

DOI: 10.24412/2077-8481-2025-2-80-89

УДК 629.114.2

Э. И. ЯСЮКОВИЧ, канд. техн. наук, доц.

Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

ИМИТАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ МОБИЛЬНОСТИ ГРУЗОВЫХ БЕСПИЛОТНЫХ ТРЕХОСНЫХ КОЛЕСНЫХ МАШИН

Аннотация

Разработана имитационная математическая модель оценки мобильности грузовых беспилотных трехосных колесных машин и программное обеспечение для оценки и показателей их курсовой устойчивости.

Ключевые слова:

беспилотная колесная машина, имитационная математическая модель, курсовое движение, вертикальная динамика, курсовая устойчивость, управляемость, мобильность.

Для цитирования:

Ясюкович, Э. И. Имитационная математическая модель оценки мобильности грузовых беспилотных трехосных колесных машин / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2025. – № 2 (87). – С. 80–89.

Введение

В последние годы автомобильные компании для поддержания конкурентоспособности на рынке начали гонку за мобильностью, которая значительно влияет на будущее автомобильной промышленности. Под мобильностью автомобиля понимается его беспилотное движение, т. е. способность реагировать на дорожные ситуации без водителя [1]. Реализация проекта мобильных автомобилей является альтернативой железной дороге, т. к. они могут двигаться целые сутки, не останавливаясь.

Одним из наиболее полноценных проектировщиков беспилотных автомобилей в России является КамАЗ, который занимается проектированием грузовых и пассажирских транспортных средств, содержащих новые интеллектуальные концепции дорожного движения. В настоящее время КамАЗ готовится к тестированию беспилотных грузовиков на трассе М-11 «Нева», соединяющей Москву и Санкт-Петербург. Для этого разрабатывается специальная

цифровая трасса для тестирования беспилотных грузовиков [2, 3].

Концепцией будущего пассажирского транспорта является уход от автобусов большой вместимости и переход к личным автомобилям, автомобилям такси и пассажирскому транспорту большой вместимости. КамАЗ планирует в ближайшее время испытать беспилотное транспортное средство, представляющее собой смарт-автомобиль со смарт-функциями. Такое средство можно вызвать в качестве такси и определить оптимальный маршрут доставки клиента в необходимое ему место без участия водителя.

В настоящее время наблюдаются инновации, которые направлены на технологии мобильности колесных машин и позволяют самостоятельно без участия водителя ориентироваться на дороге. То есть мобильность колесных машин, эксплуатируемых в реальных дорожных и климатических условиях, является важнейшим показателем оценки их курсового движения [4].

Эффективность оценки курсового

движения беспилотных колесных машин может оцениваться с помощью показателей устойчивости, управляемости и мобильности их движения по дорогам с различными характеристиками.

При этом наиболее достоверные показатели названных характеристик можно получить при проведении исследований на основе натурных испытаний. Однако для сокращения времени на проведение таких исследований целесообразно использовать имитационное моделирование управляемого курсового движения названных машин по различным траекториям движения, в которых для вычисления допустимых скоростей курсового движения по различным траекториям используются коэффициенты сцепления шин автомобильных колес с опорной поверхностью, которые зависят от таких факторов, как категория дороги, атмосферные показатели и др.

Таким образом, цель выполняемых в работе исследований заключалась в разработке имитационной математической модели и программного обеспечения для оценки мобильности беспилотных трехосных колесных машин при движении их по задаваемым траекториям движения. Разработанное програм-

мное обеспечение может использоваться также для имитационного моделирования управляемого курсового движения, позволяющего определять оптимальные значения упругодиссипативных характеристик подвески и шин колесных машин, позволяющие повысить их проходимость и мобильность.

Для более эффективного анализа результатов расчетных исследований, выполняемых с помощью разработанного программного обеспечения, имеется возможность выводить результаты имитационного моделирования в виде графических зависимостей вышеуказанных показателей от массогеометрических параметров и упругодиссипативных характеристик подвески и шин колесной машины.

Основная часть

В работе для моделирования мобильного управляемого курсового движения и вертикальной динамики исследуемой трехосной колесной машины с передними управляемыми колесами, общий вид которой представлен на рис. 1, разработана имитационная математическая модель.



Рис. 1. Общий вид трехосной колесной машины

Разработанная математическая модель содержит также динамические уравнения вертикальных, продольно- и поперечно-угловых колебаний поддрессоренной массы колесной машины,

а также уравнения вертикальных колебаний колес. Вывод названных уравнений выполнялся на основе представленной на рис. 3 расчетной схемы.

