

Министерство образования Республики Беларусь  
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет»

В. А. Попковский

# **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ**

## **Лабораторный практикум**

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
по химико-технологическому образованию в качестве пособия  
для студентов учреждений высшего образования специальности  
6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий»*

Могилев  
«Белорусско-Российский университет»  
2025

УДК 004.94:62(075.8)  
ББК 32.973.26-02:30.1я73  
П57

Рекомендовано к изданию ученым советом Белорусско-Российского университета  
«28» марта 2025 г., протокол № 7

**Р е ц е н з е н т ы :**

кафедра «Оборудование пищевых производств» Белорусского  
государственного университета пищевых и химических технологий  
(зав. кафедрой канд. техн. наук, доц. *Р. А. Бондарев*);  
канд. техн. наук, доц., зав. лаб. Института технологии металлов  
НАН Беларуси *В. П. Груша*

**Попковский, В. А.**

П57 Компьютерное моделирование и инженерный анализ. Лабораторный  
практикум : пособие / В. А. Попковский. – Могилев : Белорус.-Рос.  
ун-т, 2025. – 291 с.: ил.  
ISBN 978-985-492-313-0.

Содержит индивидуальные задания и контрольные вопросы по всем разделам  
курса. Приведены примеры выполнения индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 6-05-0722-05  
«Производство изделий на основе трехмерных технологий», преподавателей,  
магистрантов, аспирантов, инженерно-технических работников и учащихся  
колледжей. Может быть использовано при подготовке к практическим и лабо-  
раторным занятиям по дисциплинам «Компьютерное моделирование и инженер-  
ный анализ», «Компьютерные системы конечно-элементных расчетов», «CAD-  
и CAE-системы», «Спецглавы механики».

**УДК 004.94:62(075.8)**  
**ББК 32.973.26-02:30.1я73**

**ISBN 978-985-492-313-0**

© Попковский В. А., 2025  
© Межгосударственное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский  
университет», 2025

## ВВЕДЕНИЕ

За последнее время в Республике Беларусь открыты новые специальности, в учебных планах которых предусмотрены дисциплины, связанные с компьютерным моделированием и инженерным анализом. К ним, например, можно отнести 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий», дисциплина «Компьютерное моделирование и инженерный анализ».

Учебный материал данных дисциплин предусматривает использование в учебном процессе различных CAD-/CAE-систем (CAD – Computer-aided design, CAE – Computer-aided engineering). В основу инженерного анализа данных систем, как правило, положен метод конечных элементов (МКЭ), хорошо зарекомендовавший себя при решении сложных прикладных задач.

Учебными планами по вышеприведенным дисциплинам предусмотрен достаточно большой лабораторный практикум. Так, например, для дисциплины «Компьютерное моделирование и инженерный анализ» отводится 102 академических часа.

В связи с этим вполне очевидна потребность в наличии пособий, посвященных лабораторному практикуму по данной дисциплине.

Следует отметить, что при достаточно большом количестве учебных изданий по этим специальностям большинство из них либо предназначены для опытных специалистов – пользователей конкретной компьютерной системы [1–3], либо являются изданиями, в которых достаточно подробно описан порядок использования системы SolidWorks Simulation, но отсутствуют индивидуальные задания к лабораторным работам и примеры их выполнения.

Спецификой проведения инженерного анализа посредством использования компьютерных систем является то, что адекватность полученных результатов реальным процессам довольно трудно установить проверяющему и тем самым определить качество выполнения студентом индивидуальной лабораторной работы. Поэтому в данном пособии приведены лабораторные работы либо имеющие точные решения, либо достаточно просто проверяемые, а также приведены подробные примеры их выполнения и составления по ним отчетов. Кроме того, к каждой лабораторной работе в пособии приведены краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы и контрольные вопросы по ней.

Пособие написано на основе проведения полного цикла лабораторных работ в течение трех семестров по дисциплине «Компьютерное моделирование и инженерный анализ».

Пособие может быть полезно преподавателям, магистрантам, аспирантам, инженерно-техническим работникам и учащимся колледжей.

Автор выражает благодарность рецензентам: заведующему кафедрой «Оборудование пищевых производств» Белорусского государственного университета пищевых и химических технологий кандидату технических наук, доценту Роману Александровичу Бондареву, заведующему лабораторией Института технологии металлов НАН Беларуси кандидату технических наук, доценту Владимиру Петровичу Груше, а также преподавателям кафедры «Технологии металлов» Белорусско-Российского университета и лично заведующему кафедрой Дмитрию Ивановичу Якубовичу за полезные замечания и рекомендации.

# 1. АНАЛИЗ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Под инженерным анализом подразумевают комплекс испытаний, предназначенных для установления способности изделий, конструкций, производимого оборудования удовлетворять эксплуатационным требованиям, не разрушаясь на протяжении определенного срока времени. Одним из такого рода испытаний является компьютерное моделирование, получившее широкое распространение в последнее время в связи с бурным развитием вычислительной техники и соответствующего программного обеспечения. Этот тип испытаний позволяет в сжатые сроки с минимальными затратами достичь желаемого результата в проектировании изделий с достаточно высокой достоверностью. Особенно этот подход обоснован при проектировании уникальных изделий, для которых экспериментальные испытания либо слишком дороги и занимают большой промежуток времени, либо вообще проблематичны, как например, при проектировании высотных зданий, большепролетных мостов, телевизионных вышек и т. д. В современном проектировании, предполагающем использование вычислительной техники, получили широкое распространение различные программные пакеты автоматизированного конструирования (Computer-aided engineering – CAE), позволяющие проводить инженерный анализ компьютерных моделей, не прибегая к реальным экспериментам.

CAE – общее название для пакетов прикладных программ (ППП), предназначенных для решения различных инженерных задач: расчетов, анализа и симуляции физических процессов. Как правило, алгоритм расчетов в данных пакетах чаще всего основан на численных методах решения дифференциальных уравнений (метод конечных элементов, метод сеток, метод конечных разностей и др.).

Современные системы автоматизации инженерных расчетов (CAE) применяются совместно с CAD-системами (зачастую интегрируются в них, в этом случае получают гибридные CAD-/CAE-системы).

Наиболее популярным, хорошо зарекомендовавшим себя при решении сложных прикладных задач расчетным методом, применяемым в CAE-системах, является метод конечных элементов (МКЭ). Системы, использующие в качестве численного анализа изделий МКЭ, называют еще FEA-системами (Finite Element Analysis). К настоящему времени разработано достаточно много универсальных и специализированных PPP с использованием МКЭ для решения различного рода прикладных задач.

К наиболее популярным такого рода системам относятся: SolidWorks, ANSYS, NX Nastran, PRO/Engineer и т. д.

## 1.1. Основные положения метода конечных элементов

Проектирование различного рода конструкций, удовлетворяющих современным требованиям развития техники и технологии, связано с всесторонними исследованиями по выявлению предполагаемого поведения проектируемого объекта при его эксплуатации. В связи с этим еще на стадии проектирования производят размерный конструкторский и технологический анализ систем и процессов с целью выявления их эксплуатационных возможностей, минимизации материалоемкости, снижения трудозатрат на их изготовление [5, 6].

Для решения подобных прикладных задач исследователи использовали различные численно-аналитические и численные методы расчета. Численно-аналитические методы представляют решение в виде рядов: метод коллокаций, метод Ритца – Тимошенко, метод Бубнова – Галеркина, метод Канторовича – Власова. Численные методы: метод сеток, вариационно-разностный метод (ВРМ) и др. Однако их применение в явном виде далеко не всегда позволяло достичь желаемого результата. Особенно это касается объектов сложной конфигурации, включающих материалы с нелинейной зависимостью деформаций от величины действующих нагрузок.

К настоящему времени все больше исследователей [7–10] отдают предпочтение методу конечных элементов, хорошо зарекомендовавшему себя при решении различного рода сложных прикладных задач. Это обусловлено вариационно-разностной структурой данного метода. Являясь синтезом вариационных и сеточных методов, он обладает присущими им преимуществами.

В методе конечных элементов исследуемая область изменения функций (перемещений, деформаций, напряжений) разбивается на большое число малых, но конечных по размерам подобластей, называемых *конечными элементами*. В зависимости от решаемой задачи конечные элементы могут быть линейными, плоскими или объемными и иметь различную форму. Так, при расчете стержневых конструкций конечный элемент в ряде задач представляют в виде отрезка стержня (рис. 1.1 и 1.2); в плоской задаче теории упругости конечный элемент часто принимают в виде прямоугольника или треугольника (рис. 1.3); в трехмерной задаче конечным элементом может служить тетраэдр, гексаэдр и т. д. (рис. 1.4).

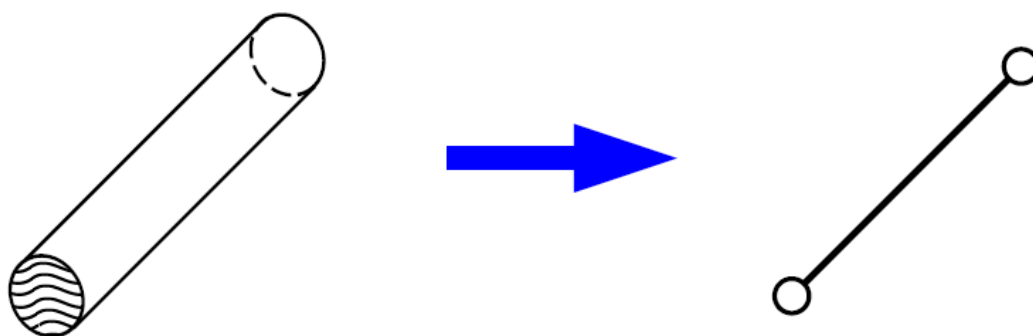


Рис. 1.1. Стержневой конечный элемент

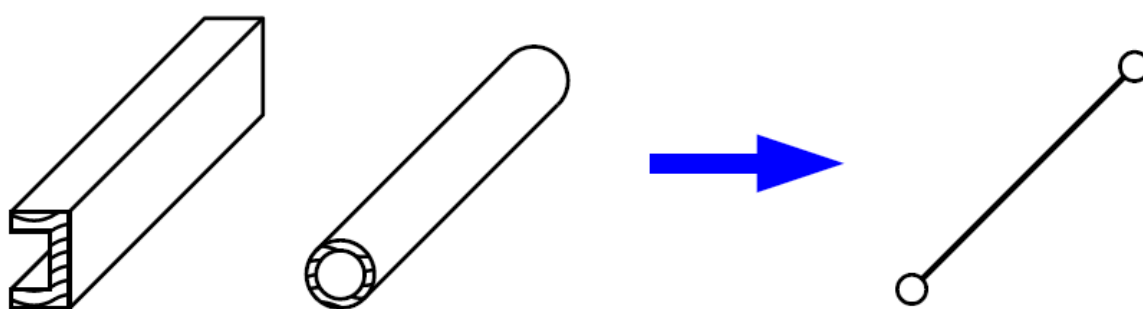
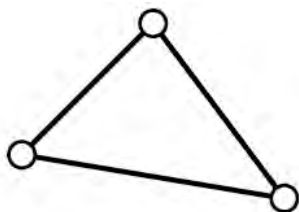
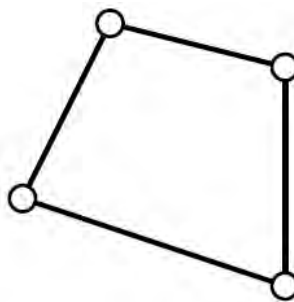


Рис. 1.2. Балочный конечный элемент

*а)*



*б)*



*в)*

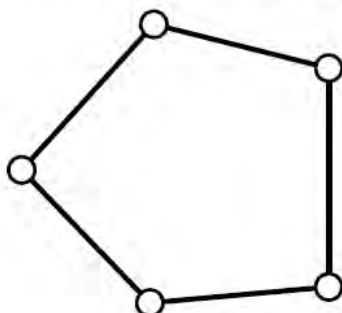
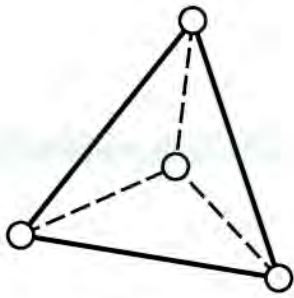
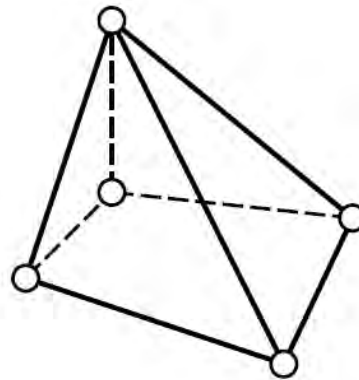


Рис. 1.3. Конечные элементы, используемые для описания пластин и оболочек:  
*а* – треугольник; *б* – четырехугольник; *в* – произвольный многоугольник

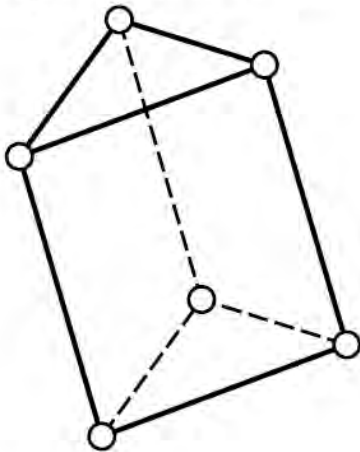
а)



б)



в)



г)

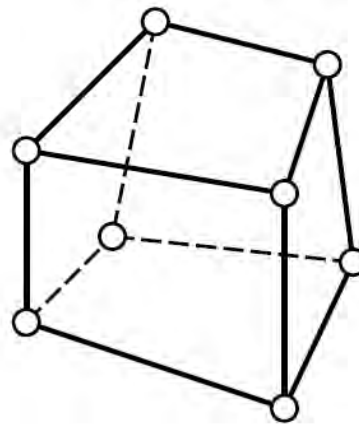


Рис. 1.4. Конечные элементы, используемые для описания массивных тел: а – тетраэдр; б – пирамида; в – призма или клин; г – гексаэдр

В дальнейшем отдельные конечные элементы связывают между собой не по всей поверхности контакта их с соседними элементами, а лишь определенным числом связей, в отдельных точках, называемых *узлами конечных элементов* или *узловыми точками* (рис. 1.5).

Число связей конечного элемента с окружающей областью принято называть *числом степеней свободы*, характеризующим данный тип конечных элементов.

*Степень свободы* является чрезвычайно важным понятием в методе конечных элементов, характеризующим возможность изменяться искомой величине в узловой точке и в определенном направлении, например, *перемещение* узла элемента в направлении одной из координатных осей.

Математический аппарат метода конечных элементов позволяет с определенной степенью точности определять значение искомой величины

в любой точке исследуемого объекта по значениям этих величин (например, перемещений) в узловых точках элементов.

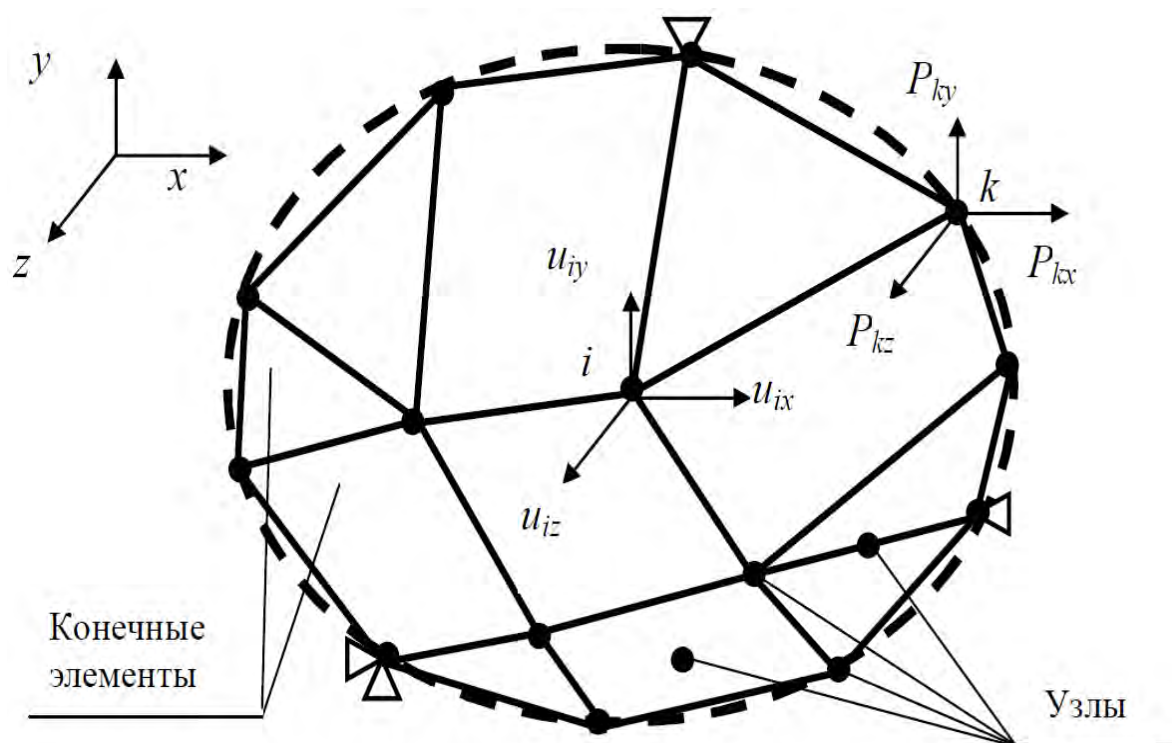


Рис. 1.5. Модель анализируемого объекта с использованием конечно-элементного подхода

Таким образом, путем представления составляющих технологических систем или конструкций в виде совокупности отдельных элементов, связанных не бесконечным, а конечным числом связей, континуальную систему заменяем дискретной. Задача об отыскании неизвестных функций из системы дифференциальных уравнений сводится к задаче о нахождении значений функции в отдельных точках путем решения системы линейных алгебраических уравнений.

Внутри отдельного конечного элемента исследуемая область принимается континуальной, однако функции, описывающие его напряженно-деформированное состояние, аппроксимируем некоторыми простейшими функциями, часто имеющими линейный характер. Таким образом, непрерывные функции в пределах исследуемой области аппроксимируются кусочно-непрерывными функциями.

Способ разбивки составляющих технологической системы на конечные элементы, их количество, число степеней свободы, характеризующих используемый конечный элемент, а также вид аппроксимирующих функ-

ций в конечном итоге определяют расчетную схему и вместе с тем предопределяют точность расчета.

На рис. 1.6 приведены расчетная схема анализа «плоской задачи теории упругости» и ее представление с использованием конечно-элементного подхода.

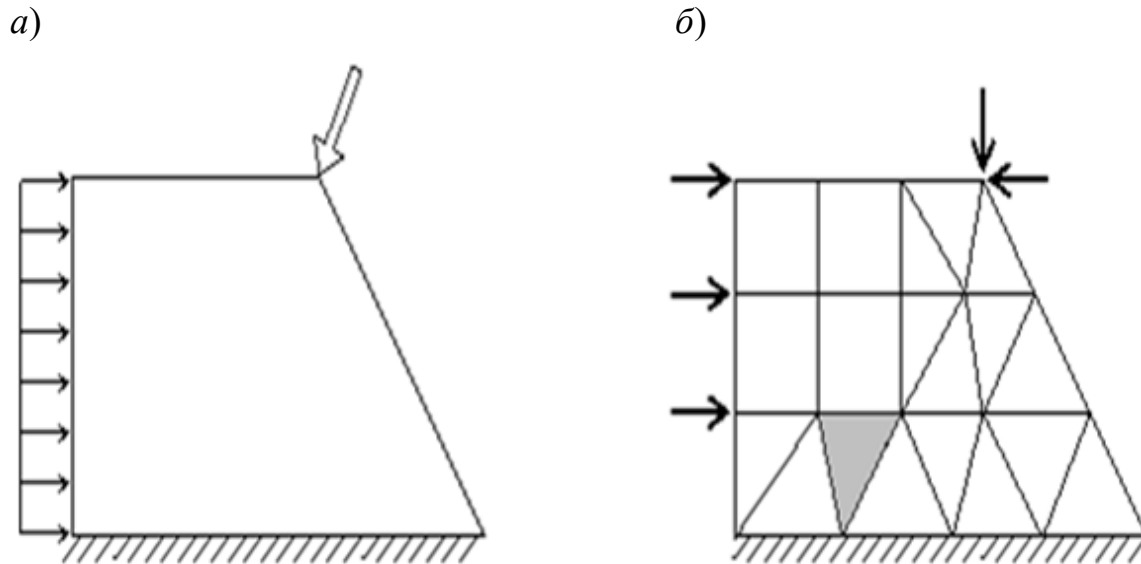


Рис. 1.6. Расчетная схема анализа (а) и конечно-элементное представление (б) «плоской задачи теории упругости»

Как видно из рис. 1.6, внешняя нагрузка, в том числе и распределенная по некоторой поверхности, при конечно-элементной дискретизации должна прикладываться только в узловых точках конечно-элементной модели по направлению соответствующих степеней свободы. Не обязательно, чтобы размер элементов был одинаковым (далее увидим, что он, скорее, должен быть различным). В методе конечных элементов узловые точки и сами конечные элементы определенным образом нумеруются. Нумерация элементов и узлов осуществляется произвольно. Вместе с тем следует отметить, что в современных программных продуктах используются алгоритмы, устанавливающие нумерацию, обеспечивающую минимизацию расчетных операций.

Специфика метода конечных элементов состоит в том, что узлы соседних конечных элементов должны совпадать. Например, разбивка на рис. 1.7 является ошибочной, т. к. узел 4 элементов 1–3 не совпадает ни с одним узлом соседнего конечного элемента 5. В этом случае невозможно согласовать деформации и напряжения в элементах 1–3 и 5.

Здесь следует иметь в виду, что благодаря соединению элемента своими узлами с узлами других элементов (см. рис. 1.6), вся рассматриваемая область может быть представлена как набор связанных элементов.

При этом математический аппарат конечного элемента формируется таким образом, чтобы значение искомой переменной, например, перемещения в узловом соединении, было одинаковым для всех соединяемых в нем элементов. Это обеспечивает непрерывность определяемой переменной. Кроме того, следует отметить, что процедура построения конечных элементов также обеспечивает непрерывность определяемой переменной и при переходе через границы соседних элементов на удалении от узловых точек. Данное обстоятельство позволяет избежать физически неприемлемую возможность образования в исследуемой области зазоров или пустот.

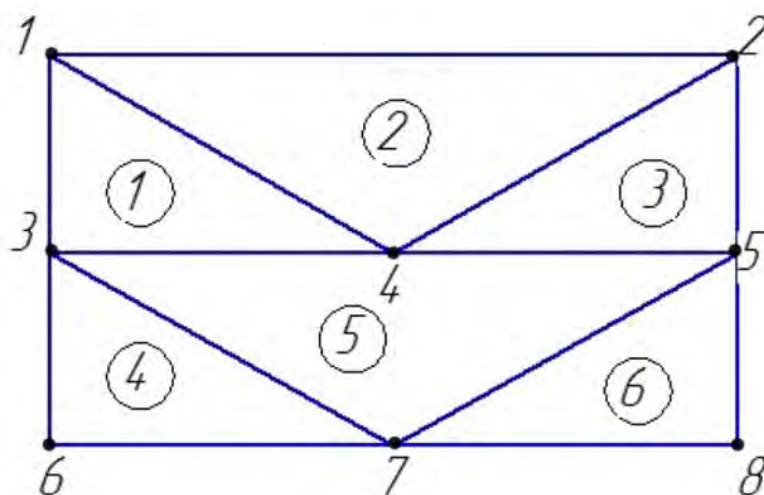


Рис. 1.7. Ошибочное представление исследуемого объекта с помощью конечно-элементного подхода

На рис. 1.8 приведены примеры представления различных объектов с использованием конечно-элементного подхода.

