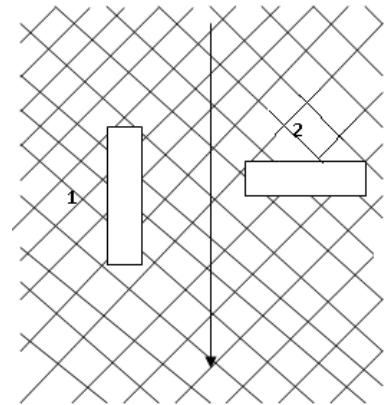


Рисунок 4.1 – Геометрия задачи

для $\lambda = 0,03$ м, $\lambda = 300$ м, $\lambda = 3000$ м, считая, что $\varepsilon_{возд} = \varepsilon_0$, $\mu_{возд} = \mu_0$, $\varepsilon_{воды} = 81$, $\mu_{воды} = \mu_0$.

33 Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется вдоль оси Z в неограниченном пространстве, заполненном диэлектриком, у которого $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 0$. Ось X совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. В момент $t = 0$ в точке $z = 0$ напряженность электрического поля $E_m = 2$ мВ/м. Найти численные значения напряженности электрического и магнитного полей E и H , а также вектор Пойнтинга $\vec{P}$ в точке $Z = 300$ м в момент времени $t = 1$ мкс, если частота $f = 10^7$ Гц.

34 Объяснить, как распространяется плоская волна, характеризуемая волновым множителем $\exp\left\{i\left[\omega t - k\left(0,5x + \sqrt{0,5}y + \sqrt{0,75}z\right)\right]\right\}$.

35 В среде с параметрами $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, $\gamma = 10^{-3}$ См/м существует электромагнитная волна с частотой 10 МГц. Определить длину волны.

36 Определить характеристическое сопротивление для плоской монохроматической волны при ее распространении в среде с параметрами $\varepsilon = 9\varepsilon_0$, $\mu = 2\mu_0$, $\gamma = 10^4$ См/м при частоте $f = 10$ МГц.

37. Плоская волна в свободном пространстве определяется выражениями $\vec{E}_m = (39,5\vec{x}_0 + 158\vec{y}_0)e^{-ikz}$, $\vec{H}_m = -(0,21\vec{x}_0 + 0,415\vec{y}_0)e^{-ikz}$. Определить характеристическое сопротивление среды.

38 Записать выражение для комплексной амплитуды вектора $\vec{E}$ плоской однородной волны в среде с $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 81\varepsilon_0$, $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$ См/м, если $\vec{H}_m = 0,24\vec{x}_0 \exp(-ik'z) \exp(-k''z)$. Определить k' и k'' .

39 Характеристическое сопротивление среды $377(1+i)$. Определить ее диэлектрическую проницаемость, если $\mu = \mu_0$, $f = 10^{10}$ Гц.

40 Вычислить глубину проникновения тока в металл для следующих металлов: медь, серебро, дюралюминий, алюминий, вольфрам. Частоты равны 10 МГц и 10 ГГц.

41 Определить затухание плоской волны на пути 10 мкм в металле $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 6 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, $f = 1,0$ МГц.

42 Определить затухание плоской волны на пути 1 м в диэлектрике с $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\text{tg } \Delta_s = 9 \cdot 10^{-3}$ на частоте 1000 МГц.

43 Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент затухания, а также напряженность магнитного поля для плоской однородной волны, распространяющейся в среде с $\varepsilon = 2,2\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\text{tg } \Delta_s = 9 \cdot 10^{-4}$, $f = 1000$ МГц, $E_m = 1$ мВ/м.

44 Вычислить глубину проникновения поля в среду с параметрами $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 100\varepsilon_0$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-2}$ 1/Ом·м, $f = 10$ МГц.

45 В среде с параметрами $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma = 0$ распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля которой $\vec{E}_m = 0,5\vec{x}_0 + 0,2\vec{y}_0$ в плоскости $z = 0$.

Список литературы

- 1 **Фальковский, О. И.** Техническая электродинамика: учебник / О. И. Фальковский. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2019. – 430 с.
- 2 **Муромцев, Д. Ю.** Техническая электродинамика: учеб. пособие / Д. Ю. Муромцев, О. А. Белоусов. – Тамбов: ТГТУ, 2012. – 116 с.
- 3 **Пименов, Ю. В.** Техническая электродинамика: учеб. пособие / Ю. В. Пименов, В. И. Вольман, А. Д. Муравцов. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.
- 4 **Инкин, А. И.** Электромагнитные поля и параметры электрических машин / А. И. Инкин. – Новосибирск: ЮКЭА, 2002. – 462 с.

Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Проводимость материалов

Материал	Проводимость 1/Ом·м	Материал	Проводимость 1/Ом·м
Алюминий	$3,54 \cdot 10^7$	Парафин	10^{-17}
Углерод	$3 \cdot 10^4$	Фибра (жесткая)	$5 \cdot 10^{-9}$
Константан	$0,20 \cdot 10^7$	Стекло	10^{-12}
Медь (отожженная)	$5,8 \cdot 10^7$	Слоновая кость	10^{-14}
Медь (закаленная)	$5,65 \cdot 10^7$	Твердая резина	$10^{-14} \dots 10^{-16}$
Дюралюминий	$3 \cdot 10^7$	Мрамор	$10^{-7} \dots 10^{-9}$
Золото (чистое)	$4,1 \cdot 10^7$	Слюда	$10^{-11} \dots 10^{-15}$
Графит	10^5	Парафин	$10^{-14} \dots 10^{-15}$
Железо (литье)	10^6	Фарфор	$3 \cdot 10^{-13}$
Свинец	$0,48 \cdot 10^7$	Кварц (кристалл): параллельно оси перпендикулярно оси	10^{-12} $3 \cdot 10^{-5}$
Магний	$2,17 \cdot 10^7$		
Манганит	$0,23 \cdot 10^7$		
Ртуть	$0,1044 \cdot 10^7$	Кварц (плавленный)	10^{-17}
Нихром	$0,10 \cdot 10^7$	Канифоль	$2 \cdot 10^{-15}$
Никель	$1,28 \cdot 10^7$	Шеллак	$2 \cdot 10^{-15}$
Фосфористая бронза	10^7	Сланец (шиферная плитка)	10^{-6}
Сталь	$0,5 \dots 1,0 \cdot 10^7$		
Сталь марганцевая	$0,14 \cdot 10^7$	Сера	10^6
Сталь с кремнием	$2 \cdot 10^5$	Дерево (парафинированное)	10^{-15}
Серебро (99,98 % чистоты)	$6,139 \cdot 10^7$	Спирт: этиловый метиловый	$3,3 \cdot 10^{-4}$ $7,1 \cdot 10^{-4}$
Теллур	$5 \cdot 10^2$	Нефть	10^{-14}
Олово	$9 \cdot 10^6$	Бакелит	$10^{-8} \dots 10^{-10}$
Вольфрам	$1,8 \cdot 10^7$	Целлулоид	10^{-8}
Цинк	$1,7 \cdot 10^7$	Вода (дистиллиро- ванная)	$2 \cdot 10^{-4}$

Таблица А.2 – Относительная магнитная проницаемость материалов

Материал	Относительная проницаемость (μ/μ_0)	Примечание
Сверхмагнетик	$1 \cdot 10^6$	Ферромагнетик
Чистое железо	$2 \cdot 10^5$	То же
Железо с кремнием	$7 \cdot 10^3$	То же
Мюметалл	$1 \cdot 10^5$	То же
Пермаллой	$1 \cdot 10^5$	То же
Железо (0,2 % примесей)	$5 \cdot 10^3$	То же
Ферросмесь-3 (ферропорошок)	$1,5 \cdot 10^3$	То же
Малоуглеродистая сталь	$2 \cdot 10^3$	То же
Никель	600	То же
Кобальт	250	То же
2-компонентная смесь пермаллоя	130	То же
Палладий	1,0008	Парамагнетик
Алюминий	1,00002	То же
Воздух	1,0000004	То же
Вода	0,999991	Диамagnetик
Медь	0,999991	То же
Свинец	0,999983	То же
Серебро	0,99998	То же
Висмут	0,99983	То же

Таблица А.3 – Относительная диэлектрическая проницаемость веществ

Материал	Проницаемость	Материал	Проницаемость
Водород (0 °С)	1,000264	Льняное масло	3,35
Водяной пар	1,00205	Оргстекло	3,4
Пенистый полистирол	1,03	Сухая песчаная почва	3,4
Воздух (-191 °С)	1,43	Нейлон твердый	3,8
Парафин	2,1	Шерсть	2,5...7,7
Фанера	2,1	Сера (аморфная)	3,98
Полистирол	2,7	Сера (плавленная)	4,92
Бумага	2,0...2,5	Гуттаперча	3,3...4,9
Резина	2,3...4,0	Касторовое масло	4,67
Янтарь	2,7	Кварц	5,0
Асфальт	2,68	Бакелит	5,0
Бензин	2,29	Слюда	5,6...6,0
Нефть	2,13	Свинцовое стекло	5,4...8,0
Янтарь	3,0	Кремниевое стекло	6,6...9,9
Муравьиная кислота	6,0	Аммиак	22,0
Спирт амиловый	16,0	Глицерин (15 °С)	56,2
Спирт этиловый	25,8	Вода (дистиллированная)	81,1
Спирт метиловый	31,2	Рутил	89...173
Титанат бария	1200	Цирконат (титанат) бария	13000
Титанат бария (стронция)	10000	Полиэтилен	2,25
Станат титаната бария	20000	Стеатит	6,25