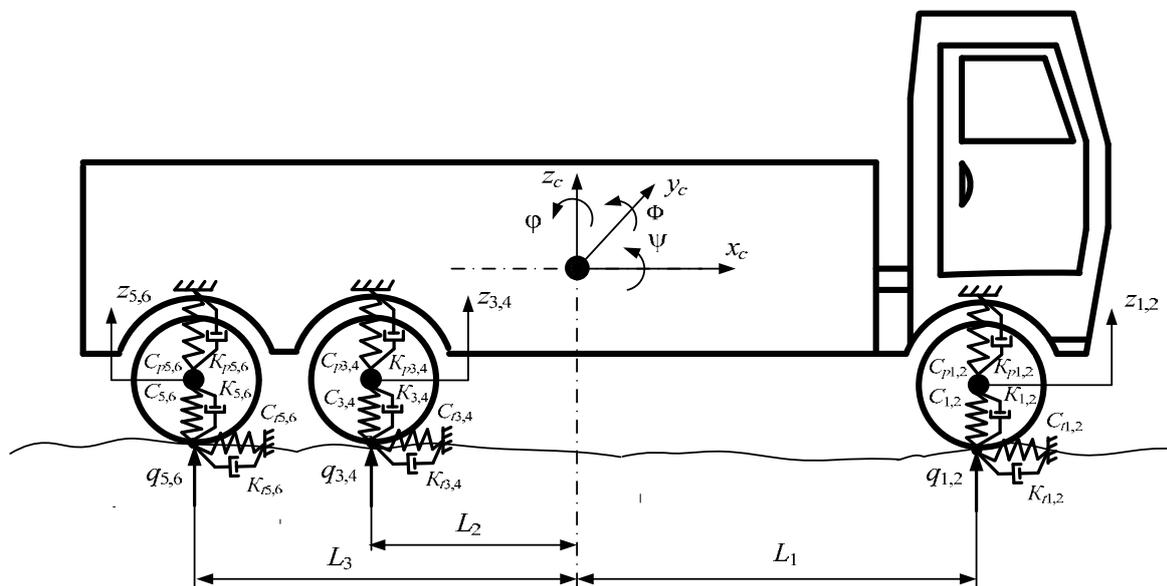


Рис. 3. Расчетная схема продольных, поперечных, угловых колебаний и вертикальной динамики колесной машины

В разработанной математической модели используются следующие независимые координаты, указанные на рис. 2 и 3: x_c , y_c , z_c – перемещения центра масс колесной машины по продольной OX , поперечной OY и вертикальной OZ осям; $z_1...z_6$ – вертикальные перемещения центров неподрессоренных масс; φ , ψ , Φ – курсовой угол, углы бокового крена и тангажа остова; $\delta_1... \delta_6$ – углы увода шин колес.

В математической модели используются массогеометрические параметры: $l_1...l_3$ – расстояния от центра масс колесной машины до центров ее передней, средней и задней осей; l_{mc} – расстояние от центра масс до точки проекции нормали из точки O на продольную ось колесной машины; θ_1 , θ_2 – углы поворота передних левого и правого управляемых колес вокруг их вертикальных осей; $d_{k1}...d_{k6}$ – левая и пра-

вая половины ширины колеи передней, средней и задней осей; $v_1...v_6$ – линейные продольные скорости перемещения центров масс колес передней, средней и задней осей.

Для вычисления динамических сил в уравнениях математической модели используются упругие и диссипативные характеристики шин колес и подвески передней, средней и задней осей: $C_1...C_6$ – коэффициенты нормальной жесткости шин; $C_{p1}...C_{p6}$ – коэффициенты тангенциальной жесткости шин; $C_{r1}...C_{r6}$ – коэффициенты жесткости элементов подвески поддрессоренной массы колесной машины; $k_1...k_6$ – коэффициенты нормального демпфирования шин; $k_{t1}...k_{t6}$ – коэффициенты тангенциального демпфирования шин; $k_{p1}...k_{p6}$ – коэффициенты демпфирования элементов подвески.