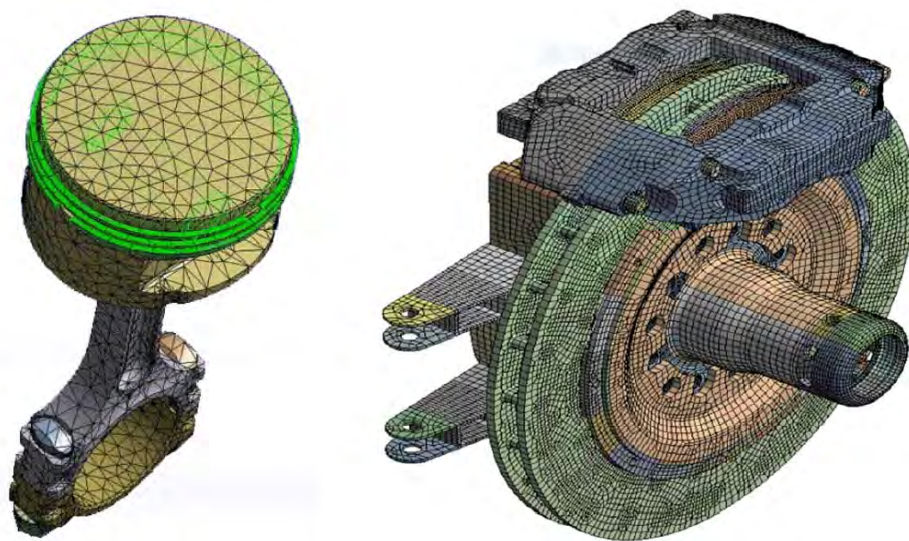


Рис. 1.8. Примеры сеток разбиения анализируемых объектов на конечные элементы

Как видно из данного рисунка, эти объекты показаны в виде сочленения большого количества конечных элементов в единое целое. Такое представление изделия принято называть *сеточной моделью изделия* или *сеткой разбиения*.

Если в дальнейшем сеточную модель изделия дополнить заданием начальных и граничных условий, параметрами внешнего силового воздействия (применительно к задачам раздела «Механика твердого деформируемого тела»), а также физическими свойствами материала объекта, то в результате будет создана *конечно-элементная модель* анализируемого состояния.

## 1.2. Этапы решения задачи посредством использования конечно-элементного анализа

На основании вышеизложенного процесс проведения конечно-элементных расчетов можно условно разделить на определенные этапы (рис. 1.9).

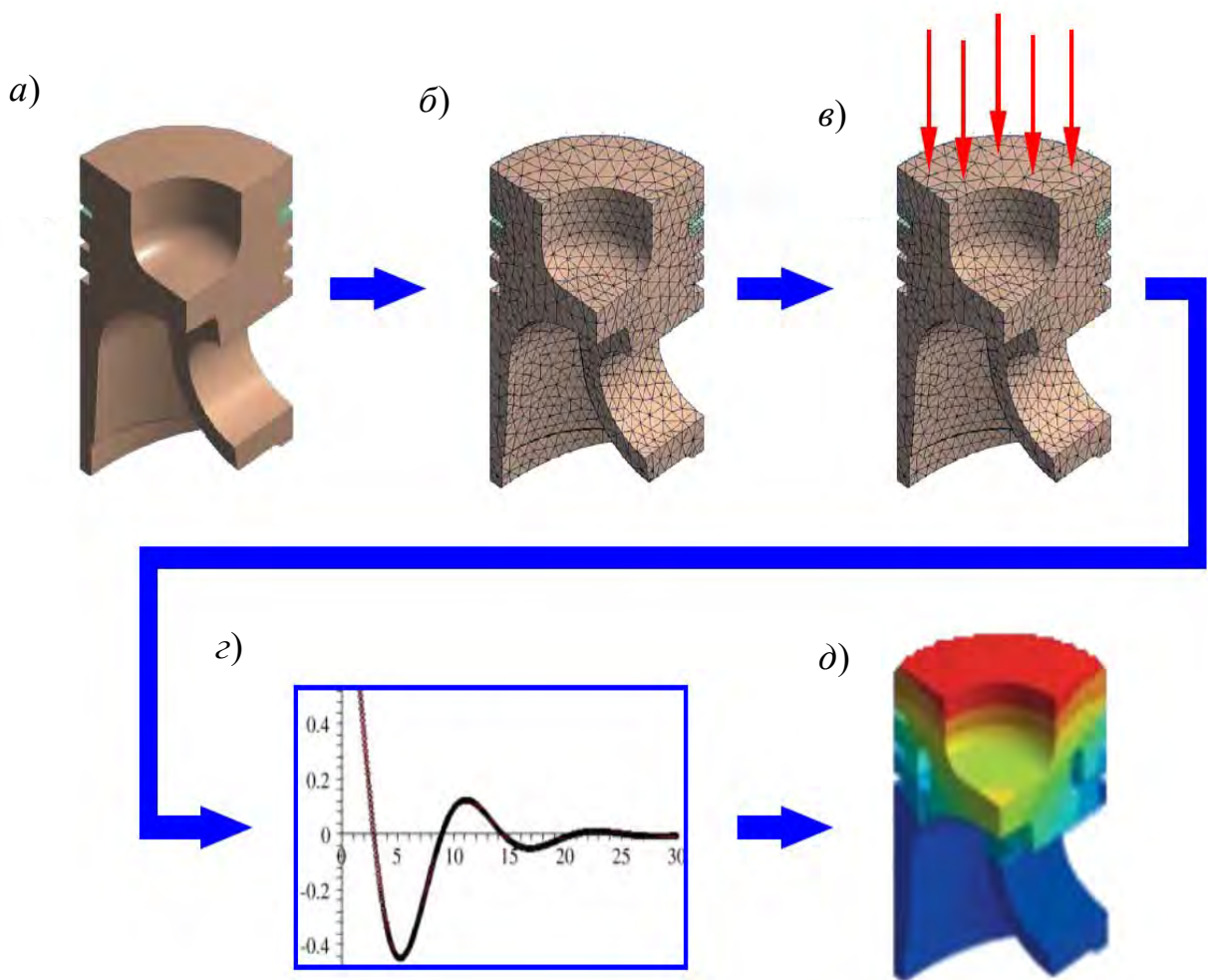


Рис. 1.9. Этапы конечно-элементного анализа

На первом этапе (см. рис. 1.9, *а*) создается геометрическая модель исследуемого объекта, при этом используется САД-система.

На втором этапе (см. рис. 1.9, *б*), используя генератор сеток (Mesh generator), создается сетка разбиения. Генератор сеток, как правило, является составной частью САЕ-системы.

Третий этап (см. рис. 1.9, *в*) включает в себя создание конечно-элементной модели – задание начальных и граничных условий, параметров расчета процесса, физических свойств материала исследуемого объекта. Эта информация генерируется с использованием *препроцессора* (Preprocessor), также встроенного в САЕ-систему.

На следующем этапе (см. рис. 1.9, *г*) на базе созданных исходных данных производится численный расчет. Для этого применяется один из решателей (Solver), включенных в САЕ-систему.

В завершающей части анализа производится обработка результатов численного анализа (см. рис. 1.9, *д*). Для этих целей используется встроенный *постпроцессор* (Postprocessor).

Как видно из приведенной последовательности действий (см. рис. 1.9), начальным этапом конечно-элементного анализа является твердотельное моделирование исследуемого объекта. Одним из программных комплексов, в которых осуществляются такого рода действия, является SolidWorks.

### **1.3. Конечно-элементная дискретизация исследуемого объекта. Оценка точности результатов расчета. Факторы, оказывающие существенное влияние на точность расчетов**

Как уже отмечалось выше, сущность метода конечных элементов состоит в том, что исследуемый объект представляется в виде совокупности отдельных элементов, связанных друг с другом не бесконечным, а конечным числом связей. Таким образом, континуальную систему заменяют дискретной. Сам процесс представления анализируемого объекта конечными элементами называется генерацией сетки, а получившаяся в итоге совокупность элементов – конечно-элементной сеткой.

Качество сетки разбиения геометрической модели на конечные элементы оказывает существенное влияние на точность результатов расчета. Этот вывод может быть проиллюстрирован следующим примером [11]. На рис. 1.10, *а* изображен конический стержень, нагруженный силой  $F$ . На рис. 1.10, *б–г* приведены конечно-элементные модели, включающие в себя, соответственно, один, два, четыре конечных элемента.

Решение данной задачи может быть получено, используя подходы курса «Механика материалов», и это решение можно считать достаточно

точным. На рис. 1.11 приведены результаты определения перемещения нижнего торца стержня (см. рис. 1.10), полученные методами сопротивления материалов и с помощью конечно-элементного анализа в зависимости от числа используемых конечных элементов в модели.

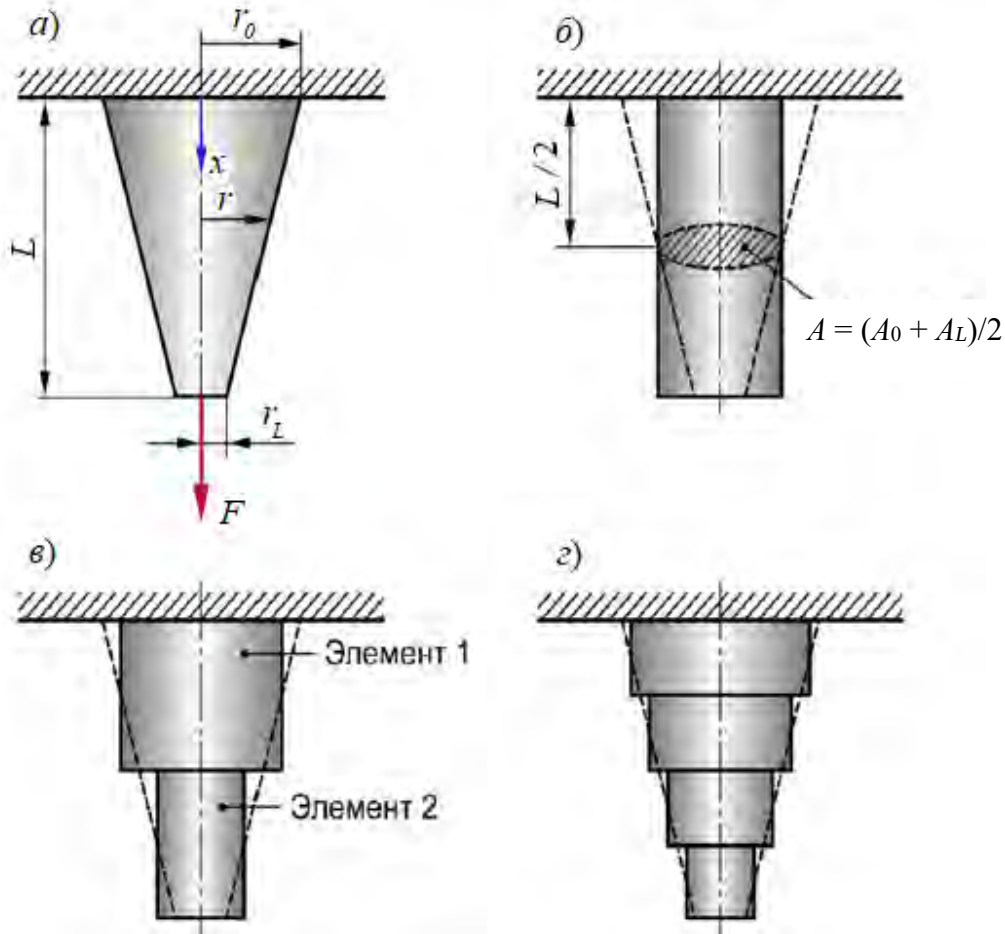


Рис. 1.10. Конечно-элементное представление конического стержня

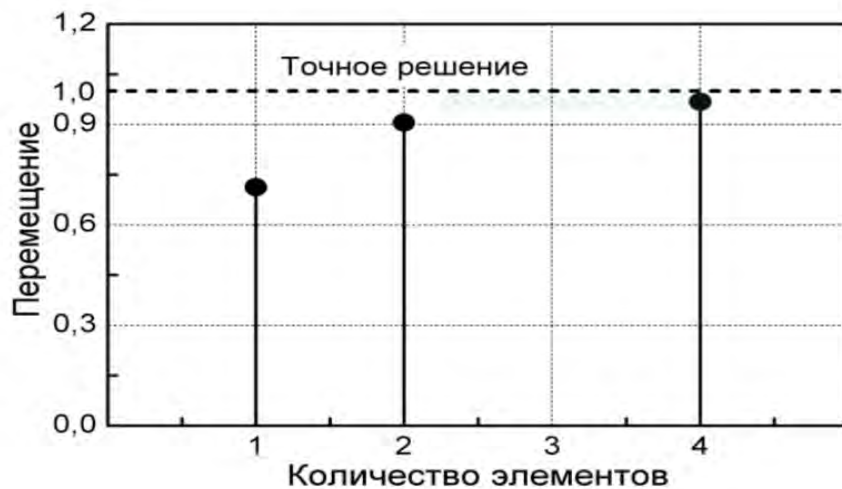


Рис. 1.11. Сопоставление результатов точного анализа с данными численного решения в зависимости от подробности описания исследуемого объекта

Из приведенных на рис. 1.11 результатов можно прийти к выводу о том, что подробность описания геометрии изделия, а следовательно, «густоты» сетки разбиения исследуемого объекта на конечные элементы, оказывает существенное влияние на точность проводимых исследований. Кроме того, анализ напряженного состояния данного изделия с использованием различных сеток разбиения (см. рис. 1.10, в, г) показал значительную «разбежку» величин напряжений (рис. 1.12).

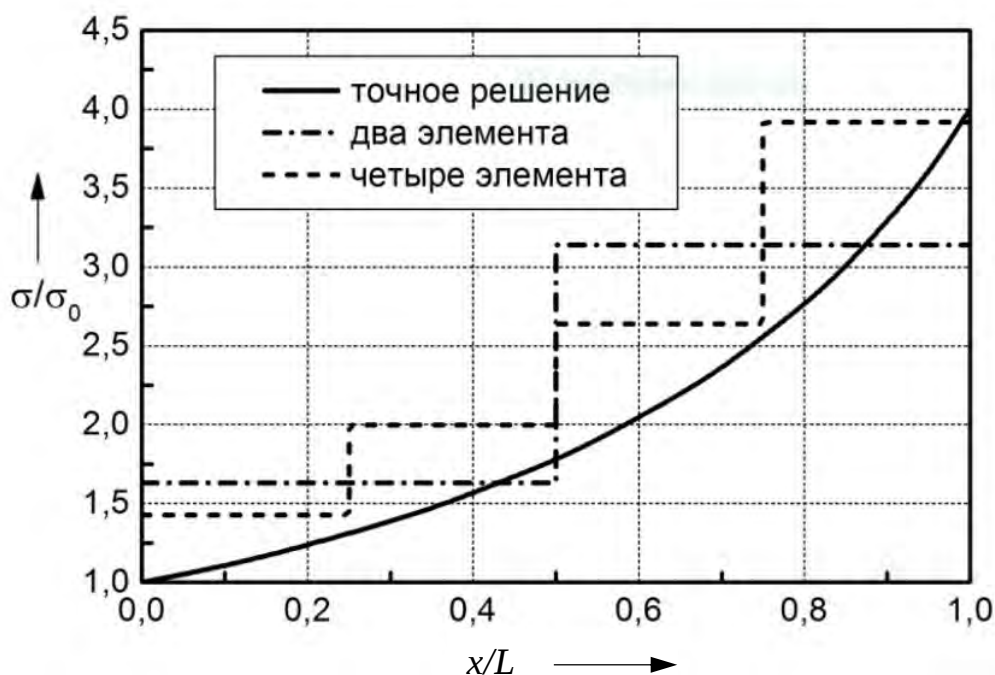


Рис. 1.12. Сопоставление результатов расчета напряженного состояния в коническом стержне

Поэтому необходимо предпринимать меры по возможно более точному соответствию геометрии твердотельной модели реальному объекту. Особенно это касается областей, где имеет место резкое изменение геометрии объекта — наличие отверстий, выточек, галтелей и т. д. В этих местах, как правило, наблюдаются значительные градиенты напряжений (рис. 1.13).

Данные области в механике твердого деформируемого тела принято называть концентраторами напряжений, а явление резкого изменения величин напряжений — концентрацией напряжений. Для того чтобы адекватно описать поле напряжений в зоне концентратора, необходимо значительное измельчение сетки элементов в этой области.

Вместе с тем следует иметь в виду, что измельчение сетки приводит к увеличению числа используемых в модели конечных элементов, а следовательно, возрастанию количества узловых точек и, в конечном счете, числа

степеней свободы. Число степеней свободы в модели за вычетом граничных условий (условий закрепления изделия) равняется порядку разрешающей системы линейных алгебраических уравнений.

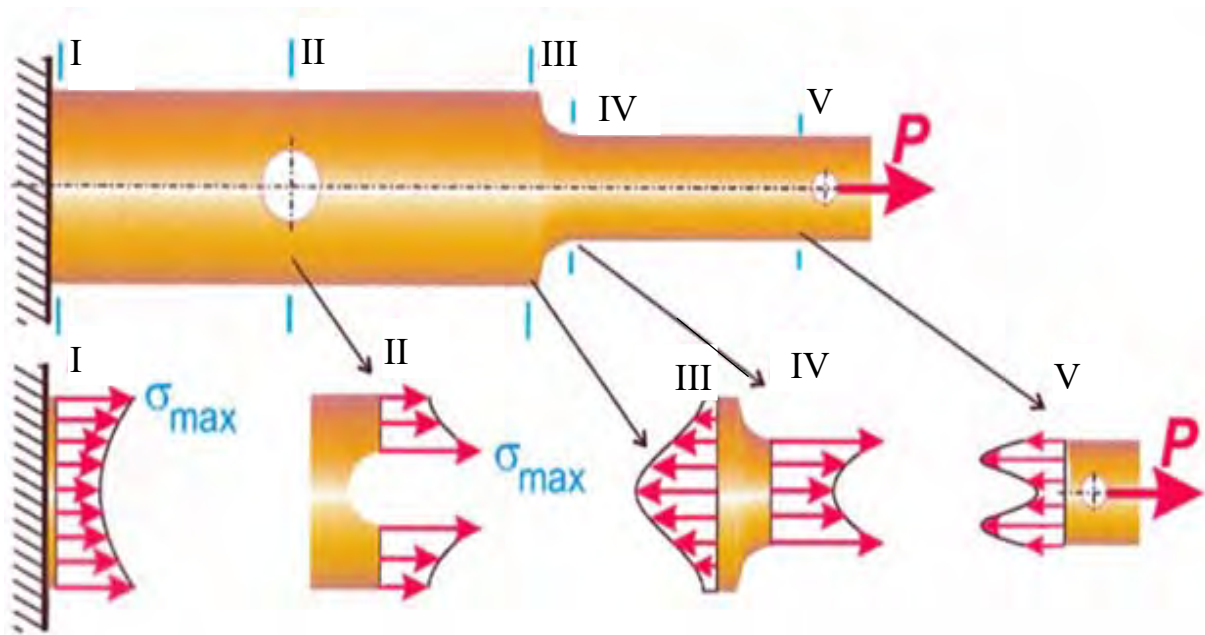


Рис. 1.13. Зоны значительного изменения величин напряжений

Решение системы линейных алгебраических уравнений является наиболее «затратной» частью процесса расчета методом конечных элементов с точки зрения расхода машинного времени. Возможности современного программного обеспечения и вычислительной техники позволяют рассматривать модели, включающие сотни тысяч степеней свободы, для которых продолжительность расчета, отладки модели и анализа предполагает существенные затраты машинного времени. В связи с этим для обеспечения необходимой точности целесообразно найти консенсус между измельчением сетки и реальными затратами машинного времени. В практике проведения численного анализа расчетчики поступают следующим образом. Первоначально выбирают достаточно грубую сетку разбиения и проводят соответствующий анализ. Затем сетка в определенной степени измельчается и анализ этого расчета сопоставляется с предыдущим. Так продолжается до тех пор, пока различие в последующих и предыдущих данных станет несущественным.

Другим источником возникновения ошибок является накопление погрешности при решении системы уравнений, которое для систем линейных алгебраических уравнений большой размерности может быть весьма значительным. Снижение этих ошибок, имеющих чисто вычислительный характер, является самостоятельным предметом для исследований.

Кроме того, на точность проводимого анализа может оказывать влияние и «качество» используемого конечного элемента. В базе данных программного обеспечения SolidWorks Simulation имеются различные конечные элементы. При этом в данном программном комплексе используются такие понятия, как «сетка чернового качества» и «сетка высокого качества». Сетка чернового качества строится на основании применения линейных тетраэдральных конечных элементов (рис. 1.14, а). Их еще называют элементами первого или низшего порядка. Сетка высокого качества базируется на использовании параболических тетраэдральных конечных элементов (рис. 1.14, б), которые называются элементами второго или высшего порядка.

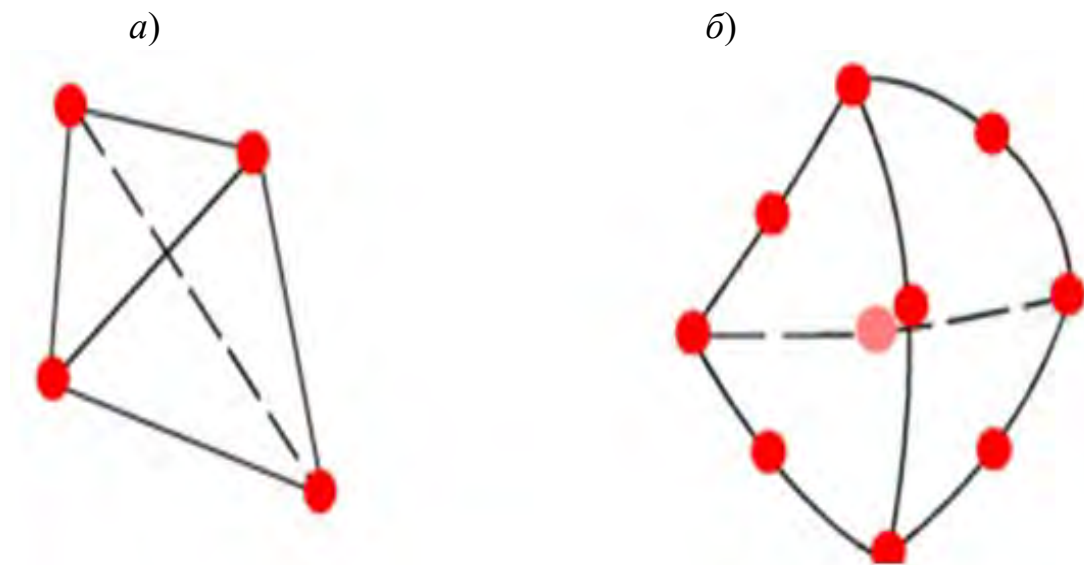


Рис. 1.14. Типы конечных элементов, используемых для описания твердотельных моделей

Как видно из рис. 1.14, а, линейный элемент представляет собой четырехузловой тетраэдр. Параболический же элемент (см. рис. 1.14, б) состоит из четырех угловых и шести срединных узлов.

Проведенные исследования показали, что, как правило, при одинаковой плотности (количество элементов) сетки параболические элементы дают лучшие результаты, чем линейные элементы, т. к. они представляют изогнутые границы более точно и производят лучшие математические аппроксимации.

Однако параболические элементы требуют больше вычислительных ресурсов, чем линейные элементы.

## 1.4. Генерация сетки разбиения конечно-элементной модели

Применяемые на практике конечно-элементные модели могут содержать десятки и даже сотни тысяч степеней свободы. Учитывая размерность таких моделей, создать приемлемую сетку вручную не представляется возможным. В связи с этим используются различные методы автоматизированной генерации сетки при помощи так называемых сеточных генераторов. Сеточным генератором называется специальная компьютерная программа, которая автоматизирует разбиение исследуемого объекта на множество конечных элементов.

Создаваемая такого рода генератором сетка должна по возможности удовлетворять ряду требований.

К ним относятся [11]:

- универсальность, т. е. применимость генератора к широкому диапазону геометрий анализируемых объектов;
- минимизация объема параметров, формируемых пользователем для создания сетки;
- однозначность и простота требований по формированию необходимых для генерации параметров;
- обеспечение максимально возможной точности при описании геометрии изделия;
- гарантированная сходимость в построении сетки;
- возможность в управлении плотностью сетки (однородная или с плавно изменяющимися размерами).

Сетки условно подразделяются на *структурированные* и *неструктурированные*.

К структурированным относятся сетки, у которых:

- каждый узел внутри сетки окружен одинаковым количеством элементов;
- направления внутри сетки легко устанавливаются посредством соотнесения ее с криволинейной системой координат;
- нумерация ближайших соседних узлов сетки определяется из вполне очевидной закономерности.

В качестве примера структурированной сетки можно привести сетку, представленную на рис. 1.15.

Отличительные особенности неструктурированных сеток (рис. 1.16):

- число элементов, которые окружают внутреннюю узловую точку сетки, может быть различным;
- нумерация элементов и узлов осуществляется в определенной последовательности;

– информация о соседних узлах осуществляется за счет сведений о принадлежности узлов соответствующему элементу.