Расчетная схема колесной маши-

ны, приведенная на рис. 2, использовалась для вывода уравнений курсового движения и кинематических связей шин ее колес с опорной поверхностью, а для вывода динамических уравнений вертикальной динамики, вычисления нормальных реакций опорной поверхности, упругих сил в амортизаторах колесной машины и возникающих упругих сил в ее шинах, а также для вывода динамических уравнений продольно- и поперечно-угловых перемещений – расчетная схема, представленная на рис. 3.

В обозначениях параметров и обобщенных координат расчетных схем нечетные индексы относятся к левому борту колесной машины, а четные – к правому.

При движении колесной машины по реальным дорогам ее остов совершает вертикальные и продольно-поперечные колебания, в результате чего изменяются сцепления шин ее колес с опорной поверхностью. Указанные сцепления влияют на боковые скольжения шин, особенно при криволинейном движении. Поэтому, как отмечалось выше, для повышения точности имитационного моделирования управляемого курсового движения колесной машины ее математическая модель, кроме уравнений курсового движения, содержит уравнения вертикальной динамики, а также дифференциальные уравнения первого порядка увода шин ее колес.

Таким образом, разработанная имитационная математическая модель курсового движения трехосной колесной машины получена с учетом продольно-поперечных, вертикальных и угловых колебаний ее остова, а также вертикальных колебаний колес.

Технология разработки таких имитационных моделей подробно рассмотрена в [5, 6].

Известно, что при курсовом движении колесной машины без бокового

проскальзывания ее шин нормали к их вертикальным плоскостям должны пересекаться в одной точке на линии мгновенных центров поворота – точке O (см. рис. 2). Это условие использовалось для вывода уравнений кинематических связей колес с опорной поверхностью при движении без проскальзывания шин.

Линия мгновенных центров поворота пересекает центральную продольную ось остова колесной машины под прямым углом, а эффективность управляемого курсового движения указанной машины зависит от положения указанной линии, которая определяется соотношением углов поворота управляемых колес ее передней, средней и задней осей.

Поскольку разрабатываемая математическая модель содержит два компонента – курсовое движение и вертикальная динамика, то для вывода динамических уравнений ее курсового движения использовались две расчетные схемы: курсового движения (см. рис. 2) и вертикальной динамики (см. рис. 3).

В конечном виде полученная имитационная математическая модель курсового движения трехосной колесной машины содержит динамические уравнения и уравнения кинематических связей шин ее колес с опорной поверхностью.

Количество динамических уравнений полученной математической модели совпадает с числом независимых обобщенных координат.

Полная система дифференциальных уравнений курсового движения трехосной колесной машины содержит также шесть уравнений кинематических связей шин ее колес с опорной поверхностью – дифференциальных уравнений первого порядка.