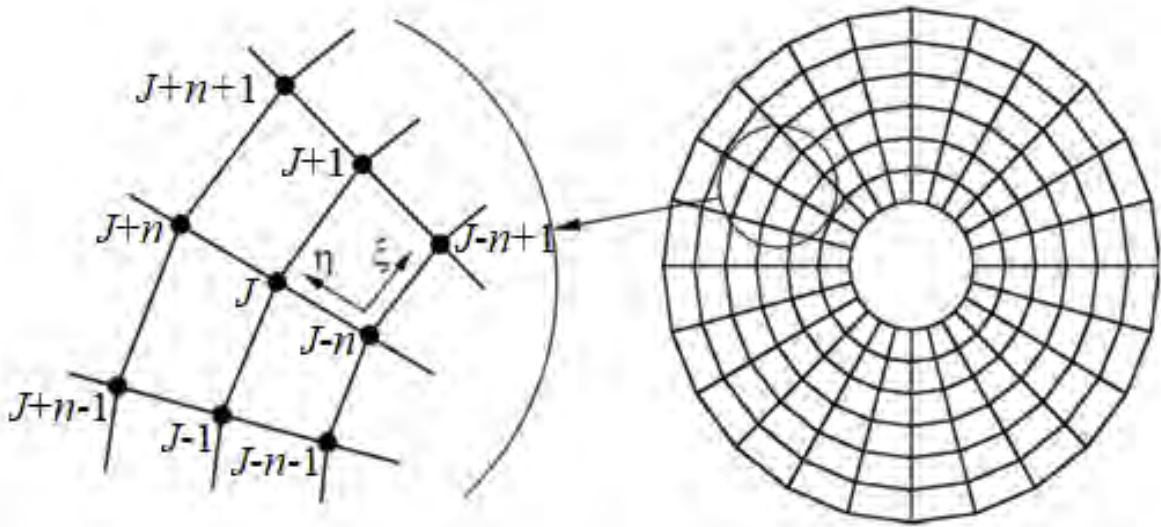


Рис. 1.15. Пример структурированной сетки

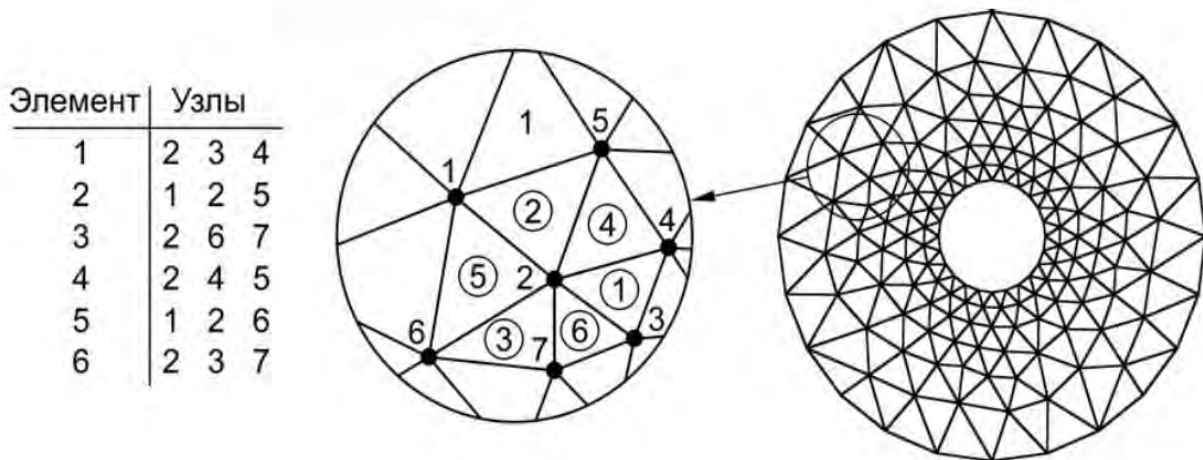


Рис. 1.16. Пример неструктурированной сетки

Характерной особенностью структурированной сетки является относительная простота в ее построении и, как следствие, высокая вычислительная эффективность. Такого рода сеткам, при прочих равных условиях, требуются значительно меньшие объемы памяти вычислительной техники. Кроме того, они позволяют существенно снизить затраты машинного времени.

Вместе с тем следует отметить, что использование структурированных сеток в ряде случаев возможно только для областей достаточно простой геометрической формы. Для объектов со сложной геометрической конфи-

гурацией применение структурированной сетки может быть затруднительно либо вообще невозможно. К недостаткам применения структурированных сеток следует также отнести то, что их использование может привести к включению намного большего количества элементов, чем применение неструктурированных сеток, при анализе одного и того же объекта, т. к. ее элементы не могут резко изменяться в размерах.

К достоинствам построения неструктурированных сеток следует отнести гибкость в дискретизации объектов сложной геометрической формы, возможность быстрого перехода от элементов большого размера к малым, сравнительную простоту в детализации.

Современные программные комплексы располагают достаточно эффективными алгоритмами генерации сеток, грамотное использование которых позволяет получить адекватный результат. Здесь под грамотным использованием алгоритмов генерации сетки разбиения подразумевается процесс сопоставительного анализа результатов расчета в зависимости от густоты сетки конечных элементов в различных зонах объекта (см. подразд. 1.3). Когда дальнейшее измельчение сетки разбиения перестает приводить к значимому изменению результатов расчета, процесс доводки конечно-элементной модели можно завершить.

## 1.5. Решение результирующей системы линейных алгебраических уравнений

При рассмотрении статического напряженно-деформированного состояния изделия процедура метода конечных элементов, практически сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\{R\} = [K]\{\delta\},$$

где  $\{R\}$ ,  $\{\delta\}$  – вектор-столбцы внешней нагрузки и перемещений узловых точек соответственно.

Матрица  $[K]$  является *глобальной матрицей жесткости* всей конечно-элементной модели. Типичная матрица жесткости ансамбля конечных элементов (матрица коэффициентов разрешающей системы уравнений) содержит много нулей. В частности, на некотором расстоянии от диагонали находятся только нулевые члены. Кроме того, данная матрица является симметричной матрицей. Такая матрица называется *ленточной*, а максимальное расстояние от диагонального члена до последнего ненулевого элемента этой же строки называется половиной ширины ленты (рис. 1.17).

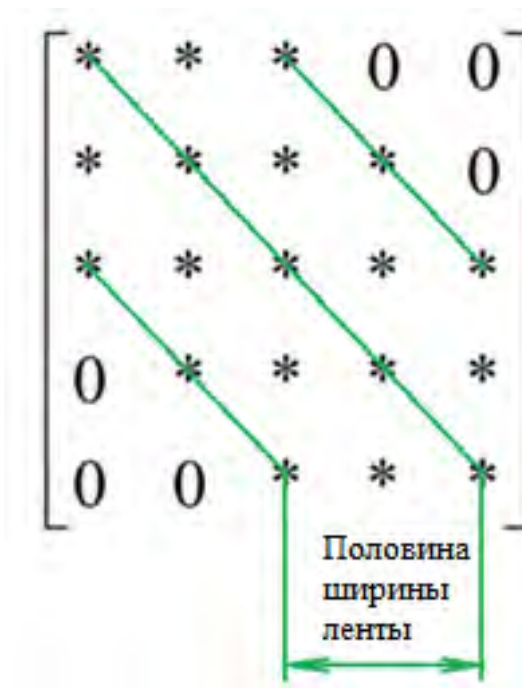


Рис. 1.17. Ленточная матрица

Ширина ленты напрямую зависит от порядка нумерации узлов в конечно-элементной модели и оказывает первостепенное значение на эффективность вычислений метода конечных элементов. Для решения системы уравнений необходимо в памяти ЭВМ зафиксировать информацию обо всех элементах матрицы жесткости  $[K]$ . Таким образом, при количестве степеней свободы, равном  $n$  в конечно-элементной модели, необходимо запомнить  $n^2$  коэффициентов системы уравнений. Для модели, включающей в себя сотни тысяч узловых точек, это обстоятельство является серьезной проблемой, предъявляющей повышенные требования к быстродействию ЭВМ и ее оперативной памяти. Учет ленточного характера матрицы коэффициентов позволяет существенным образом снизить требования к вычислительной технике, поскольку для такого рода систем уравнений необходимо запоминать только элементы матрицы жесткости, входящие в ленту. Так, для матрицы жесткости  $[K]$ , имеющей размеры  $n \times n$  и полуширину ленты  $b$ , количество коэффициентов  $N$ , которые необходимо запомнить, определяется выражением

$$N = b \cdot n - \frac{b(b-1)}{2}.$$

Например, при порядке матрицы  $n = 100$  и полуширине ленты  $b = 10$  количество элементов, обязательных к запоминанию, равно 995, тогда как общее количество коэффициентов разрешающей системы уравнений

составляет 10000. Такое различие будет проявляться тем в большей степени, чем больше порядок разрешающей системы уравнений и меньше ширина ленты. На практике половина ширины ленты обычно меньше 0,1 размерности матрицы и учет свойств ленточной матрицы позволяет уменьшить число арифметических операций почти до 3 % от числа выполняемых операций при использовании метода, не учитывающего ленточного характера матрицы. Современные программные комплексы включают в себя алгоритмы, позволяющие минимизировать ширину ленты за счет соответствующей перенумерации узловых точек.

Решение вышеприведенной системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме имеет вид

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \{R\}, \quad (1.1)$$

где  $[K]^{-1}$  – обратная матрица жесткости.

Некоторые системы уравнений либо вообще не имеют решения:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7; \\ 6x + 8y = 9, \end{cases} \quad (1.2)$$

либо имеют бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7; \\ 6x + 8y = 14. \end{cases} \quad (1.3)$$

Такие системы уравнений называются *вырожденными*. В данных примерах они характеризуют две параллельных прямых (1.2) либо два уравнения, описывающие одну и ту же прямую линию (1.3). Характерной особенностью систем (1.2) и (1.3) является то, что определитель коэффициентов левой части этих систем равен нулю.

С точки зрения обычной математики система линейных уравнений всегда является или вырожденной, или невырожденной. Практика проводимых расчетов показала, что могут еще существовать *почти вырожденные системы*, при решении которых с использованием ЭВМ могут быть получены недостоверные значения неизвестных. Матрицы коэффициентов этих систем еще называют *слабо обусловленными* матрицами, их определитель близок к нулю. Геометрической интерпретацией такого типа систем, состоящих из двух уравнений, может послужить пересечение почти параллельных прямых линий. В этом случае небольшая погрешность в опре-

делении числа (на уровне округления в машинном представлении) может привести к значительным отклонениям искомых величин от точных значений. Здесь под округлением в машинном представлении подразумевается то, что компьютер работает с конечным числом знаков в представлении чисел.

Методы численного решения системы линейных уравнений подразделяются на два типа: *прямые* (конечные) и *итерационные* (бесконечные). В действительности при проведении практических расчетов вычисления не могут продолжаться бесконечно. В данном аспекте речь идет о том, что прямые методы могут, в принципе (с точностью до ошибок округления), привести к однозначному решению посредством проведения конечного числа арифметических операций. С другой стороны, итерационные методы предполагают проведение бесконечно большого числа арифметических операций для определения точного решения. На практике расчеты при использовании итерационных методов останавливаются только при достижении некоторого допускаемого уровня отклонения (погрешности) от точного решения.

Следует отметить, что далеко не всегда решение, полученное с помощью прямого метода, обязательно будет точнее. Особенно это касается конечно-элементных моделей с большим числом степеней свободы. Здесь надо иметь в виду, что в процессе решения большой слабо обусловленной системы прямым методом ошибки округления могут накапливаться и приводить к ошибочным результатам. Итерационный же метод, несмотря на неизбежную погрешность, заложенную в допустимом отклонении, может привести к более точным результатам, т. к. при его использовании ошибки округления не накапливаются. Учитывая достоинства и недостатки указанных двух направлений решения систем линейных алгебраических уравнений, целесообразно воспользоваться обоими методами и в последующем сопоставить полученные результаты. Если различия невелики, можно констатировать, что решение системы произошло успешно. В связи с этим следует отметить, что современные компьютерные системы конечно-элементных расчетов содержат программное обеспечение обоих направлений решения систем линейных алгебраических уравнений. Ниже приведены наиболее распространенные и апробированные методы, а также основные принципы их алгоритма.

К прямым методам относятся:

- метод Гаусса, классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Сущность данного метода состоит в последовательном исключении неизвестных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной

системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последнего (по номеру), находятся все искомые величины системы;

- матричный метод, сущность которого заключается в получении обратной матрицы коэффициентов  $[K]^{-1}$  и последующем использовании уравнения (1.1);

- метод квадратного корня (разложение Халецкого), в котором матрица коэффициентов СЛАУ представляется в виде произведения нижней треугольной матрицы  $L$  и транспонированной к ней:  $[K] = [L][L]^T$ .

Среди итерационных методов следует отметить:

- метод Якоби, заключающийся в исключении  $j$ -й переменной из  $j$ -го уравнения исходной системы;
- метод Гаусса – Зейделя, являющийся модификацией метода Якоби;
- метод бисопряженных градиентов;
- метод релаксации и т. д.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что подразумевается под понятием «инженерный анализ»?
2. Преимущества компьютерного моделирования по сравнению с другими видами анализа.
3. Что подразумевается под аббревиатурой CAE?
4. Что подразумевается под аббревиатурой CAD/CAE?
5. Что подразумевается под аббревиатурой FEA?
6. Что подразумевается под аббревиатурой МКЭ?
7. Какие наиболее популярные CAD-/CAE-системы вам известны?
8. В чем заключается сущность метода конечных элементов?
9. Раскройте понятие «конечный элемент».
10. Какие типы конечных элементов вам известны?
11. Что называется узлами конечных элементов или узловыми точками?
12. Раскройте понятие «степень свободы узловой точки».
13. Как определяется число степеней свободы конечного элемента и всей конечно-элементной модели в целом?
14. Конечно-элементная модель представляет собой континуальную систему или дискретную? В чем различие между континуальной и дискретной системами?
15. Какой вид имеют результирующие уравнения метода конечных элементов?
16. Раскройте понятие «кусочно-непрерывные функции».

17. Где прикладывается внешняя нагрузка и по каким направлениям в методе конечных элементов?

18. Каким образом связываются между собой конечные элементы?

19. Раскройте понятия «сеточная модель изделия» и «сетка разбиения».

20. Раскройте понятие «конечно-элементная модель» анализируемого состояния.

21. Укрупненно, на какие этапы подразделяется конечно-элементный анализ?

22. Раскройте понятие «генератор сеток» (Mesh generator).

23. Какая информация генерируется с использованием *препроцессора* (Preprocessor)?

24. Какие действия выполняются на *процессорной* стадии конечно-элементного анализа? Что входит в понятие «*решатель*» (Solver) на этой стадии?

25. Какие действия выполняются на *постпроцессорной* (Postprocessor) стадии конечно-элементного анализа?

26. Каким образом отражается густота сетки разбиения на точность результатов расчета в методе конечных элементов?

27. Раскройте понятия «*концентратор напряжений*» и «*концентрация напряжений*».

28. Какие факторы могут оказывать влияние на точность проводимых расчетов?

29. Раскройте понятия «*сетка чернового качества*» и «*сетка высокого качества*».

30. Раскройте понятия «*структурированные*» и «*неструктурированные*» сетки разбиения.

31. Какие преимущества и недостатки в использовании *структурированных* и *неструктурированных* сеток разбиения?

32. Как выглядит в матричной форме разрешающая СЛАУ?

33. Поясните физический смысл понятия «*глобальная матрица жесткости*».

34. Какими свойствами обладает *глобальная матрица жесткости*?

35. Что называется *ленточной матрицей*?

36. Как взаимосвязаны полуширина ленты глобальной матрицы жесткости и число арифметических операций, необходимых для решения разрешающей СЛАУ?

37. Какие СЛАУ называются *вырожденными*?

38. Чему равен определитель матрицы жесткости *вырожденной* системы?

39. Какие СЛАУ называются *слабо обусловленными*?
40. Чем характеризуется определитель *слабо обусловленных* матриц?
41. Как различаются методы численного решения СЛАУ?
42. Раскройте понятие «*прямые*» методы решения СЛАУ.
43. Раскройте понятие «*итерационные*» методы решения СЛАУ.
44. Приведите примеры *прямых* и *итерационных* методов решения СЛАУ.

## 2. ТВЕРДОТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ SOLIDWORKS

Программный комплекс SolidWorks представляет собой средство для автоматизированного конструирования твердотельных моделей изделий машиностроения. Он позволяет легко получать твердотельную модель из двумерного эскиза, применяя очень простые и эффективные инструменты моделирования. Обеспечивает разработку изделий любой степени сложности и назначения. Работает в среде Microsoft Windows.

При выполнении практических задач целесообразно использовать электронное справочное руководство, которое вызывается при нажатии *Справка* (рис. 2.1).

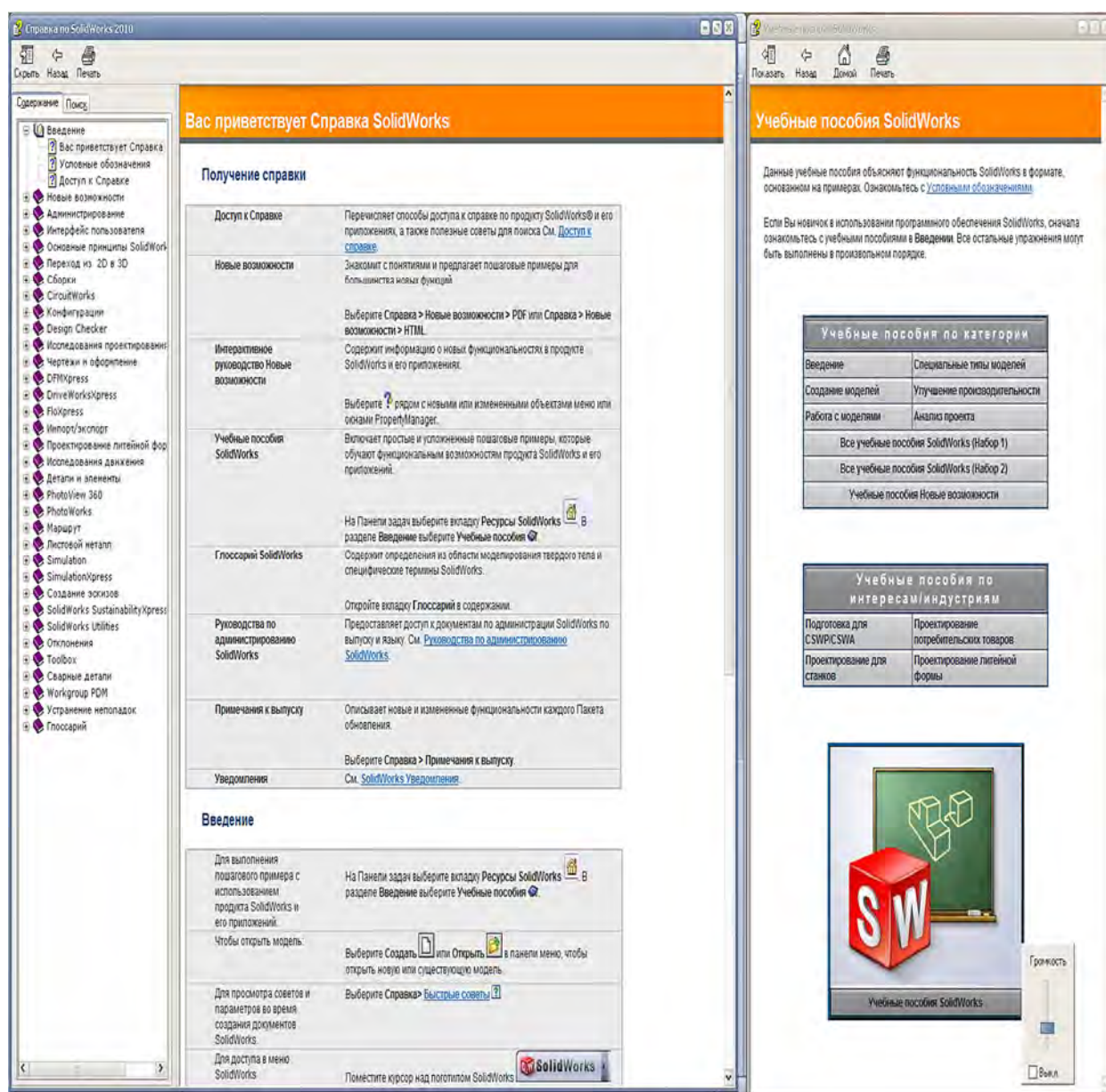


Рис. 2.1. Электронное справочное руководство SolidWorks

## 2.1. Ознакомление с работой SolidWorks. Основные принципы трехмерного проектирования изделий в среде SolidWorks

Проектирование изделий в среде SolidWorks предполагает выполнение следующей последовательности действий:

- 1) выбор плоскости для создания двумерного эскиза;
- 2) формирование эскиза изделия;
- 3) преобразование эскиза в твердотельный элемент;
- 4) формирование детали из различных элементов;
- 5) компоновка созданных деталей в сборку.

При этом гибкий инструментарий SolidWorks позволяет изменять значения любого размера, накладывать взаимосвязи на взаимное расположение объектов в течение всего процесса проектирования. Здесь следует иметь в виду, что процесс создания трехмерных моделей основан на принципах добавления и снятия материала, аналогичных методам реальных технологических процессов.

## 2.2. Начало работы в SolidWorks и особенности интерфейса этого объекта

После инсталляции SolidWorks на компьютер и запуска из меню *Пуск–Программы* на экране открывается окно. Щелкните левой кнопкой мыши по иконке *Создать*, в результате на экране появится дополнительное меню (рис. 2.2).

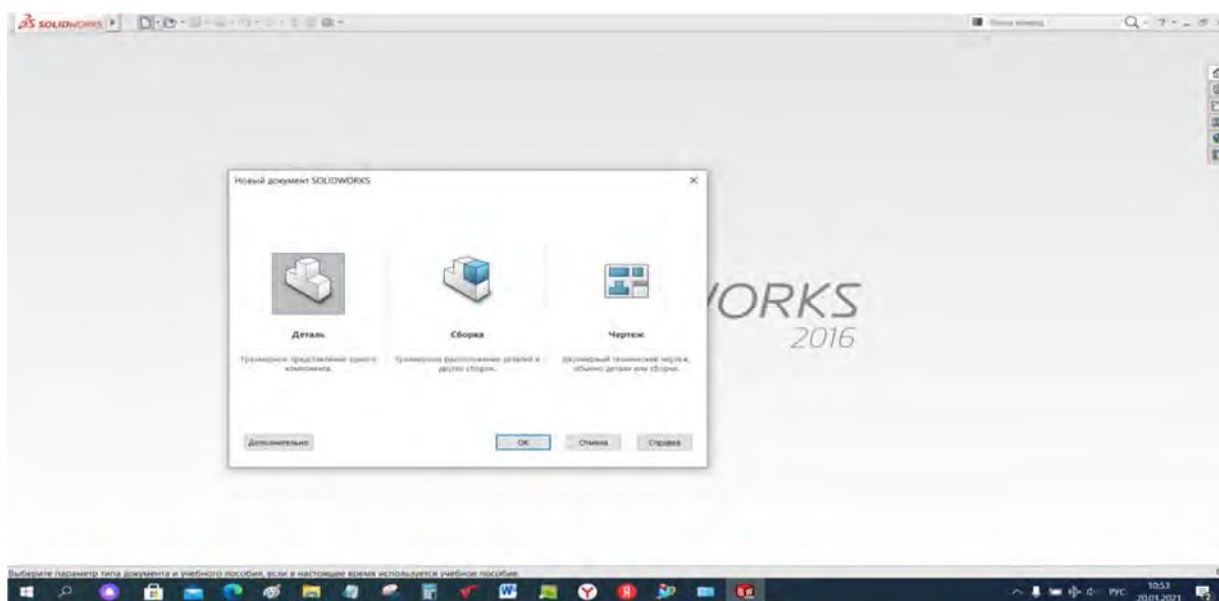


Рис. 2.2. Меню создаваемых документов в SolidWorks

Из этого меню выбираем иконку *Деталь*, впоследствии на мониторе высветится главное окно SolidWorks (рис. 2.3).