Таким образом, полученная имитационная математическая модель курсового движения трехосной колесной машины со всеми управляемыми колесами имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_c &= \left\{ -\sum_{i=1}^2 \{Y_i \sin(\varphi + \Theta_i \mp \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \cos(\varphi + \Theta_i \mp \delta_i)\} + \right. \\
 &+ \sum_{i=3}^4 \{Y_i \sin(\varphi \mp \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \cos(\varphi \mp \Theta_i - \delta_i)\} - \\
 &- \sum_{i=5}^6 \{Y_i \sin(\varphi \pm \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \cos(\varphi \pm \delta_i)\} \} / m; \\
 \ddot{y}_c &= \left\{ \sum_{i=1}^2 \{Y_i \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i)\} + \right. \\
 &+ \sum_{i=3}^4 \{Y_i \cos(\varphi \mp \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \sin(\varphi \mp \delta_i)\} + \\
 &+ \sum_{i=5}^6 \{Y_i \cos(\varphi \pm \delta_i) + (P_{ki} - P_{ti}) \sin(\varphi \pm \delta_i)\} \} / m; \\
 \ddot{\phi} &= \sum_{i=1}^2 \{Y_i [l_i \cos(\Theta_i - \delta_i) \mp d_i \sin(\Theta_i - \delta_i)] + (P_{ki} + P_{ti}) \times \\
 &\times [l_j \sin(\Theta_i - \delta_i) \pm d_i \cos(\Theta_i - \delta_i)]\} - \sum_{i=3}^6 \{Y_i [l_i \cos \delta_i \pm d_i \sin \delta_i] - \\
 &- (P_{ki} + P_{ti}) [l_j \sin \delta_i \mp d_i \cos \delta_i]\} / J_z; \\
 \ddot{z}_c &= \sum_{i=1}^6 P_{ni} / m; \quad \ddot{z}_i = (P_i - P_{ni}) / m_i, \quad i = 1 \dots 6; \\
 \ddot{\Psi} &= \left[\sum_{i=1}^6 \mp P_i d_i - m v_c^2 h_c / r_{tr} \right] / j_x; \quad \ddot{\Phi} = \sum_{i=1}^3 (P_{i1} l_i + P_{i2} l_2) / J_y; \\
 \dot{\delta}_i \{ \dot{x}_c \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \ddot{\phi} [l_i \sin(\Theta_i - \delta_i) \mp \\
 &\mp d_i \cos(\Theta_i - \delta_i)] \} = \ddot{x}_c \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i) - \ddot{y}_c \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) - \\
 &- \ddot{\phi} [l_i \cos(\Theta_i - \delta_i) \pm d_i \sin(\Theta_i - \delta_i)] - \dot{\phi}^2 [l_i \sin(\Theta_i - \delta_i) \mp \\
 &\mp d_i \cos(\Theta_i - \delta_i)] + (\dot{\phi} + \dot{\Theta}_i) [\dot{x}_c \cos(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \\
 &+ \dot{y}_c \sin(\varphi + \Theta_i - \delta_i) + \ddot{\phi} [l_i \sin(\Theta_i - \delta_i) \mp d_i \cos(\Theta_i - \delta_i)]], \quad i = 1, 2; \\
 \dot{\delta}_i \{ \dot{x}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \ddot{\phi} [l_i \sin \delta_i \mp d_i \cos \delta_i] \} = \\
 &= \ddot{x}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \ddot{y}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \ddot{\phi} [l_i \cos \delta_i \mp d_i \sin \delta_i] + \\
 &+ \dot{\phi}^2 [l_i \sin \delta_i \pm d_i \cos \delta_i] + \dot{\phi} [\dot{x}_c \cos(\varphi - \delta_i) + \dot{y}_c \sin(\varphi - \delta_i) - \\
 &- \ddot{\phi} [l_i \sin \delta_i \pm d_i \cos \delta_i]], \quad i = 3 \dots 6.
 \end{aligned} \tag{1}$$

В системе уравнений (1) переменные v_c , r_{tr} , h_c – продольная скорость, радиус криволинейной траектории дви-

жения колесной машины и высота расположения ее центра масс.

Полученная система обыкновен-

ных дифференциальных уравнений (1) содержит: дифференциальные уравнения курсового движения – первое, второе и третье; уравнение вертикальной динамики центра масс колесной машины – четвертое; уравнение вертикальной динамики центров масс колес – пятое; уравнения поперечно- и продольно-угловых колебаний подрессоренной массы – шестое и седьмое. Восьмое уравнение используется для вычисления скоростей изменения углов увода шин передних управляемых колес, а девятое – для вычисления скоростей изменения углов увода шин колес средней и задней осей колесной машины.

Боковые реакции Y_i опорной поверхности, действующие в пятнах контактов шин колес с опорной поверхностью, определяют характер курсового движения колесной машины и вычисляются по формуле

$$Y_i = k_{i} \delta_i, \quad i = 1 \dots 6. \quad (2)$$

Коэффициенты сопротивления боковому уводу шин колес k_{i} изменяются в зависимости от приложенных к колесам нормальных и тангенциальных

сил, давления воздуха в шинах, характеристик дорожной поверхности по условиям сцепления и т. д. [2, 4]. Поэтому при моделировании курсового движения колесной машины на протяжении длительного маршрута значения коэффициентов k_{i} уточняются в каждый момент времени в процессе интегрирования уравнений движения – имитационного моделирования.

Система дифференциальных уравнений (1) разработана для случая отсутствия бокового проскальзывания каждой шины колесной машины при движении ее по криволинейной траектории. Согласно этому условию нормали к проекциям средних линий поверхностей шин каждого колеса на опорную поверхность должны пересекаться в одной точке O (см. рис. 1).

Выполнение этого условия будет обеспечиваться, если скорость изменения угла Θ_2 поворота переднего правого колеса определяется с учетом правил трапеции поворота управляемых колес, которая зависит от изменяющегося угла Θ_1 поворота левого управляемого колеса и ее скорости:

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{l_{i/2}^2 \dot{\Theta}_1}{(l_1 + d \operatorname{tg} \Theta_1)^2 \cos^2 \Theta_1 + l_1^2 \sin^2 \Theta_1}. \quad (3)$$

Для имитационного моделирования управляемого курсового движения трехосной колесной машины по задаваемой траектории разработан алгоритм, предусматривающий расчет реальных условий мобильности беспилотного движения, интегрирование системы дифференциальных уравнений (1), управление курсовым движением и скоростями перемещения колесной машины по заданной траектории.