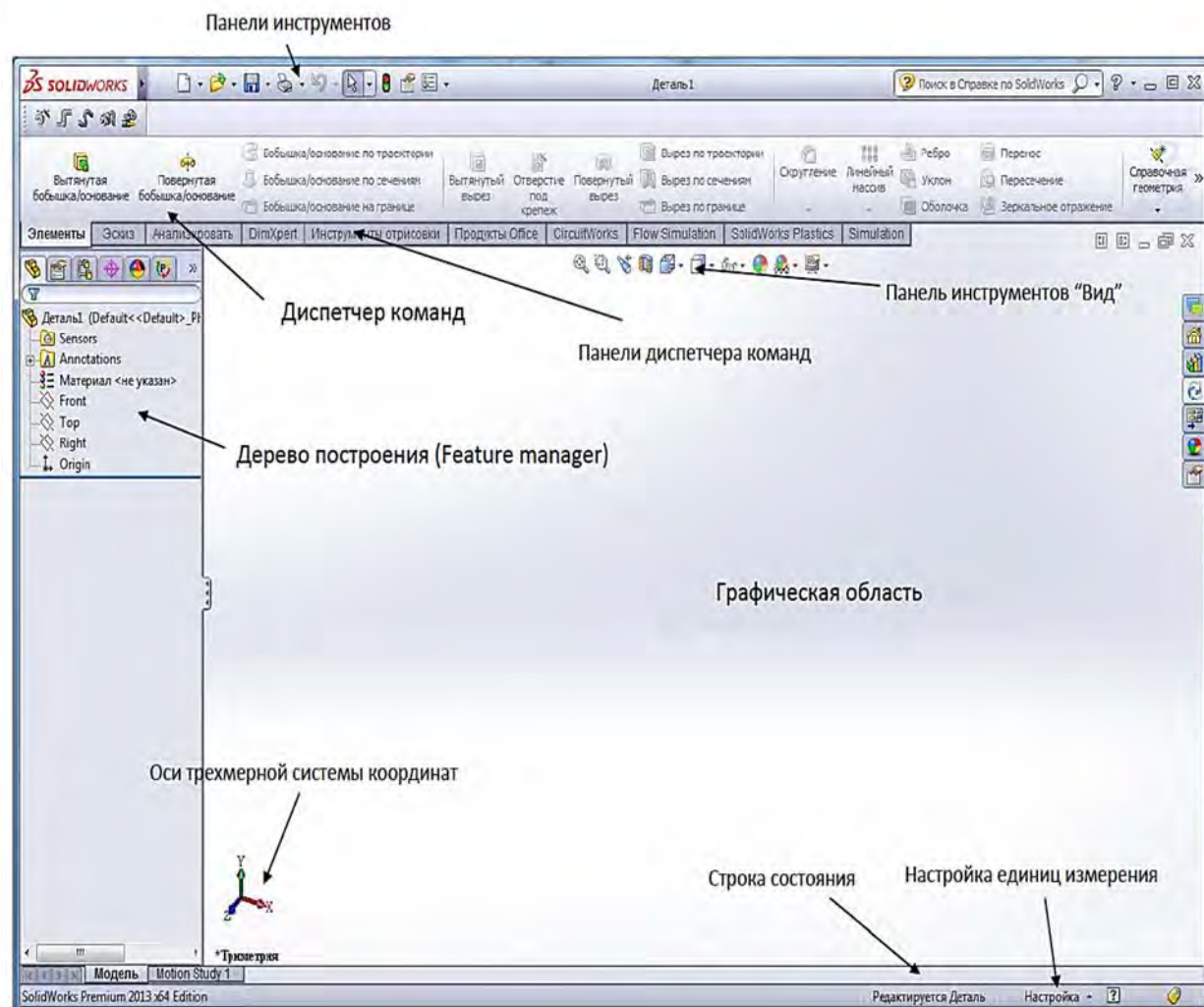


Рис. 2.3. Области главного окна SolidWorks

Как видно из рис. 2.3, интерфейс SolidWorks соответствует привычному графическому интерфейсу программ семейства Windows Microsoft. Стандартные функции Windows обеспечивают работу с файлами (создание, открытие, сохранение и др.). Печать эскизов, 3D-моделей с экрана и чертежей в SolidWorks осуществляется на любое устройство графического вывода (плоттер, принтер), установленное в операционной системе.

Проектирование в SolidWorks включает создание объемных моделей деталей и сборок с возможностью генерировать на их основе рабочие чертежи. Создание нового документа в SolidWorks сопровождается выбором шаблона документа: *Деталь*, *Сборка* или *Чертеж* (см. рис. 2.2). В случае выбора шаблона *Деталь* или *Сборка* графическая область представляет собой трехмерное пространство.

Основными элементами интерфейса SolidWorks являются: меню, панели инструментов, область построения (графическая область), строка состояния и т. д. (см. рис. 2.3). Для наглядного представления процесса проектирования в SolidWorks существует *Дерево конструирования* или *Дерево построения (Feature Manager)*. Оно реализовано в стиле традиционного *Проводника Windows*, обычно располагается в левой части рабочего окна SolidWorks и представляет собой последовательность операций, выполнение которых приводит к образованию детали, а также дополнительные элементы построения (оси, плоскости). *Дерево построения* содержит полную информацию о трехмерном объекте и динамически связано с областью построения. В режиме сборки *Дерево построения* отображает список деталей, входящих в сборку, а также необходимые сопряжения деталей и сборок (см. рис. 2.3).

Основными функциями *Дерева построения (Feature Manager)* являются:

- выбор элементов по имени (по нажатию левой кнопки мыши);
- определение и изменение последовательности, в которой создаются элементы;
- отображение размеров элемента, которое можно выполнить, дважды нажав на имя элемента;
- отображение и гашение элементов детали и компонентов сборки.

При построении новой трехмерной модели детали в *Дереве построения* по умолчанию присутствуют следующие графические элементы (рис. 2.4):

- исходная точка с нулевыми начальными координатами;
- три взаимно перпендикулярные плоскости: *Спереди, Сверху, Справа*.

*Панель инструментов* (см. рис. 2.3) является настраиваемым элементом интерфейса. Пользователь имеет возможность устанавливать расположение панелей инструментов, их отображение в зависимости от типа документа.

*Диспетчер команд* (см. рис. 2.3) – это контекстная панель инструментов, которая обновляется автоматически в зависимости от панели инструментов, к которой требуется доступ. При построении детали *Диспетчер команд* по умолчанию содержит панели инструментов *Элементы* и *Эскиз*, в режиме сборки – панели инструментов *Сборка* и *Эскиз*.

Быстрая настройка *Панелей инструментов* и *Диспетчера команд* производится при нажатии правой кнопки мыши на границе окна соответствующей панели.

*Верхнее меню* содержит команды SolidWorks (см. рис. 2.4) в полном объеме. Верхнее меню появляется на экране при наведении курсора мыши на надпись SolidWorks в левом верхнем углу экрана. При отсутствии

команды на панели инструментов ее всегда можно найти через верхнее меню.

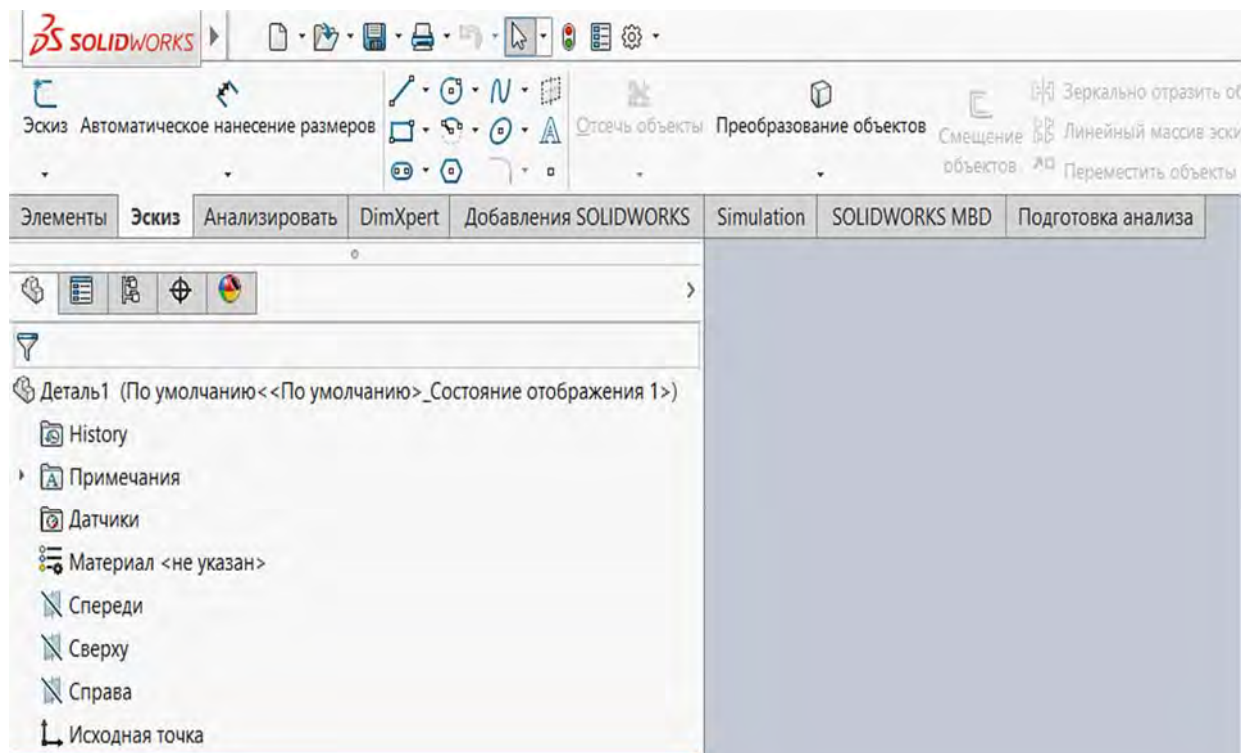


Рис. 2.4. Обязательные графические элементы в *Дереве построения*

В *Строке состояния* (см. рис. 2.3), в нижней части окна SolidWorks, представлена информация, связанная с выполняемой функцией.

Действие мыши в SolidWorks соответствует стандартным функциям операционных систем семейства Windows Microsoft. Выбор объектов (элементов в *Дереве построения*, поверхностей твердотельной модели в области построения, выбор объектов в плоском эскизе) осуществляется при нажатии левой кнопки мыши. Нажатие правой кнопки мыши соответствует запуску всплывающего меню объекта.

Как уже отмечалось выше, создание твердотельных объектов предусматривает выполнение определенных операций в следующей последовательности:

- 1) выбор плоскости для построения *Эскиза*;
- 2) построение объектов плоского эскиза, простановка размеров, определение взаимосвязей;
- 3) выполнение действия над плоским эскизом, придание толщины плоским объектам эскиза (вытягивание, поворот и т. д.).

На примере конструирования детали выполним построение простого цилиндрического элемента методом *Вытянутой бобышки* и одновременно рассмотрим основные инструменты SolidWorks.

## 2.3. Построение твердотельной модели цилиндрического объекта

Для построения данной модели следует выполнить следующую последовательность действий.

1. Начать новый документ – деталь SolidWorks.

2. На панели инструментов *Элементы* нажать кнопку *Вытянутая бобышка/основание*. При этом будет активизирована команда создания твердотельного элемента методом *Вытянутой бобышки* (рис. 2.5).

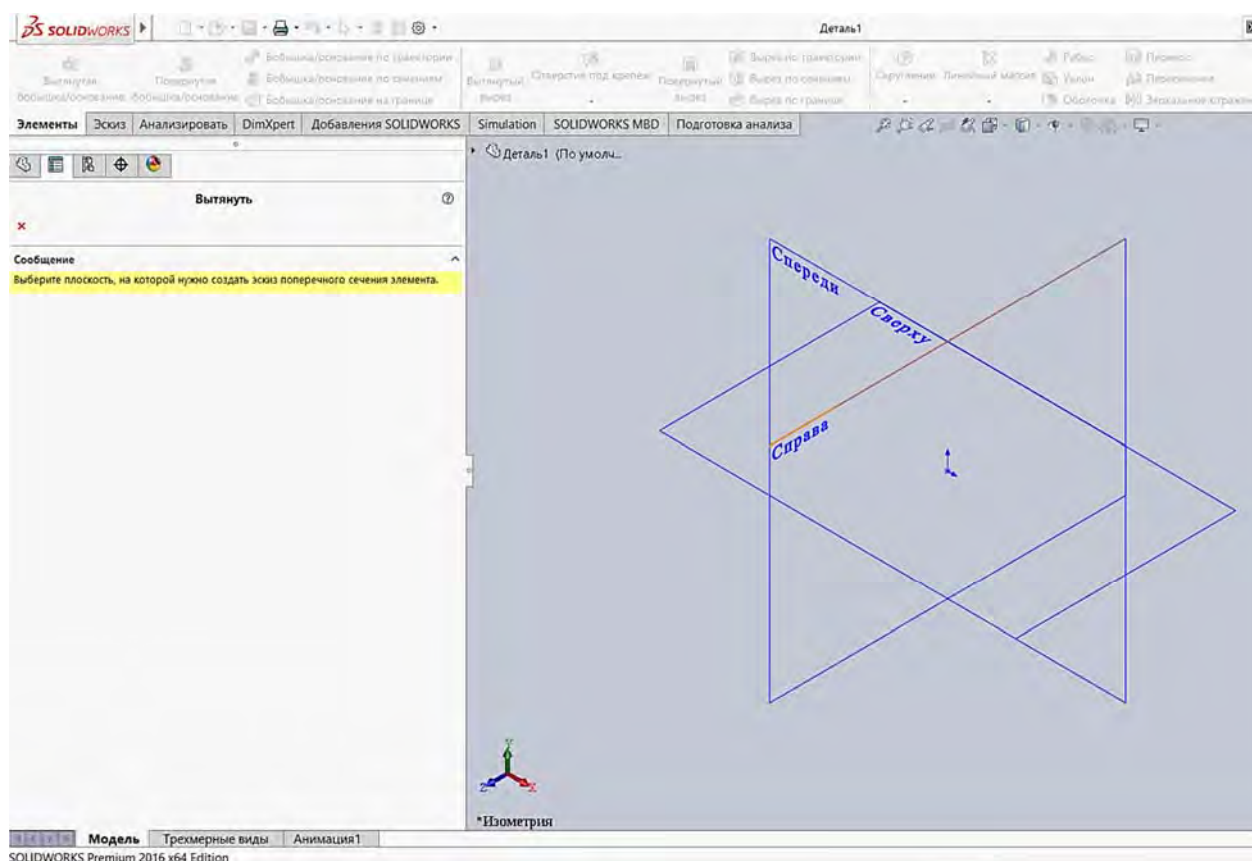


Рис. 2.5. Вид графической области при создании твердотельной модели командой *Вытянутая бобышка/основание*

3. Программа предложит выбрать одну из трех начальных плоскостей: *Спереди*, *Сверху*, *Справа* для построения *Эскиза* будущего трехмерного элемента.

4. Например, выберем плоскость *Спереди* (выбор осуществляется по надписи наименования плоскости). При этом изображение на дисплее изменится таким образом, что плоскость *Спереди* будет обращена на пользователя, перпендикулярно направлению его взгляда. Следует отметить, что выбор плоскости для построения эскиза может быть осуществлен и до активизации команды создания твердотельного элемента.

5. Далее, на панели инструментов *Эскиз* инструментом *Окружность* построить окружность произвольным радиусом с центром в *Исходной точке* с нулевыми координатами.

6. Нажать кнопку *Автоматическое нанесение размеров* и, выбрав дугу окружности, изменить диаметр в появившемся окне на значение 100 мм.

7. Чтобы завершить эскиз, необходимо нажать значок  *Выход из эскиза*, при этом система автоматически предложит выбор параметров создаваемого элемента *Вытянуть* в окне *Менеджер свойств* (левая часть экрана), а также в графической области будет отображаться предварительный вид создаваемого трехмерного элемента (рис. 2.6).

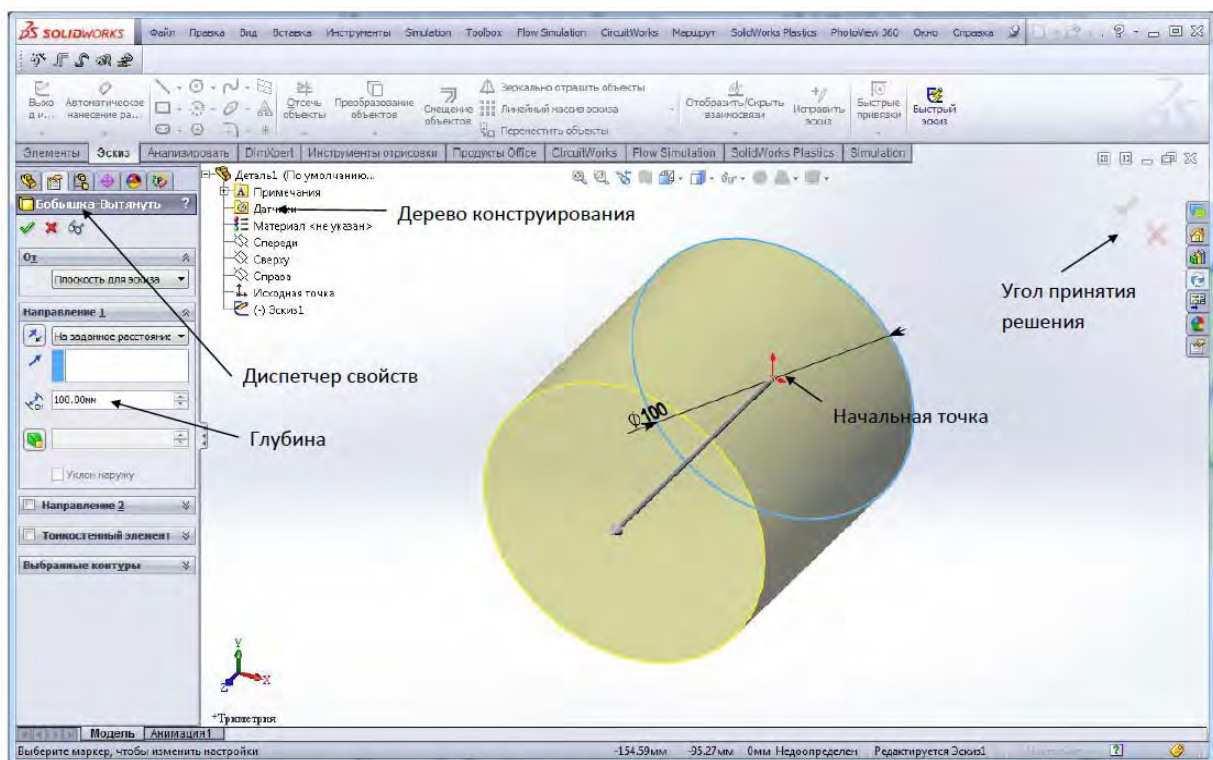


Рис. 2.6. Задание размеров цилиндра

8. В разделе *Направление 1* окна *Менеджер свойств* установить параметр *Глубина* равным 100 мм (см. рис. 2.6).

9. Нажать *Enter* или *Ok* либо значок  принятия элемента в окне *Угол* (правый верхний угол экрана) для выбора в графической области системы SolidWorks.

10. Сохранить деталь под именем *Цилиндр.sldprt*.

В результате была построена трехмерная модель цилиндра с диаметром основания 100 мм и высотой 100 мм. Построенный элемент отображается в графической части системы и динамически связан с объектом в *Дереве построения* под наименованием *Вытянуть 1*.

## 2.4. Инструменты для изменения ориентации вида

Для того чтобы изменить ориентацию вида, существует панель инструментов *Ориентация видов* (рис. 2.7). С помощью инструментов этой панели можно выбрать один из шести стандартных видов: *Спереди*, *Сзади*, *Сверху*, *Снизу*, *Справа*, *Слева*, а также изометрические проекции *Изометрия*, *Диметрия*, *Триметрия*. Ориентации видов соответствуют расположению трех основных начальных плоскостей: *Спереди*, *Сверху*, *Справа*. Также панель *Ориентация видов* позволяет установить вид *Перпендикулярно* направлению взгляда наблюдателя. В этом случае предварительно необходимо выбрать плоскую грань или плоскость либо цилиндрическую или коническую грань.

Кроме того, может быть задано количество видов в графической области: *Один вид*, *Два вида* или *Четыре вида*.

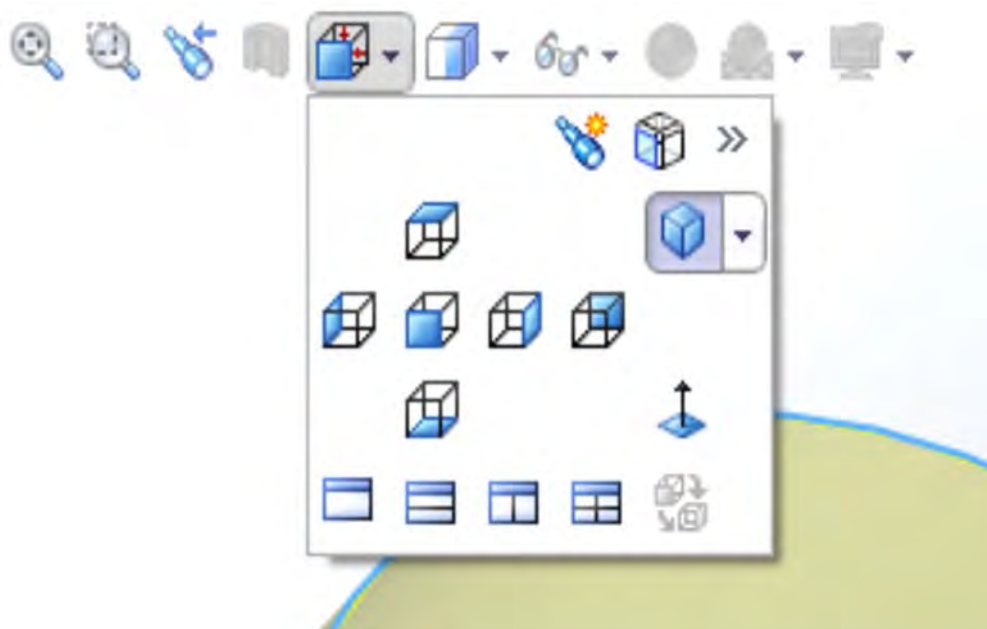


Рис. 2.7. Ориентация видов на панели инструментов

## 2.5. Инструменты для изменения масштаба, вращения и перемещения вида

Команды для изменения масштаба, вращения и перемещения вида содержатся на панели инструментов *Вид* (см. рис. 2.7). Варьирование масштаба вида выполняется двумя основными командами:

- 1) *Изменить в размер экрана* ;
- 2) *Увеличить элемент вида* .

Команда *Изменить в размер экрана* позволяет установить масштаб вида так, чтобы изображения модели, сборки или чертежа были видны полностью.

Команда *Увеличить элемент вида* может быть успешно заменена изменением масштаба вида с помощью колеса «скрола» мыши. Поворот колеса мыши назад соответствует увеличению масштаба, поворот колеса мыши вперед – уменьшению масштаба вида. Во время вращения указатель мыши является центром изменения масштаба.

Кроме указанных возможностей изменения *Вида* модели, существуют еще команды, приведенные на рис. 2.8. Они могут быть доступны посредством щелчка правой клавишей мыши в графической части экрана. Из предлагаемого меню можно выбрать нужную команду посредством нажатия левой клавиши мыши. Так, например, вращение вида может быть выполнено по команде *Вращать вид*, либо при нажатии средней кнопки мыши или колеса «скрола». В последнем случае для поворота вида необходимо нажать «скрол» и, не отпуская его, перемещать указатель мыши.

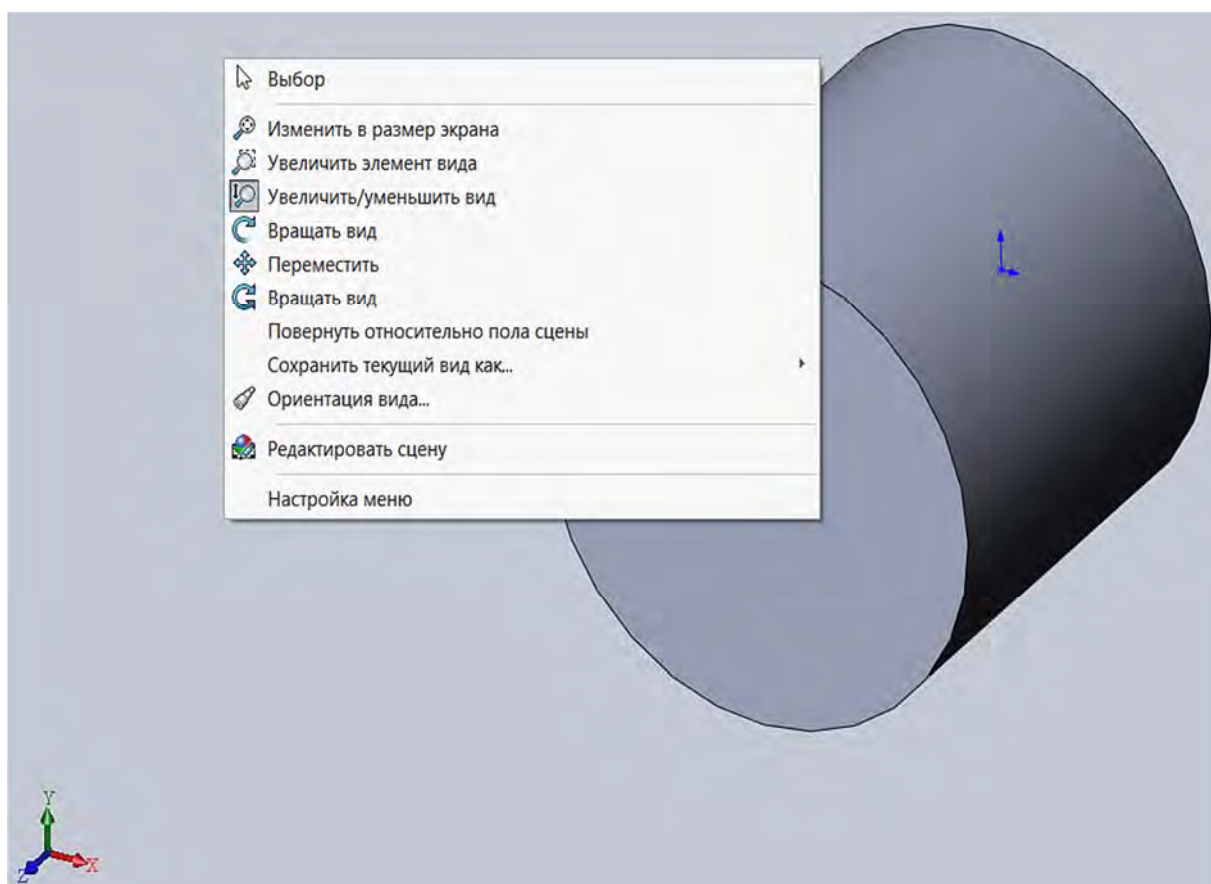


Рис. 2.8. Команды управления видом модели

Перемещение детали выполняется по команде *Переместить вид*. Перемещение вида может выполняться также аналогично повороту вида

(перемещением мыши с нажатым колесом прокрутки) при нажатой клавише *Ctrl*.

**Внимание!** После добавления размеров в эскиз в *Строке состояния* эскиза (см. рис. 2.3) появится определенная информация. Все эскизы SolidWorks могут быть представлены в одном из шести состояний. Каждое состояние обозначается другим цветом.

В *полностью определенном эскизе* положения всех объектов полностью описаны с помощью размеров или взаимосвязей, или тех и других одновременно. В таком эскизе все объекты показаны *черным* цветом.

В *недоопределенном эскизе* для полного указания геометрии требуются дополнительные размеры или взаимосвязи. В этом состоянии можно перетаскивать недоопределенные объекты эскиза для изменения эскиза. Недоопределенные объекты эскиза показываются *синим* цветом.

В *переопределенном эскизе* объект содержит противоречивые размеры или взаимосвязи, или те и другие одновременно. Переопределенные объекты эскиза показываются *красным* цветом.

Когда эскиз *не решен*, положение геометрии не может быть определено с помощью существующих ограничений, и отображается он *розовым* цветом.

В *некорректном эскизе* геометрия была геометрически недопустимой, если бы расчет эскиза был выполнен. Объект некорректного эскиза будет отображен *желтым* цветом.

## 2.6. Создание сборок

Ранее мы ознакомились с некоторыми командами графического редактора SolidWorks, используемыми при создании твердотельной модели. На данном этапе рассмотрим процесс создания сборки деталей в законченное изделие. Сборка включает в себя несколько деталей, которые размещены друг относительно друга определенным образом. Процесс сборки начинается с размещения в графической области одной (*базовой*) детали с последующим добавлением остальных. Между деталями устанавливаются определенные взаимосвязи (*сопряжения*), которые позволяют сохранять единство сборки при ее перемещении или повороте.

Предположим, необходимо построить сборку, представляющую собой ступенчатый брус круглого поперечного сечения с нагрузками  $F_i$ , приложенными в определенных сечениях (рис. 2.9).

В принципе данный ступенчатый брус представляет собой деталь, которую достаточно просто изобразить в виде трехмерной модели. Но для проведения последующего анализа напряженно-деформированного состояния этого бруса под действием нагрузок его удобно представить в виде

сборки отдельных фрагментов по каждому из участков, поскольку нагрузка в SolidWorks Simulation должна прикладываться в области *вершины*, *кромки* или *границы* исследуемого изделия. Предположим, что площади поперечных сечений и длины участков имеют следующие размеры:  $A_1...D_1 = 80$  мм,  $A_2...D_2 = 50$  мм,  $A_3...D_3 = 100$  мм;  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 100$  мм.

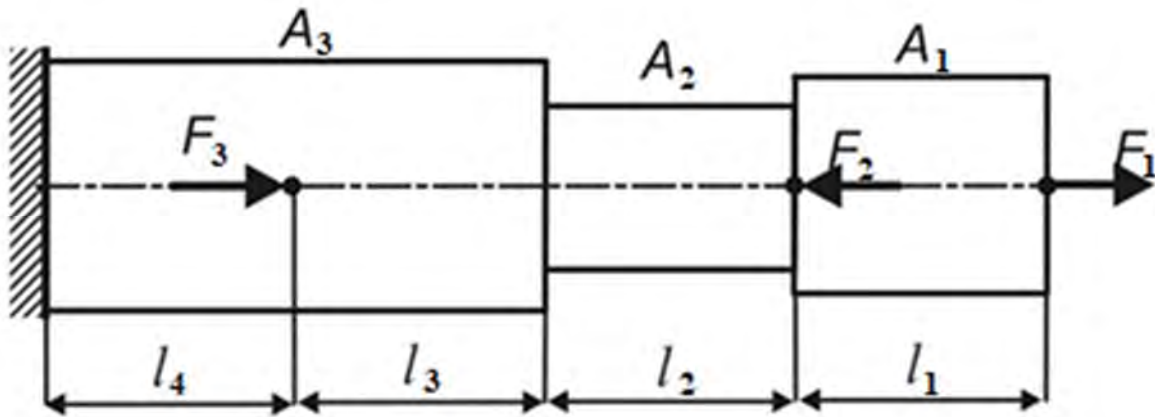


Рис. 2.9. Ступенчатый брус круглого поперечного сечения с длинами участков  $l_1...l_4$ , площадями поперечных сечений  $A_1...A_3$  и приложенными усилиями  $F_1...F_3$

Создадим твердотельные модели каждого из фрагментов, учитывая, что на третьем и четвертом участках эти фрагменты одинаковы. Всего будет три детали. Построение этих моделей аналогично тому, как это сделано ранее (см. рис. 2.8). В данном конкретном случае можно упростить все проблемы, построив одну модель с произвольными размерами, а затем, задав размеры для каждого конкретного участка, сохранить их под разными именами – *Деталь 1, 2, 3*.

Далее процесс создания сборки деталей начинается с создания документа новой сборки (рис. 2.10 и 2.11).

На следующем этапе выбираем *базовую деталь сборки* (рис. 2.12).

Далее открываем одну из деталей сборки, например *Деталь 2*. Затем в верхнем меню выбираем *Окно* и *Отобразить окна слева направо* (рис. 2.13).

В результате получим следующий вид экрана монитора (рис. 2.14).

В данный момент активна *графическая область*, где отображена *базовая деталь сборки*. Для того чтобы активизировать *графическую область Детали 2*, необходимо щелкнуть по ней левой клавишей мыши. Аналогичным образом могут быть представлены одновременно несколько окон сборки и деталей.

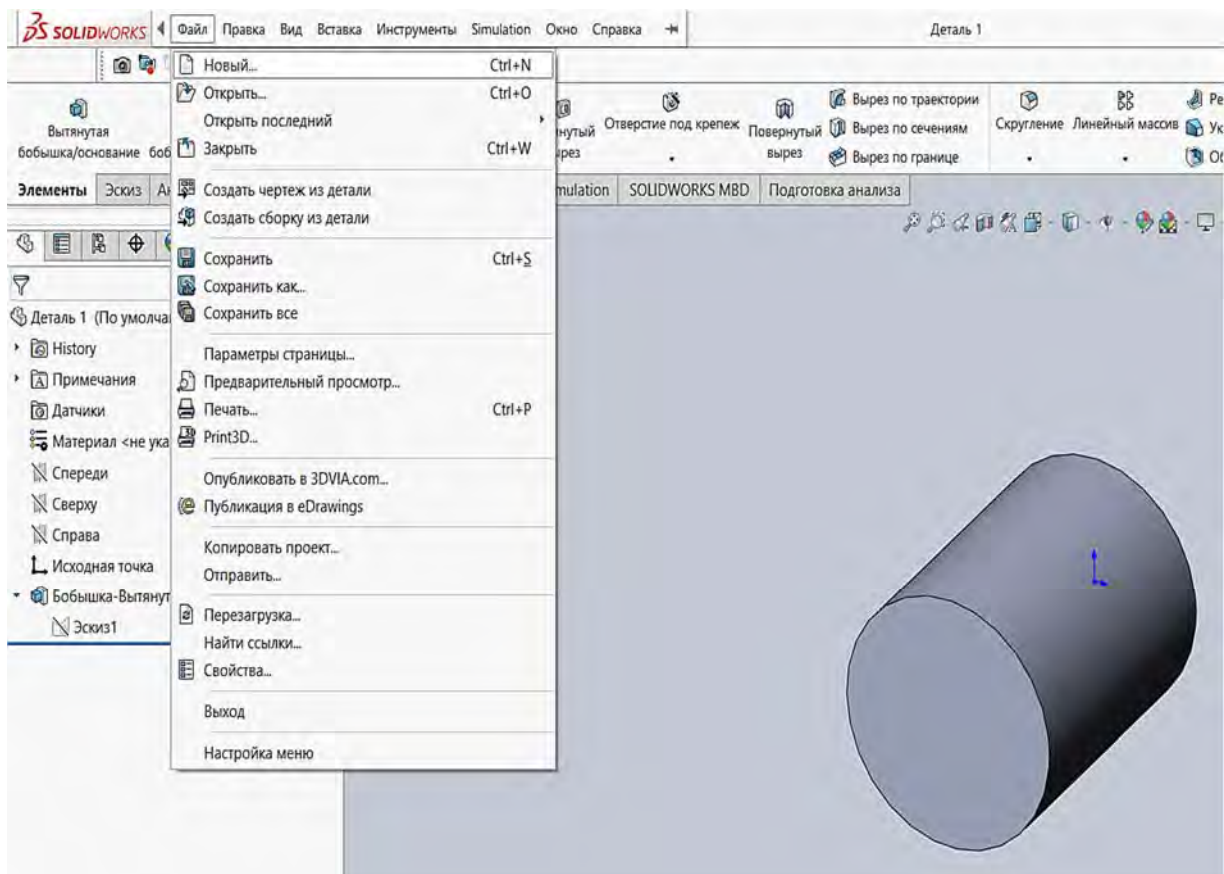


Рис. 2.10. Создание нового документа (сборки)

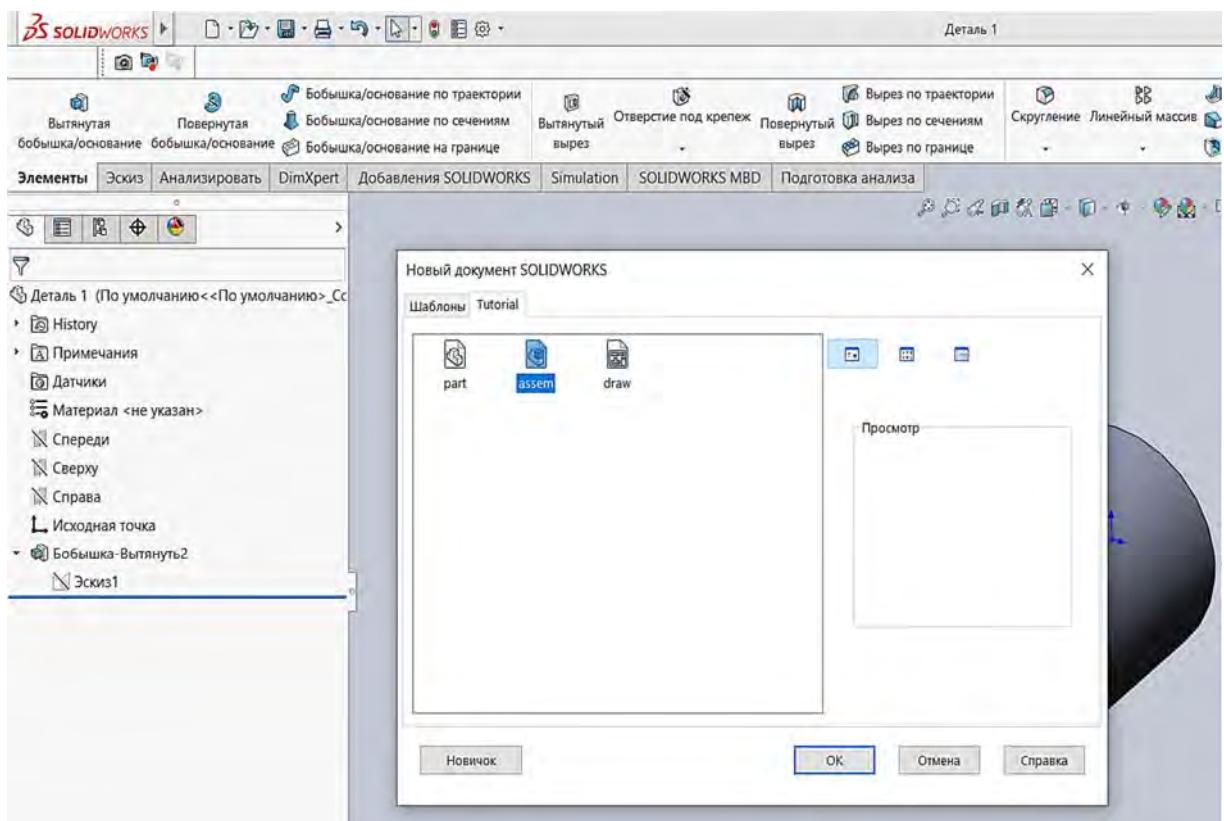


Рис. 2.11. Начало формирования сборки

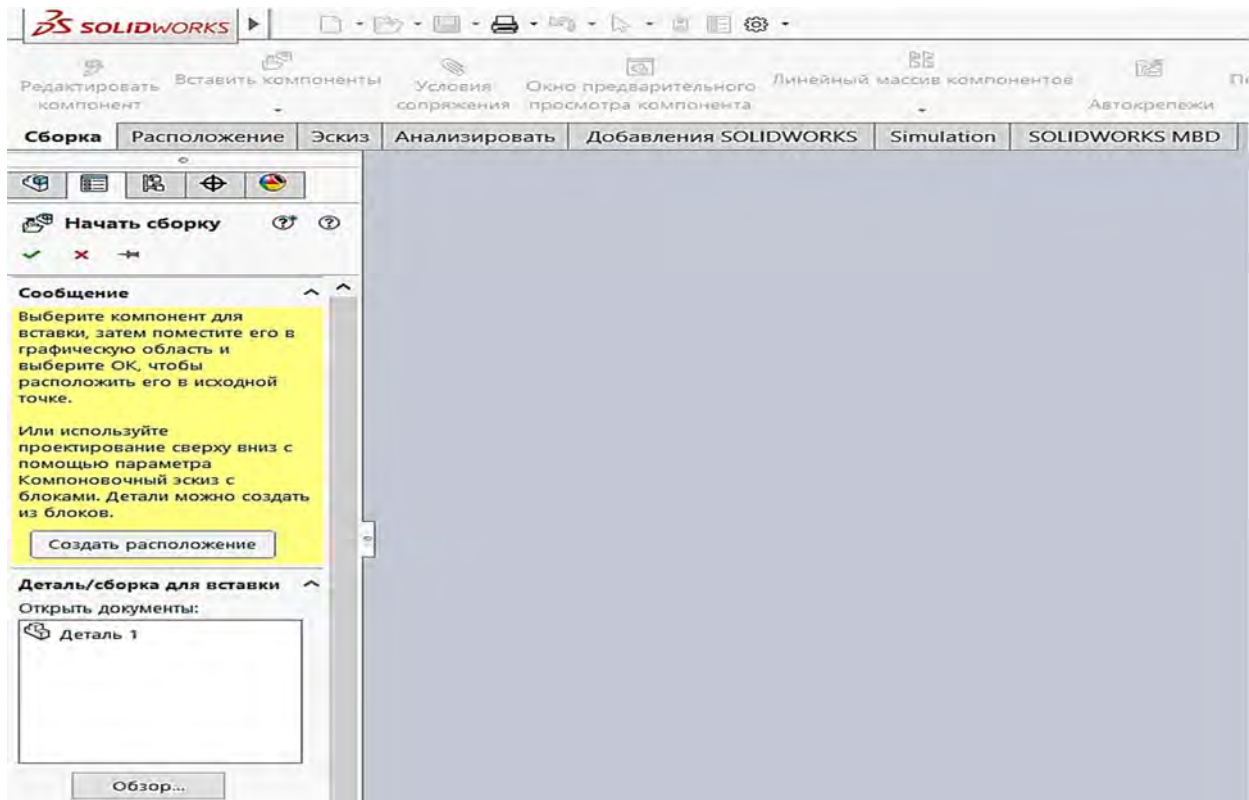
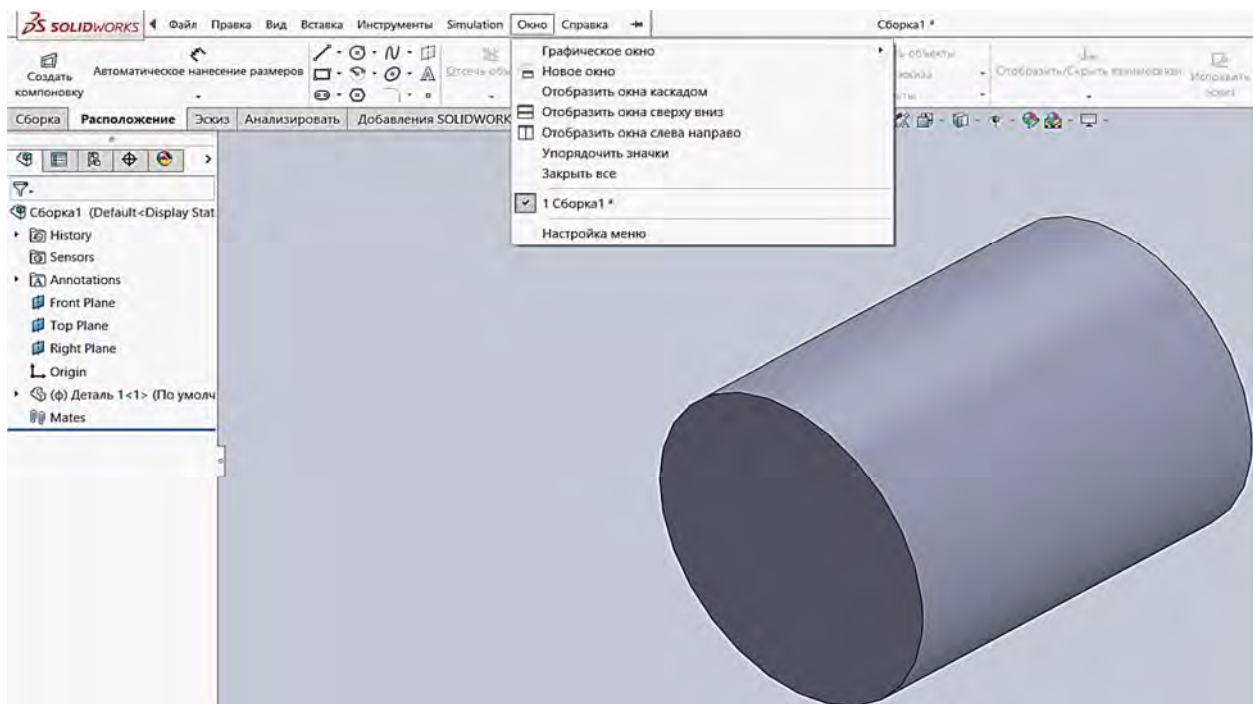


Рис. 2.12. Выбор базовой детали сборки

Рис. 2.13. Выбор команды *Отобразить окна слева направо*

Для того чтобы сформировать само сборочное изделие, необходимо к базовой детали сборки присоединить еще и остальные детали, входящие в сборку. Это осуществляется посредством перетягивания детали в графическую область окна сборки. Для этого необходимо левой клавишей

мыши нажать на теле *Деталь 2* и, не отпуская ее, перетащить в *графическую область* окна сборки (рис. 2.15).