Разработанное программное обеспечение после ввода исходных данных, начальных условий интегрирования дифференциальных уравнений и ординат неровностей микропрофиля дороги

выполняет интегрирование дифференциальных уравнений управляемого курсового движения колесной машины.

Для задания скорости угла поворота управляемых колес создана специальная таблица, в первой строке которой указываются моменты времени начала их поворота, во второй – скорости изменения угла поворота переднего левого колеса, в третьей – его предельно допустимое значение, а в четвертой – значения предельно допустимых значений скорости движения колесной машины. На основе указанных данных вычисляются углы поворота каждого управляемого колеса колесной машины в

соответствии с геометрией ее поворота.

В процессе численного интегрирования системы уравнений (1) создается файл в виде таблицы результатов имитационного моделирования, который используется для формирования графических зависимостей процессов управляемого курсового движения колесной машины.

Каждая строка указанного файла содержит: моменты времени, в которые отображаются численные значения обобщенных координат уравнений математической модели и их скорости, углов увода шин колес, а также боковых и нормальных реакций опорной поверхности на шины.

Разработанное на основе математической модели программное обеспечение позволяет управлять продольной скоростью движения колесной машины при выполнении маневров, а также фиксировать моменты времени начала бокового скольжения ее колес, если оно

имело место.

Таким образом, разработанные математическая модель, алгоритм и программное обеспечение имитационного моделирования курсового движения могут успешно использоваться для оценки мобильности беспилотного движения трехосных колесных машин. Для выполнения необходимых маневров колесной машиной используется специальная таблица параметров управления управляемыми колесами колесной машины, содержащая скорости и ускорения углов их поворота, а также моменты времени начала и завершения маневра. Значения указанных моментов времени определяются с учетом непрямолинейности дороги.

Некоторые результаты имитационного моделирования мобильности беспилотного курсового движения колесной машины на интервале времени от 0 до 15 с по дороге с микропрофилем представлены на рис. 4.

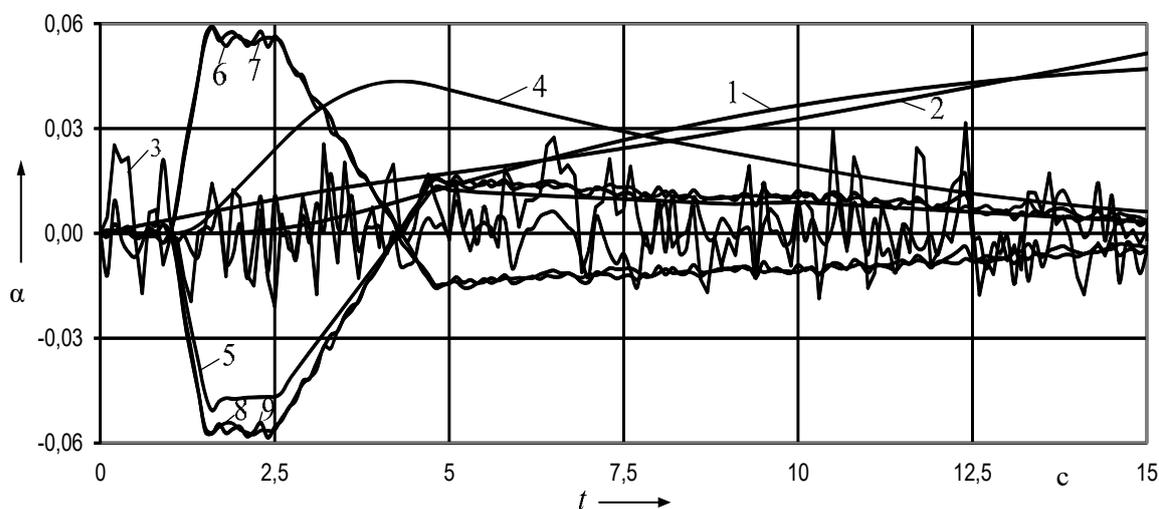


Рис. 4. Результаты имитационного моделирования мобильности беспилотного курсового движения трехосной колесной машины на интервале времени от 0 до 15 с: 1 – $x_c/1000$; 2 – $y_c/100$; 3 – z_c ; 4 – φ ; 5 – Ψ ; 6 – z_1, z_5 ; 7 – z_3 ; 8 – z_2, z_6 ; 9 – z_4

На рис. 5 приведена траектория движения колесной машины при совершении маневра «Смена полосы движения».