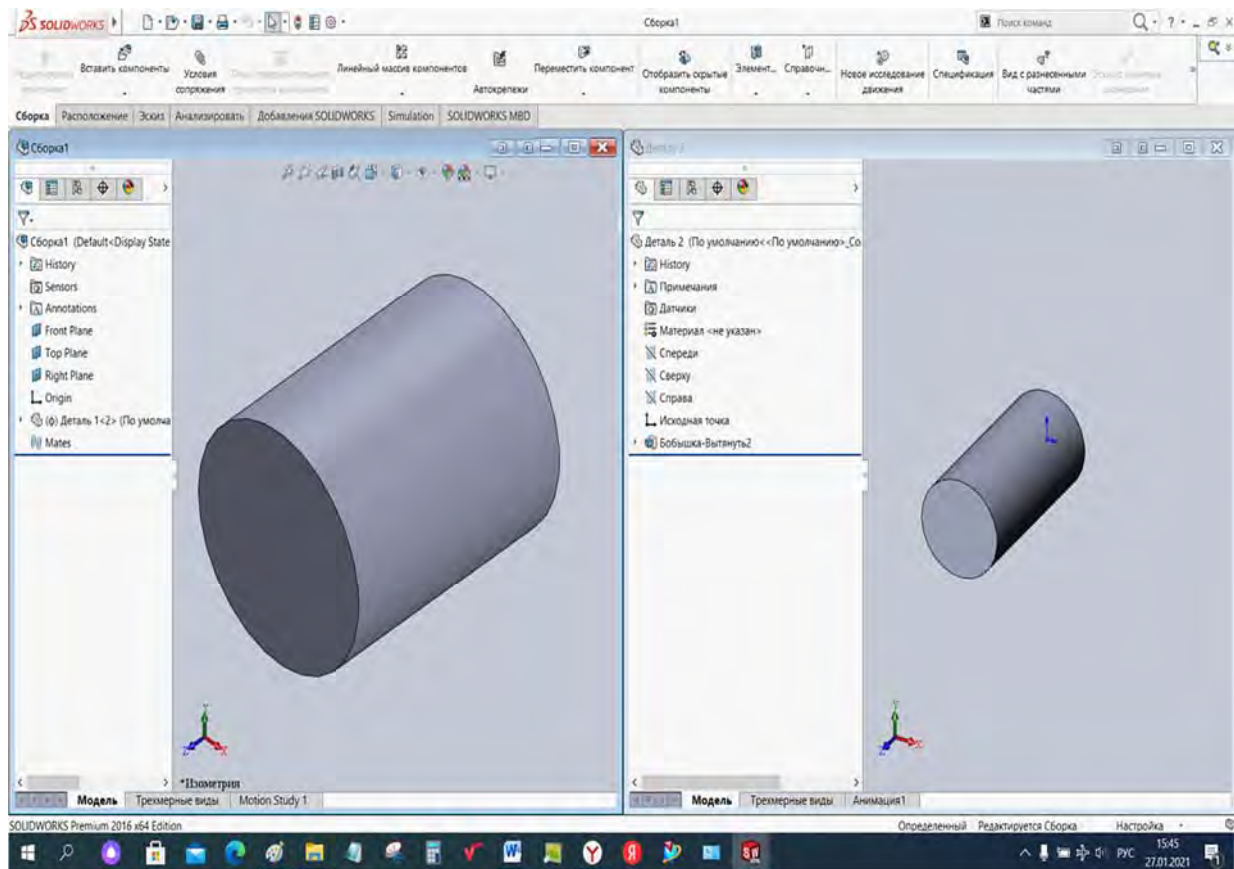


Рис. 2.14. Вид экрана монитора с двумя окнами

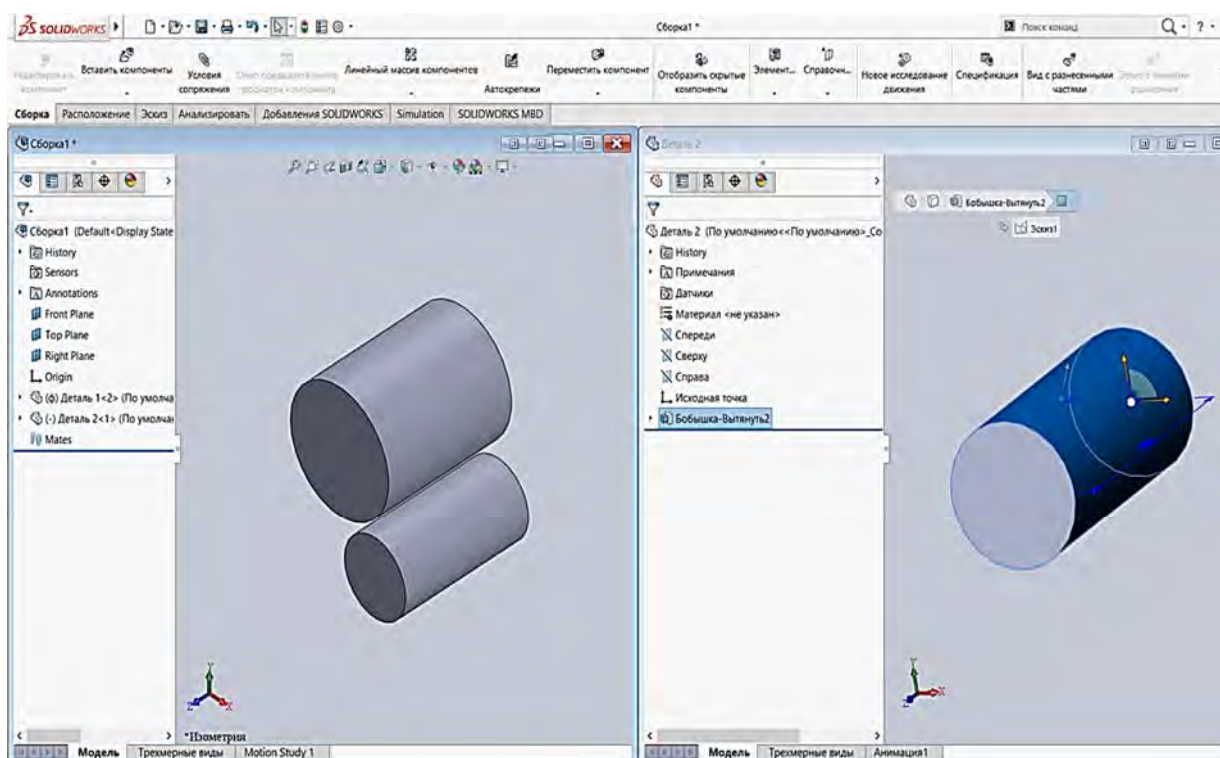


Рис. 2.15. Перетаскивание детали в *графическую область* окна сборки

На следующем этапе создания сборки необходимо указать, каким образом сопрягаются детали в единое целое. Сопряжение деталей позволяет ограничить возможные перемещения деталей в пространстве по отношению друг к другу. Например, совместив оси болта, шайбы, гайки и отверстия в пластине, у болта, гайки и шайбы останется только две степени свободы – перемещение вдоль оси отверстия в пластине и вращение вокруг этой оси. Для выполнения данной процедуры необходимо нажать кнопку *Условия сопряжения* (рис. 2.16), в результате высветится следующее меню (рис. 2.17).

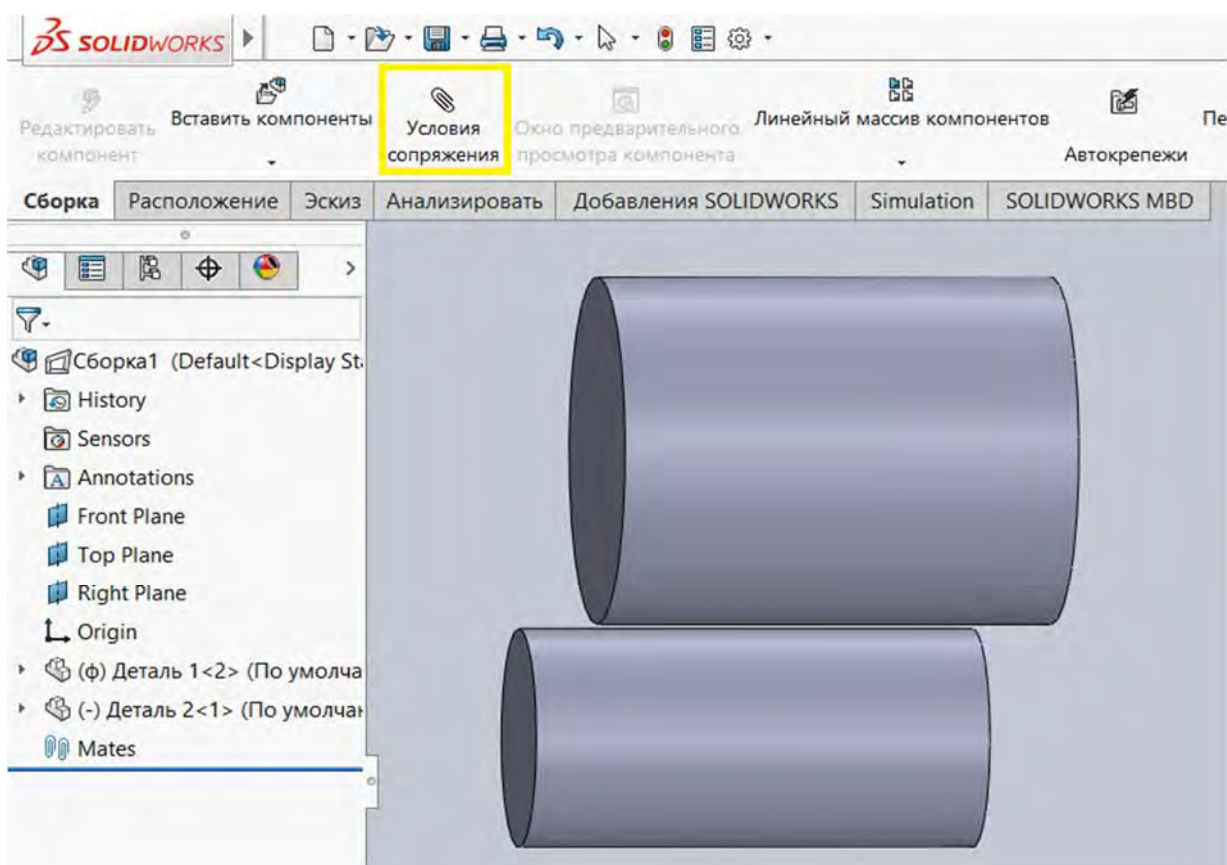


Рис. 2.16. Выбор команды *Условия сопряжения*

Для формирования сборки этих двух деталей воспользуемся командами *Совпадение*, *Концентричность* и *Заблокировать* (это сопряжение запрещает вращение деталей по отношению друг к другу вокруг оси по плоскости соединения), в результате получим следующий фрагмент сборки (рис. 2.18). На этом рисунке показаны поверхности, по которым должна выполняться *Концентричность* между сопрягаемыми деталями.

Следует обязательно обратить внимание на то, чтобы накладываемые требования на сопряжение деталей приводили к заключению *Определенный*, расположенному в *Строке состояния* (см. рис. 2.18), иначе сборка является нерабочей. Это место обозначено на рис. 2.18 желтой стрелкой.

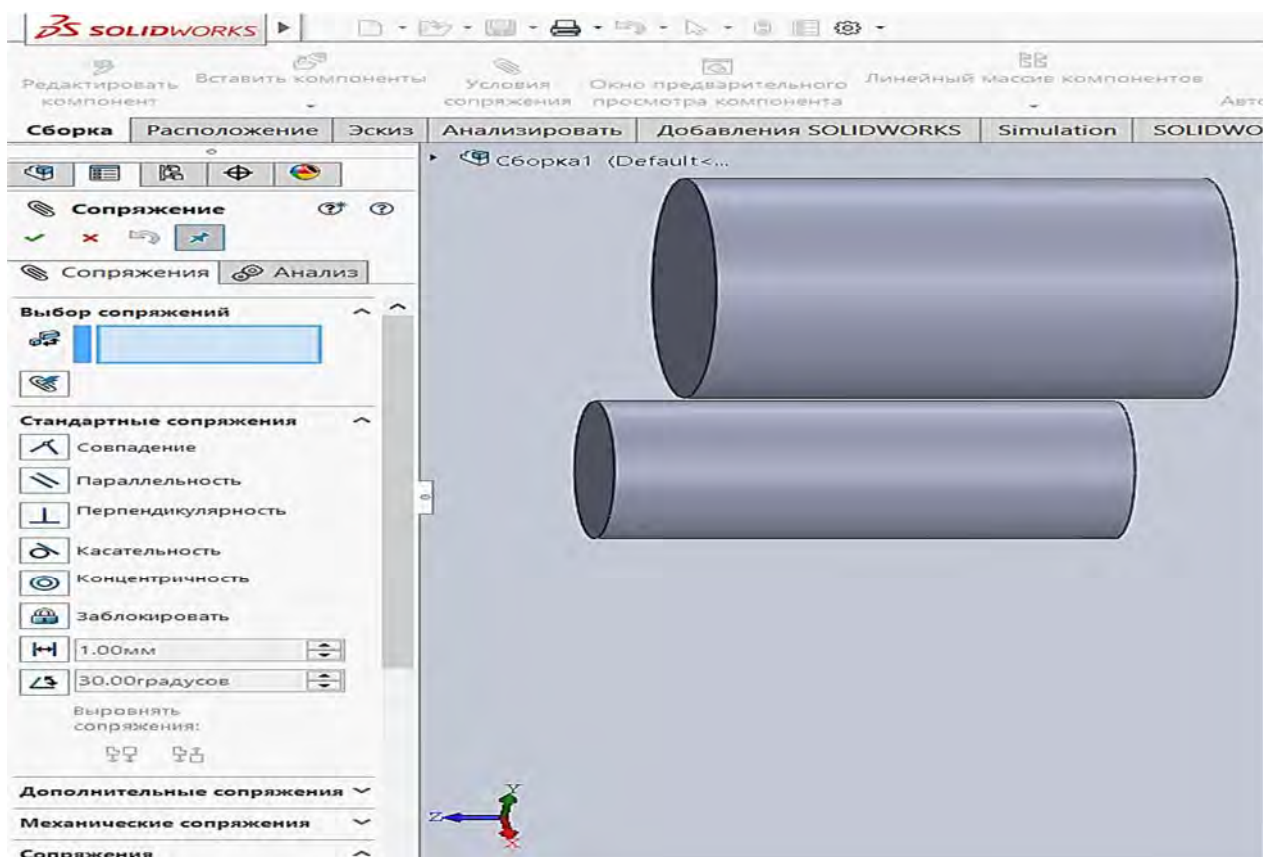


Рис. 2.17. Предлагаемые варианты условий сопряжения

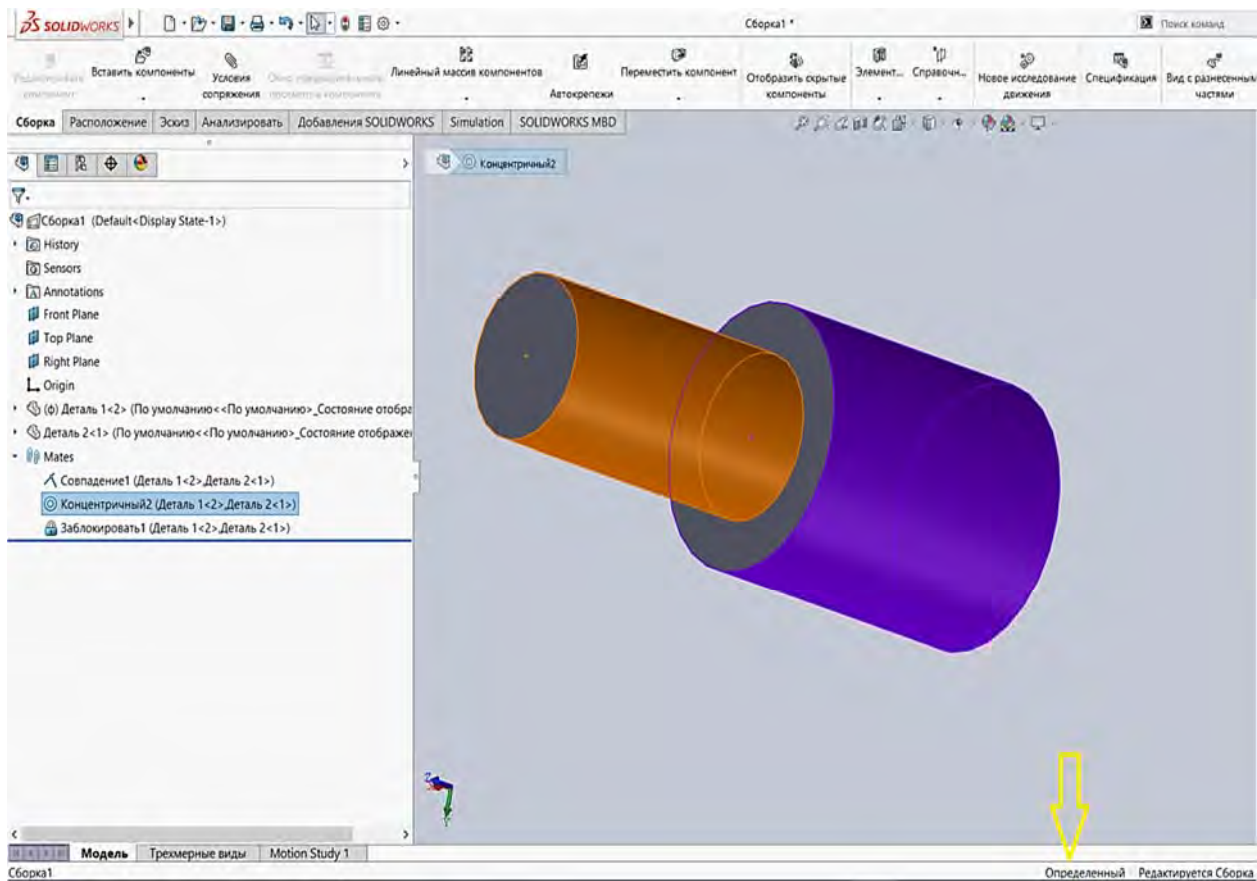


Рис. 2.18. Сопряжение двух деталей в сборку

Поступая аналогичным образом, добавим еще два участка в сборку ступенчатого бруса (рис. 2.19).

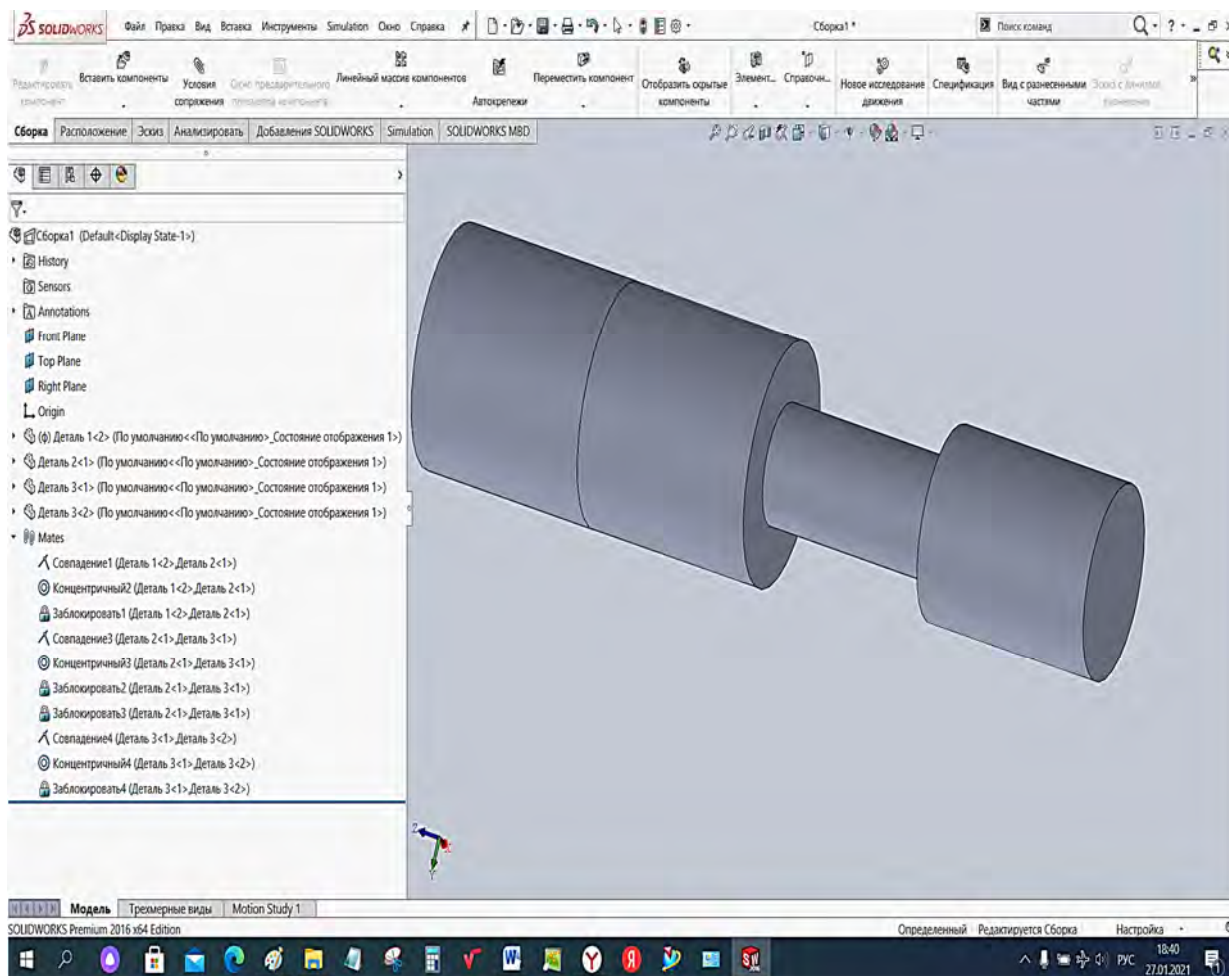


Рис. 2.19. Сборка ступенчатого бруса

### ***Контрольные вопросы***

1. Какая последовательность действий при создании 3D-модели в компьютерной системе SolidWorks?
2. Как проявляется аналогия в использовании принципа «добавление и снятие материала» между методами реальных технологических процессов и системы SolidWorks?
3. Какие компоненты включает в себя главное окно SolidWorks?
4. Поясните понятия «деталь», «сборка», «чертеж» шаблона документа.
5. Какие основные элементы интерфейса SolidWorks вам известны?
6. Раскройте понятие «область построения» (графическая область) интерфейса SolidWorks.
7. Раскройте понятие «строка состояния» интерфейса SolidWorks.

8. Раскройте понятие «*дерево построения*» (*Feature Manager*) интерфейса SolidWorks.
9. Раскройте понятие «*диспетчер команд*» интерфейса SolidWorks.
10. Какие основные графические элементы присутствуют по умолчанию в *Дереве построения*?
11. В чем сущность создания твердотельного элемента методом *Вытянутой бобышки*?
12. Каково назначение панели инструментов *Ориентация видов*?
13. Какие состояния создаваемой твердотельной модели отображаются в *Строке состояния*?
14. Поясните понятие «*сборка*». В чем его отличие от понятия «*деталь*»?
15. Опишите процесс формирования *сборки*.
16. Раскройте понятие «*сопряжения*» деталей, которые позволяют сохранять единство сборки.

### 3. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

#### 3.1. Лабораторная работа № 1. Проведение сопоставительного анализа напряженно-деформированного состояния ступенчатого бруса при центральном растяжении-сжатии

**Цель работы:** определить напряженно-деформированное состояние ступенчатого бруса при центральном растяжении-сжатии, используя методику курса «Механика материалов» и метод конечных элементов; сопоставить полученные результаты.

Для качественного усвоения материала темы «Создание сборок», а также для контроля верности проведения конечно-элементного анализа в среде SolidWorks Simulation предлагается выполнить сопоставительный анализ поведения ступенчатого бруса, используя оба подхода.

Количество частей сборки бруса определяется числом ступеней бруса, а также расположением места действия внешней нагрузки (сечения, в которых прикладываются внешние нагрузки, должны совпадать с границей участка).

При построении сборки следует исходить из того, что все поперечные сечения данного бруса являются *квадратными соосными сечениями*.

#### ***Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы***

Для проведения анализа напряженно-деформированного состояния рассматриваемого ступенчатого бруса необходимо воспроизвести некоторые сведения из курса «Механика материалов» [12–14], касающиеся темы «Центральное растяжение-сжатие прямых стержней». В частности, правило знаков для внутреннего силового фактора – продольной силы  $N$ , описывается схемами, приведенными на рис. 3.1.

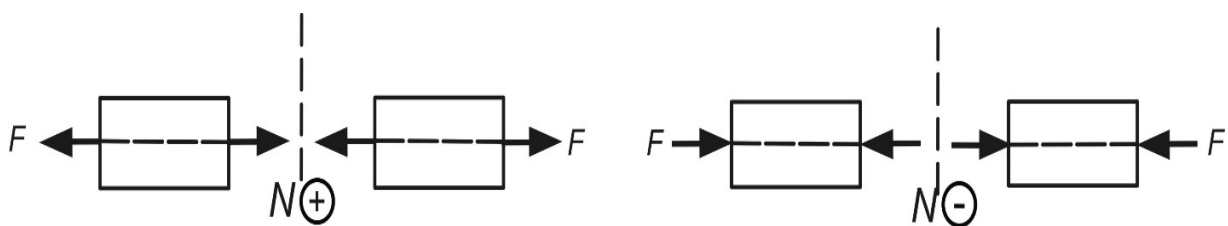


Рис. 3.1. Правило знаков для продольной силы  $N$

Значения нормальных напряжений  $\sigma$  на участках бруса определяются выражением

$$\sigma = \pm \frac{N}{A},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения бруса.

Абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса вычисляются, используя соотношение закона Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

где  $E$ ,  $l$  – модуль Юнга (модуль упругости) и длина участка бруса соответственно.

### *Исходные данные*

Исходные данные к индивидуальному заданию необходимо взять из рис. 3.2 и табл. 3.1.