Анализ полученных результатов

моделирования позволяет сделать вывод о работоспособности разработанного программного обеспечения и возможности использования его для имитационного моделирования управляемого кур-

сового движения трехосных колесных машины по задаваемым траекториям

движения по дорогам различных категорий.

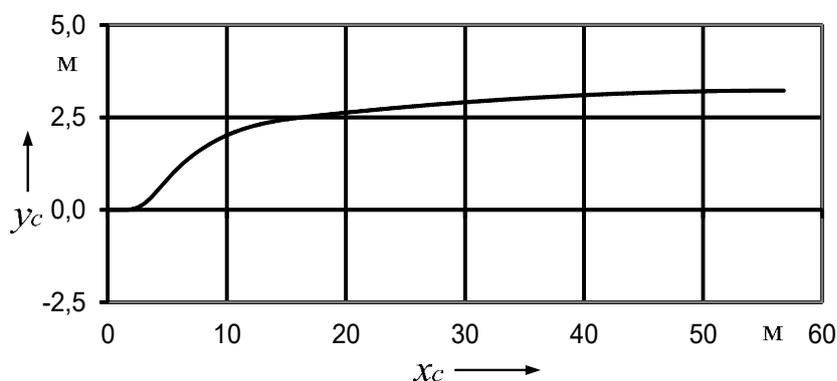


Рис. 5. Траектория движения колесной машины при совершении маневра «Смена полосы движения»

Выводы

В результате выполнения работы получена динамическая имитационная математическая модель управляемого курсового движения трехосной колесной машины с передними управляемыми колесами и ее вертикальной динамики, а также разработано и отлажено программное обеспечение для оценки мобильности ее беспилотного управляемого курсового движения по реальным

траекториям, хранящимся в базе данных автомобильных дорог.

Разработанное программное обеспечение позволяет также получить зависимости влияния расстояний от линии мгновенных центров поворота до передней, средней и задней осей колесной машины на радиус кривизны ее траектории движения. Эти зависимости могут использоваться для оценки мобильности и повышения маневренности движения трехосных колесных машин.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клубничкин, Е. Е.** Моделирование мобильности колесных транспортных средств, оснащенных средствами повышения проходимости / Е. Е. Клубничкин // Труды НГТУ им. Р. Е. Алексеева. – 2023. – № 1 (140). – С. 84–96.
2. **Антонов, А. А.** Теория устойчивости движения многоосных автомобилей / А. А. Антонов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с. : ил.
3. **Литвинов, А. С.** Управляемость и устойчивость автомобиля / А. С. Литвинов. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с. : ил.
4. Динамика колесных машин : монография / И. С. Сазонов, П. А. Амельченко, В. А. Ким [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2006. – 462 с. : ил.
5. **Ясюкович, Э. И.** Имитационное моделирование курсового движения трехосного автомобиля со всеми управляемыми колесами / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2009. – № 4. – С. 60–67.
6. **Ясюкович, Э. И.** Разработка методики виртуальных испытаний курсовой устойчивости трехосных автомобилей / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2010. – № 2. – С. 59–69.

Статья сдана в редакцию 25 ноября 2024 года

Контакты:

ed50m@mail.ru (Ясюкович Эдвард Игнатъевич).

E. I. YASYUKOVICH

MATHEMATICAL SIMULATION MODEL FOR ASSESSING THE MOBILITY OF UNMANNED THREE-AXLE WHEELED CARGO VEHICLES

Abstract

A mathematical simulation model for assessing the mobility of unmanned three-axle wheeled cargo vehicles and software for assessing indicators of their directional stability have been developed.

Keywords:

unmanned wheeled vehicle, mathematical simulation model, directional movement, vertical dynamics, directional stability, controllability, mobility.

For citation:

Yasyukovich, E. I. Mathematical simulation model for assessing the mobility of unmanned three-axle wheeled cargo vehicles / E. I. Yasyukovich // Belarusian-Russian University Bulletin. – 2025. – № 2 (87). – P. 80–89.