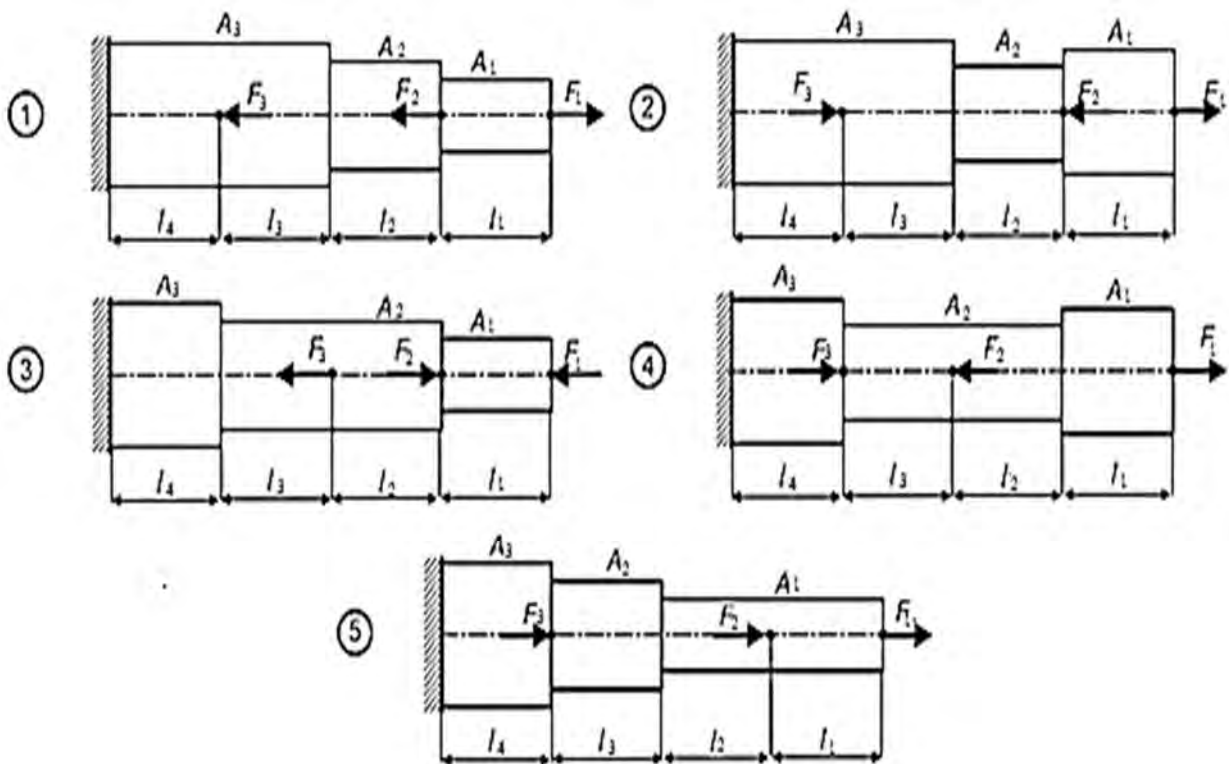


Рис. 3.2. Варианты схем бруса

Табл. 3.1. Исходные данные к выполнению индивидуального задания

| Номер строки | Номер варианта<br>(схема бруса по рис. 3.2) | Площадь поперечного сечения |       |       | Длина участка |       |       |       | Внешняя сила |       |       |
|--------------|---------------------------------------------|-----------------------------|-------|-------|---------------|-------|-------|-------|--------------|-------|-------|
|              |                                             | $A_1$                       | $A_2$ | $A_3$ | $l_1$         | $l_2$ | $l_3$ | $l_4$ | $F_1$        | $F_2$ | $F_3$ |
|              |                                             | см <sup>2</sup>             |       |       | м             |       |       |       | кН           |       |       |
| 1            | 1                                           | 2,2                         | 2,6   | 3,4   | 0,2           | 0,4   | 0,8   | 0,25  | 12           | 20    | 46    |
| 2            | 2                                           | 2,4                         | 1,5   | 3,1   | 0,25          | 0,2   | 0,35  | 0,7   | 11           | 24    | 17    |
| 3            | 3                                           | 1,2                         | 2,8   | 3,2   | 0,4           | 0,35  | 0,65  | 0,15  | 10           | 15    | 35    |
| 4            | 4                                           | 2,5                         | 1,1   | 3,6   | 0,4           | 0,25  | 0,35  | 0,55  | 9            | 23    | 40    |
| 5            | 5                                           | 1,8                         | 2,5   | 3,7   | 0,15          | 0,25  | 0,45  | 0,5   | 8            | 19    | 16    |
| 6            | 1                                           | 1,4                         | 2,1   | 2,5   | 0,25          | 0,45  | 0,2   | 0,15  | 14           | 25    | 38    |
| 7            | 2                                           | 1,6                         | 1,2   | 2,7   | 0,35          | 0,2   | 0,25  | 0,8   | 15           | 26    | 30    |
| 8            | 3                                           | 1,3                         | 2,2   | 2,8   | 0,35          | 0,25  | 0,15  | 0,5   | 16           | 28    | 36    |
| 9            | 4                                           | 2,2                         | 1,4   | 2,9   | 0,15          | 0,7   | 0,35  | 0,35  | 17           | 32    | 24    |
| 0            | 5                                           | 1,5                         | 2,5   | 3,3   | 0,15          | 0,35  | 0,65  | 0,3   | 18           | 12    | 26    |
|              | <b>в</b>                                    |                             |       |       | <b>а</b>      |       |       |       | <b>б</b>     |       |       |

**Примечание.** Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Первые буквы русского алфавита располагают под указанными цифрами, например:

094250

**абв**

Так как столбец, обозначенный буквой «**в**», ассоциируется с цифрой «**0**», то из данных этого столбца берем исходные данные по строке «**0**» – расчетную схему под номером 5 из рис. 3.2 и площади поперечных сечений  $A_1 = 1,5 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 2,5 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 3,3 \text{ см}^2$  соответственно. Из столбца «**а**» выбираем данные строки «**2**»:  $l_1 = 0,25 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0,35 \text{ м}$ ,  $l_4 = 0,7 \text{ м}$ , из столбца «**б**» – данные строки «**5**»:  $F_1 = 8 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 19 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 16 \text{ кН}$ .

### **Пример выполнения лабораторной работы**

Для стального бруса (рис. 3.3) требуется построить эпюры продольных (нормальных) сил, напряжений и перемещений. Для выполнения расчета модуль продольной упругости (модуль Юнга)  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

*Исходные данные.*  $A_1 = 1,6 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 2,5 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 2 \text{ см}^2$ ,  $l_1 = 0,5 \text{ м}$ ,  $l_2 = 1,2 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0,8 \text{ м}$ ,  $l_4 = 0,6 \text{ м}$ ,  $F_1 = 12 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 36 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 40 \text{ кН}$ .

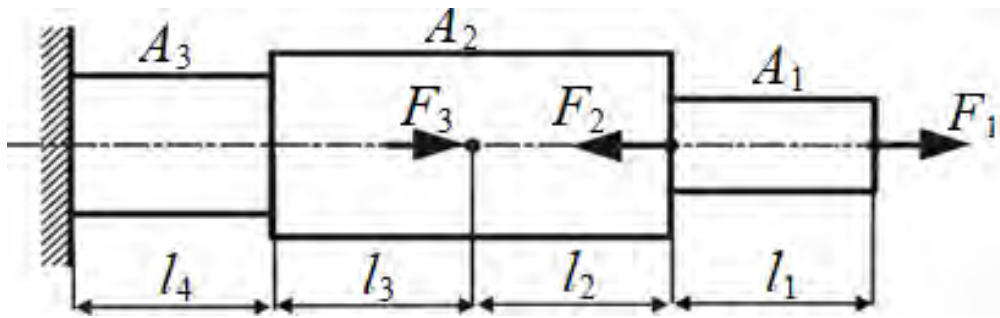


Рис. 3.3. Расчетная схема анализируемого бруса

Решение. Разбиваем брус на участки (рис. 3.4, а).

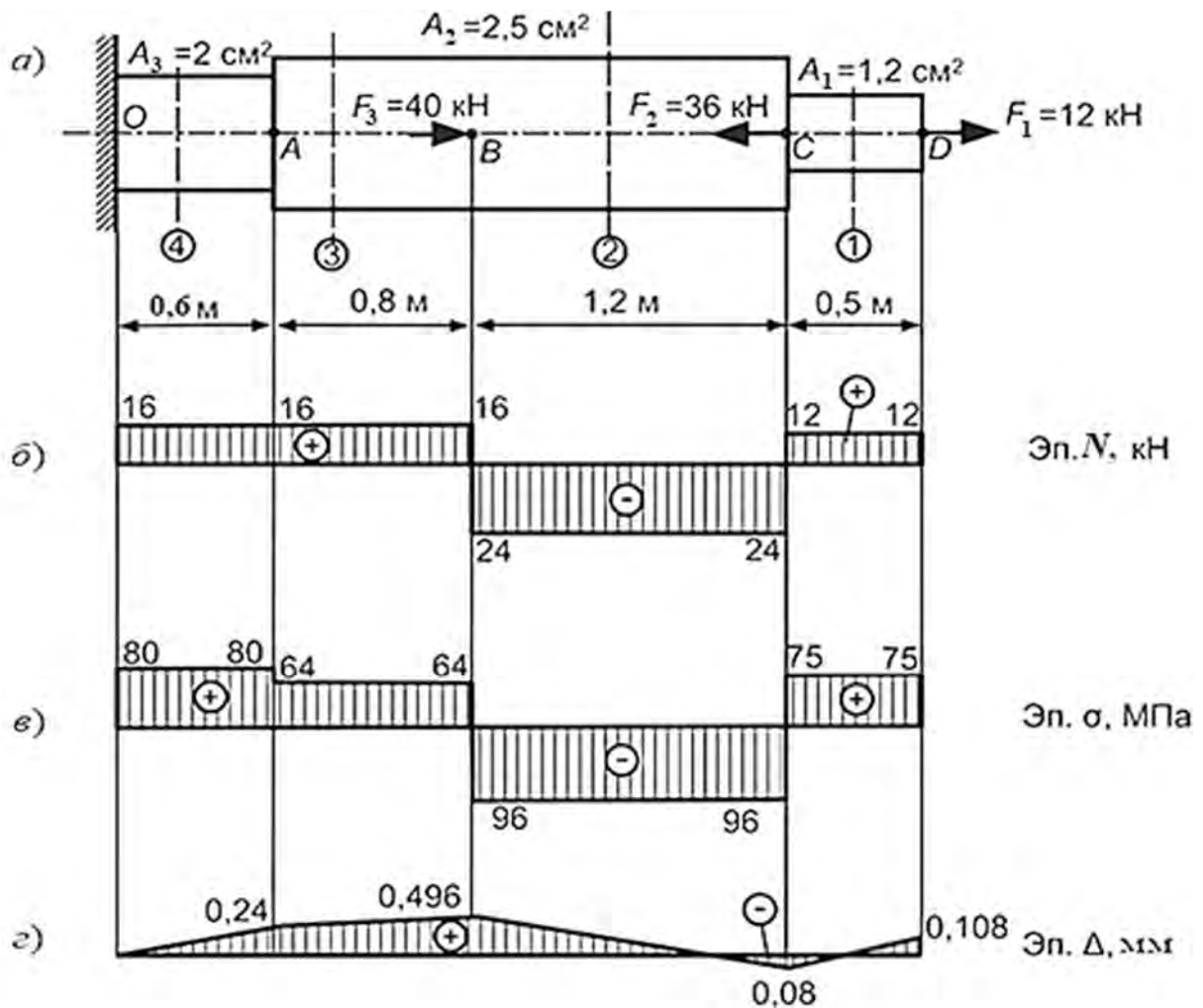


Рис. 3.4. Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений сечений бруса

Определяем продольные (нормальные) силы по участкам бруса, используя метод сечений, в соответствии с правилом знаков:

- участок 1:  $N_1 = 12$  кН;
- участок 2:  $N_2 = 12 - 36 = -24$  кН;
- участок 3:  $N_3 = 12 - 36 + 40 = 16$  кН;

– участок 4:  $N_4 = 12 - 36 + 40 = 16$  кН.

По полученным значениям строим эпюру нормальных сил (рис. 3.4, б).

Определяем значения нормальных напряжений на участках бруса:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{12 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-4}} = 7,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{24 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = -9,6 \cdot 10^7 \text{ Па} = -96 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{16 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 6,4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_3} = -\frac{16 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 80 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 3.4, в).

Вычисляем абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса, используя соотношение закона Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,6 \cdot 10^{-4}} = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,188 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = -\frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,576 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_2} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,256 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_3} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,24 \text{ мм}.$$

Определяем перемещения характерных сечений бруса:

$$\Delta_O = 0;$$

$$\Delta_A = \Delta l_4 = 0,24 \text{ мм};$$

$$\Delta_B = \Delta l_4 + \Delta l_3 = \Delta_A + \Delta l_3 = 0,24 + 0,256 = 0,496 \text{ мм};$$

$$\Delta_C = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = \Delta_B + \Delta l_2 = 0,496 - 0,576 = -0,08 \text{ мм};$$

$$\Delta_D = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta_C + \Delta l_1 = -0,08 + 0,188 = 0,108 \text{ мм}.$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений (рис. 3.4, *з*).

Следующим шагом выполнения лабораторной работы является анализ напряженно-деформированного состояния ступенчатого бруса (см. рис. 3.3) с использованием метода конечных элементов, алгоритм которого реализован в компьютерной системе SolidWorks Simulation. Перед формированием конечно-элементной модели исследуемого объекта необходимо создать твердотельную модель сборки рассматриваемого ступенчатого бруса, как это показано в разд. 2. Поскольку согласно заданию все поперечные сечения ступенчатого бруса являются соосными квадратами, то стороны этих квадратов будут соответственно равны

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{1,6} = 1,265 \text{ см};$$

$$a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{2,5} = 1,581 \text{ см};$$

$$a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{2} = 1,414 \text{ см}.$$

В результате выполнения этого этапа проектирования твердотельная модель сборки ступенчатого бруса будет выглядеть, как показано на рис. 3.5.

Как видно, данная твердотельная модель представляет собой сборку, включающую в себя четыре детали, габаритные размеры которых назначались в соответствии с расчетной схемой, приведенной на рис. 3.3.

Несмотря на то что центральный участок ступенчатого бруса (см. рис. 3.5) имеет постоянное сечение, его разбили на два участка, поскольку в месте сочленения этих участков необходимо приложить сосредоточенную нагрузку (в SolidWorks Simulation нагрузка прикладывается в вершинах, кромках, гранях твердотельных моделей).

На следующем этапе проектирования переходим непосредственно к конечно-элементному моделированию рассматриваемого объекта и анализу напряженно-деформированного состояния, возникающего в нем. В связи с этим необходимо на *Панели диспетчера команд* (рис. 3.6) посредством выбора иконки *Simulation* и нажатия левой клавишей мыши по икон-

ке *Консультант исследования* перейти в оболочку SolidWorks Simulation. При этом в левой области окна появятся иконки, обозначающие тип проводимого исследования (рис. 3.7).

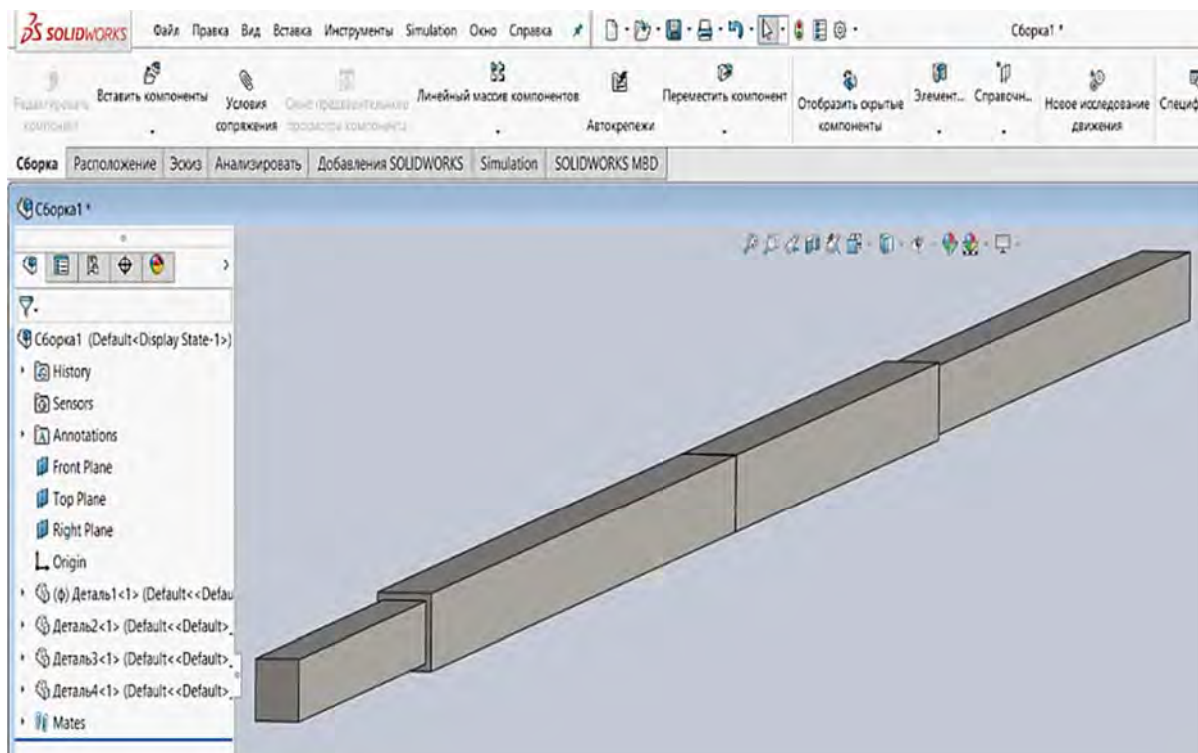


Рис. 3.5. Твёрдотельная модель сборки ступенчатого бруса квадратного поперечного сечения

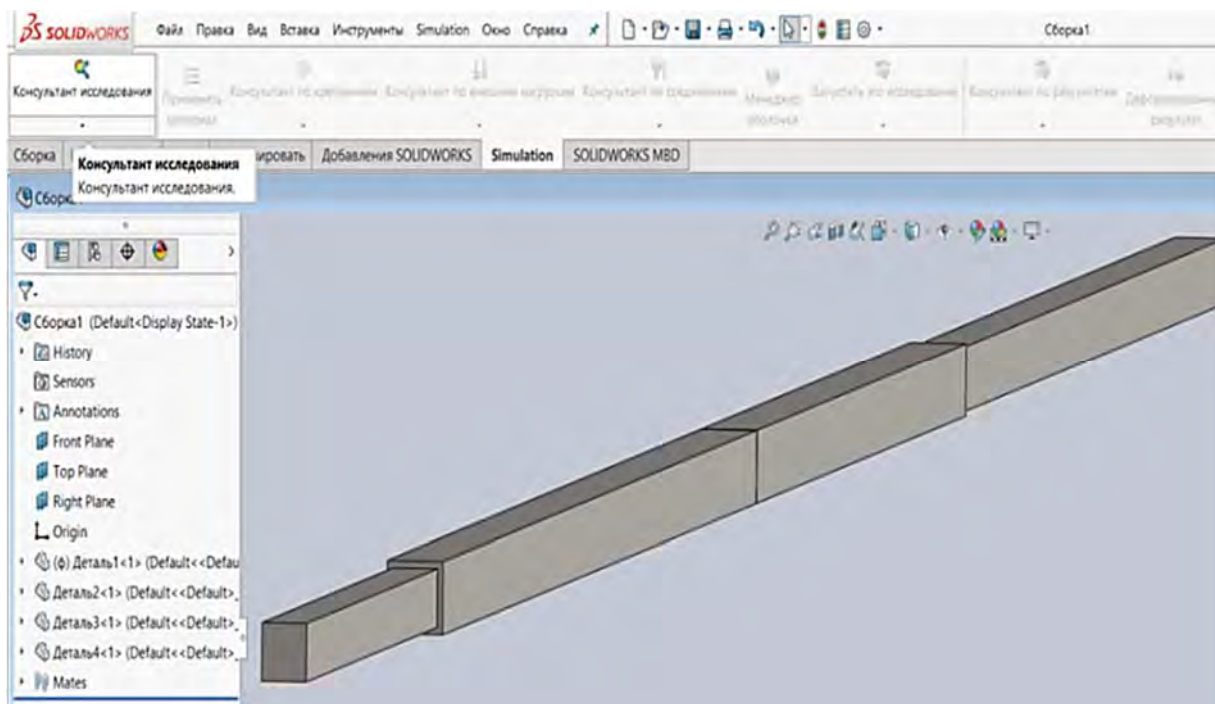


Рис. 3.6. Последовательность перехода в оболочку конечно-элементного анализа SolidWorks Simulation

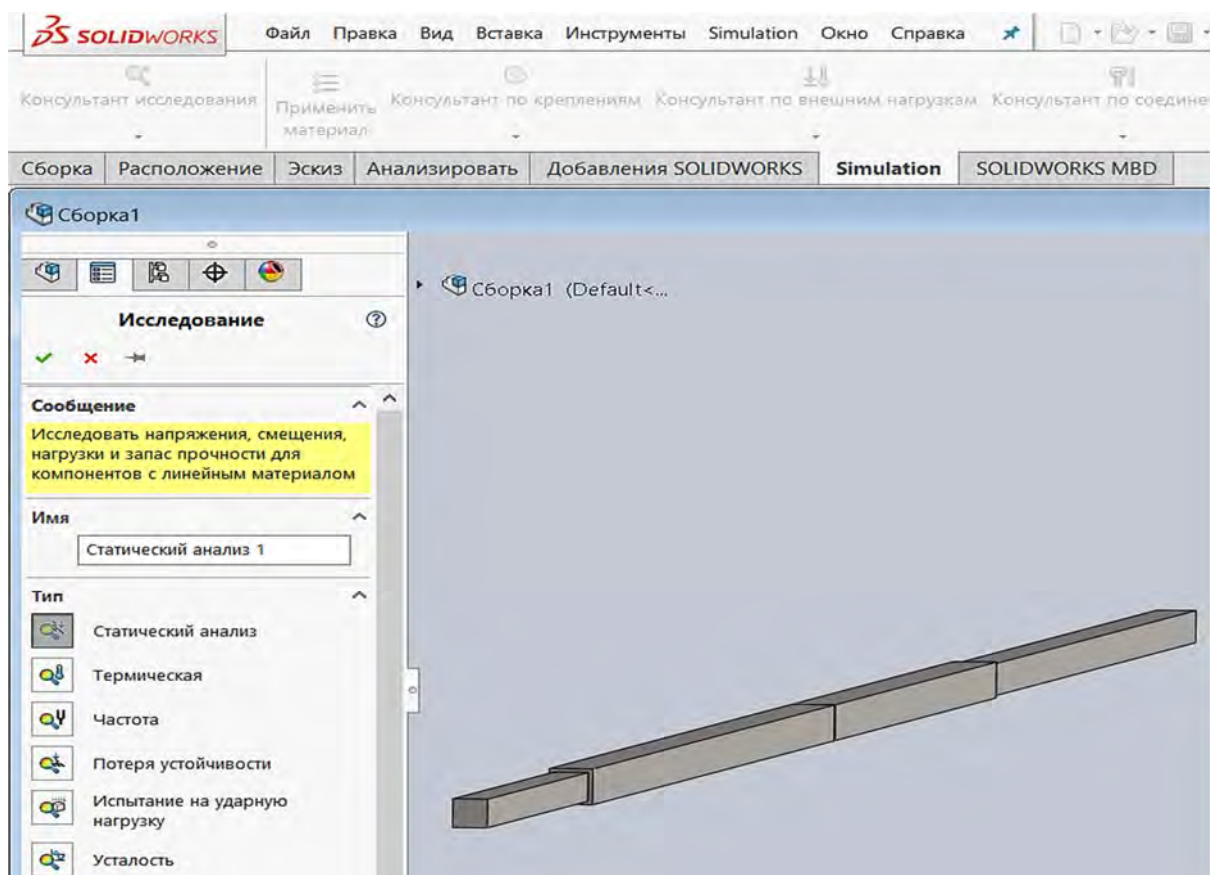


Рис. 3.7. Выбор типа проводимых исследований

Как видно из рис. 3.7, программный комплекс SolidWorks Simulation позволяет проводить следующие типы анализов изделий:

- статический;
- термический;
- частотный;
- на потерю устойчивости;
- испытание на ударную нагрузку;
- на усталостное разрушение и т. д.

Рассматриваемый пример относится к статическому анализу проводимых исследований, поскольку предполагается, что нагрузка не изменяет свою величину во времени и силами инерции можно пренебречь.

Кроме того, в основу конечно-элементного анализа данного примера положено предположение, что связь между напряжениями и деформациями носит линейный характер, т. е. считается справедливым закон Гука. Эта информация в последующем должна быть заложена в создаваемую конечно-элементную модель.

После выбора иконки *Статический анализ* и последующей команды *Выполнить* область главного окна SolidWorks Simulation преобразуется к виду, представленному на рис. 3.8.

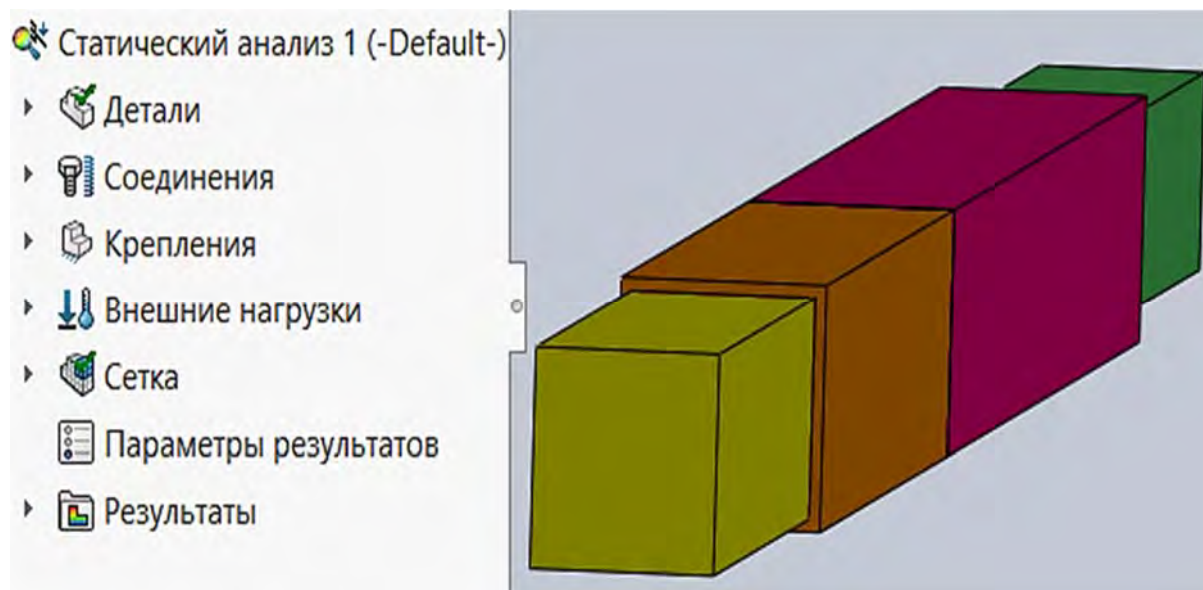


Рис. 3.8. Область главного окна SolidWorks Simulation после выбора иконки *Статический анализ*

Начиная с этого момента, можно приступать к формированию конечно-элементной модели исследуемого объекта – центральному растяжению-сжатию ступенчатого бруса.

Далее, в соответствии с исходными данными, указываем на твердотельной модели место, направление, характер и величину прикладываемой нагрузки. Для этого в *Дереве конструирования (Feature Manager)* выбираем иконку *Внешние нагрузки*, щелкнув по ней правой клавишей мыши. В результате меню предлагаемых операций будет выглядеть, как на рис. 3.9. В раскрывшемся меню выбираем иконку *Сила*, затем грань ступенчатого бруса, на которой данная сила действует.

Кроме мероприятий по выбору грани, на которой необходимо задать действующую нагрузку, необходимо указать направление действия нагрузки (см. рис. 3.9). В рассматриваемом примере направление нагрузки задавалось кромкой (показана на рисунке розовым цветом), параллельно которой нагрузка действует. Кроме указанной информации, следует задать величину нагрузки и систему единиц, в которой она определяется (см. рис. 3.9). В данном примере используется Международная система единиц (СИ) и нагрузка определяется в ньютонах.

Если предложенное программой направление действия нагрузки противоположно изображенному, необходимо воспользоваться иконкой *Реверс направления* (см. рис. 3.9).

Выбор грани, к которой прикладывается нагрузка, осуществляется посредством установки мыши в зоне расположения данной грани и щелчка левой клавишей мыши по ней.

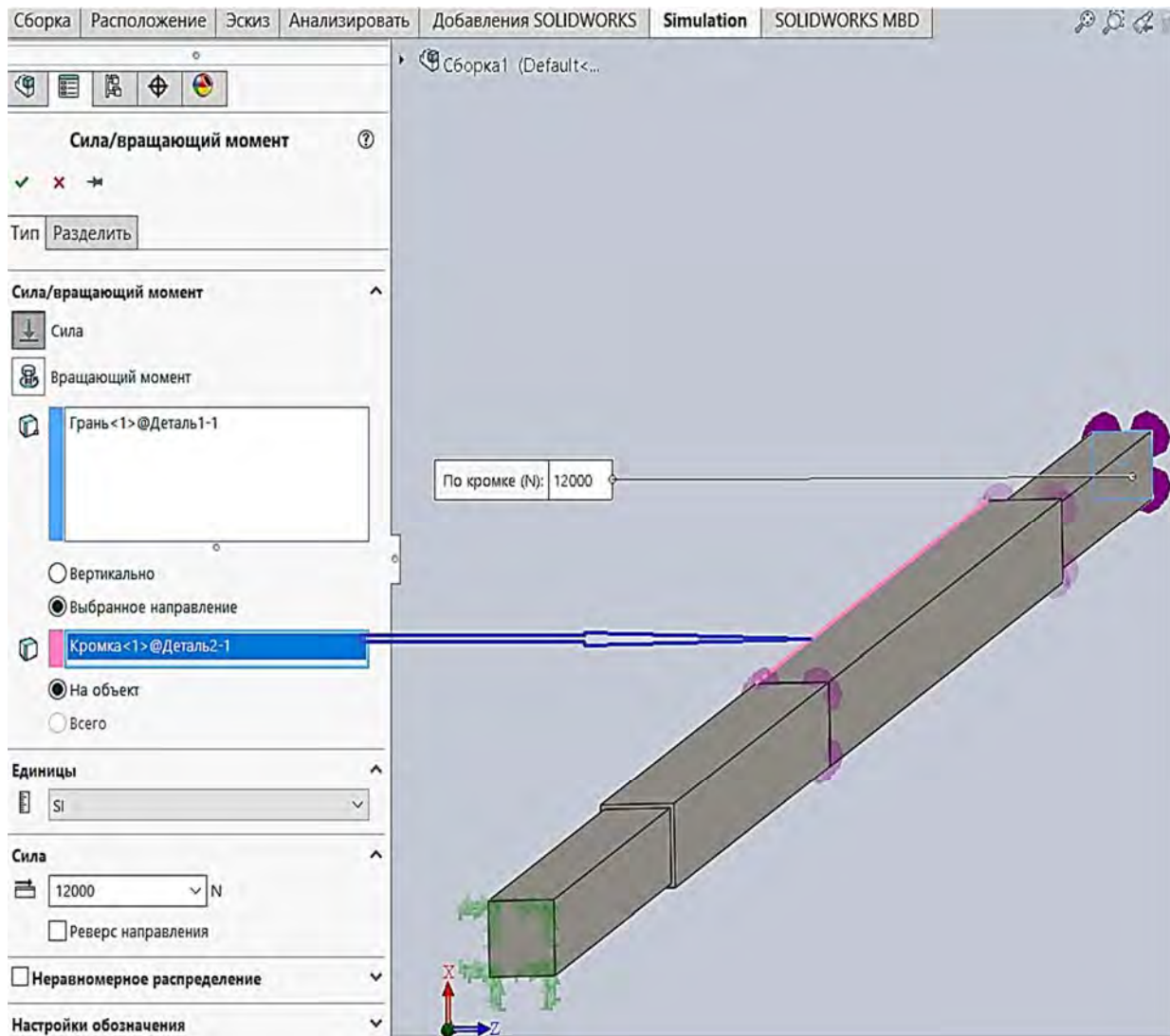


Рис. 3.9. Меню задания внешних нагрузок

Если при этом высветилась другая грань, то в этом случае на высветившейся грани необходимо щелкнуть правой клавишей мыши, в результате появится следующее дополнительное меню (рис. 3.10).

В данном меню (см. рис. 3.10) левой клавишей мыши активизируем операцию *Выбрать другой*, в результате появится еще одно меню (рис. 3.11), в котором будут представлены все грани, находящиеся в области расположения курсора мыши. Указывая курсором на предлагаемые в меню грани, можно легко выбрать нужную грань, поскольку она будет высвечиваться на твердотельной модели. Щелкнув левой клавишей мыши в меню на соответствующем обозначении грани, активизируем требуемую грань (см. рис. 3.11).

Поступая аналогичным образом, введем информацию о действующих нагрузках еще в двух сечениях рассматриваемого ступенчатого бруса. В результате меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* и графическое изображение модели примут вид, представленный на рис. 3.12.



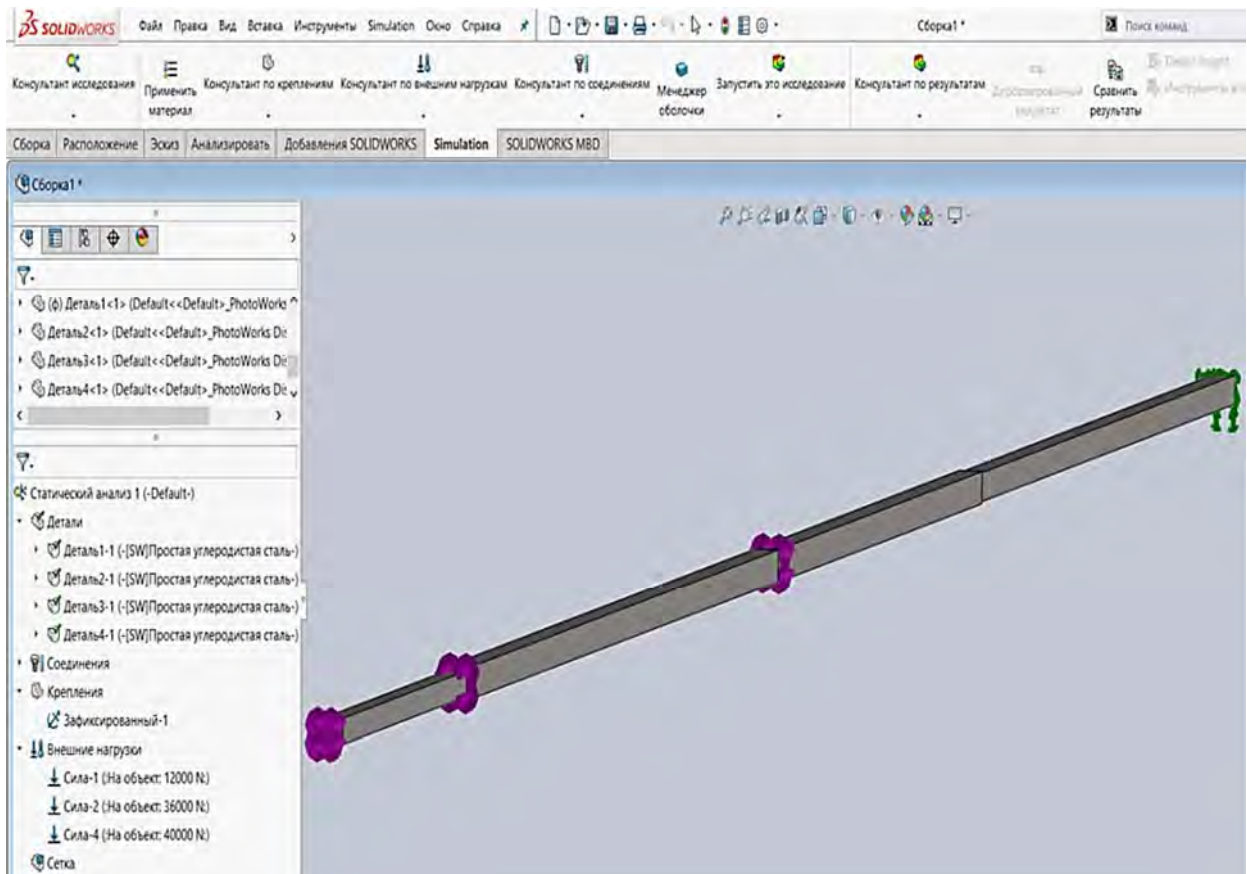


Рис. 3.12. Меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* и графическое изображение модели после введения исходных данных о нагрузке

Следующим шагом построения конечно-элементной модели исследуемого объекта является задание механических свойств материала, из которого изготовлено данное изделие. При нажатии левой клавишей мыши в меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* иконки *Детали* появится дополнительное выпадающее меню, в котором будут показаны все входящие в сборку детали (см. рис. 3.12). В рассматриваемом примере сборка включает в себя четыре детали. В скобках для каждой детали указан материал, из которого она изготовлена (SW / Простая углеродистая сталь). Обозначение материала (SW / Простая углеродистая сталь) говорит о том, что механические свойства взяты из базы данных SolidWorks Simulation и материалом является *простая углеродистая сталь*. В данном примере все четыре детали имеют одинаковые механические свойства. Здесь следует отметить, что механические свойства деталей, входящих в сборку, могут различаться и редактироваться в процессе анализа напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта. Поскольку в примере предполагается, что механические свойства всех деталей одинаковы, то редактирование их свойств может осуществляться одновременно, используя следующую последовательность действий. В меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* выбирается иконка *Детали* и посредст-

вом нажатия по ней правой клавишей мыши появляется дополнительное выпадающее меню (рис. 3.13).

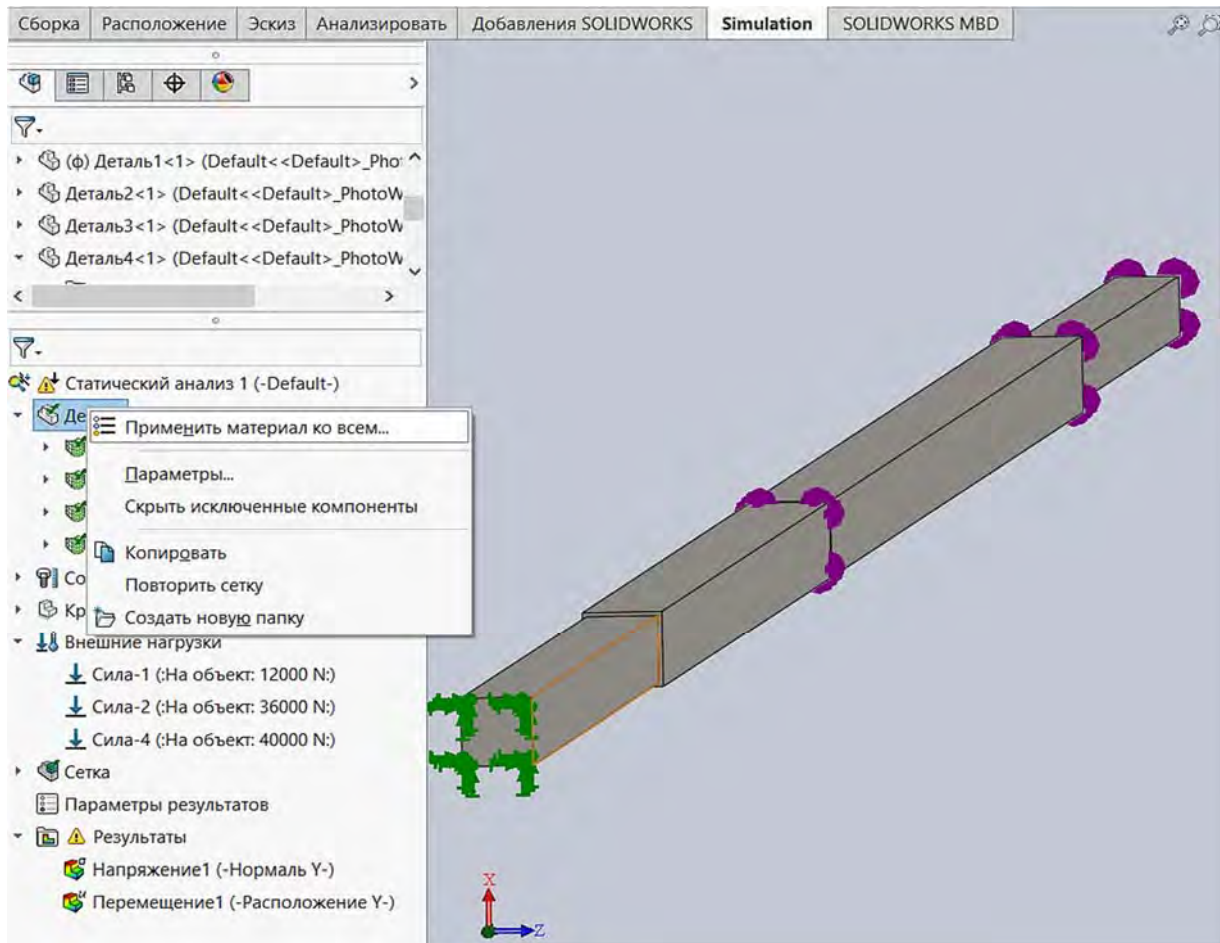


Рис. 3.13. Редактирование механических свойств материала сборки и деталей

В результате нажатия левой клавишей мыши по иконке *Применить материал ко всем ...* появится новая таблица (рис. 3.14).

В данной таблице сообщается о том, что приведенная в ней информация является *Настройкой пользователя*, материал – *Линейный упругий изотропный*, *Единицы измерения* в СИ – Н/м<sup>2</sup> (Па) и т. д. по умолчанию. Кроме того, показано, что обязательными механическими характеристиками для проведения линейного статического анализа являются *модуль упругости*, *коэффициент Пуассона*, *массовая плотность* и *предел текучести*.

Вместе с тем, используя эту таблицу и базу данных SolidWorks Simulation, можно изменить механические свойства материала сборки следующим образом. В левом верхнем углу данной таблицы расположена иконка *Solidworks materials*, при нажатии по ней левой клавишей мыши двойным щелчком входим в базу данных этого программного продукта и выбираем нужный материал (рис. 3.15).

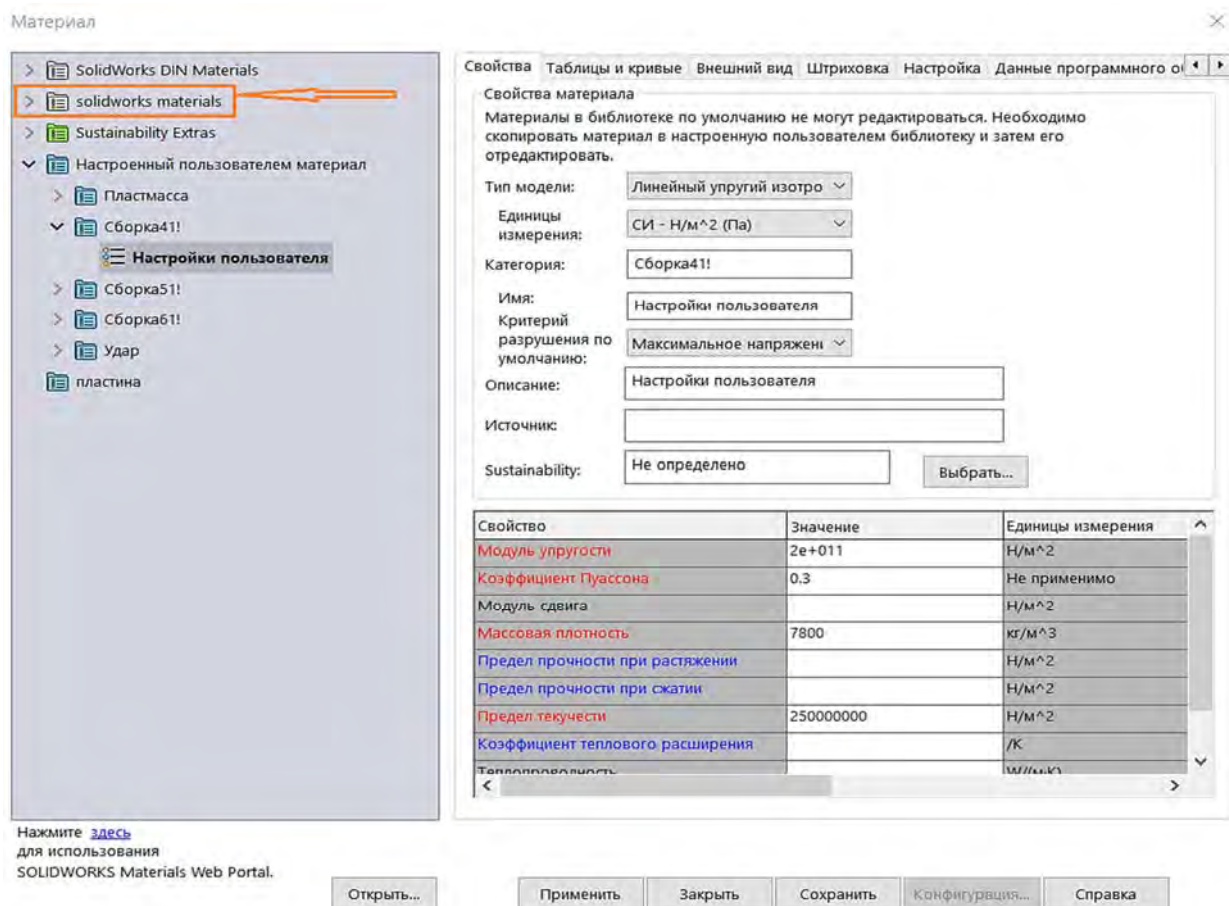


Рис. 3.14. Таблица механических свойств материала

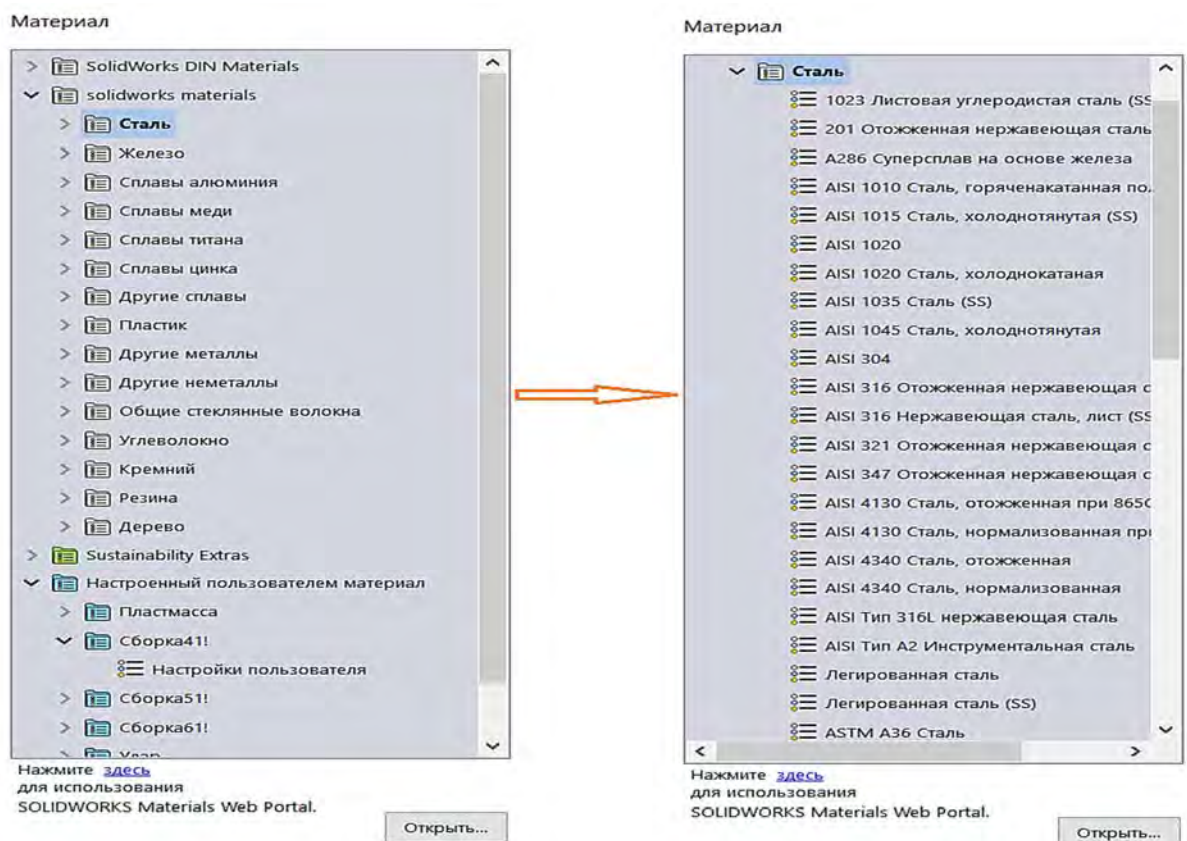


Рис. 3.15. Выбор материала из базы данных SolidWorks Simulation

На следующем этапе создания конечно-элементной модели ступенчатого бруса зададим условия закрепления. Как следует из расчетной схемы (см. рис. 3.3), торец бруса жестко закреплен. В результате, щелкнув правой клавишей мыши в *Дереве конструирования (Feature Manager)* по иконке *Крепление* и выбрав в раскрывшемся меню *Зафиксированная геометрия*, а затем грань, по которой осуществляется фиксация бруса, получим закрепленный торец (рис. 3.16).

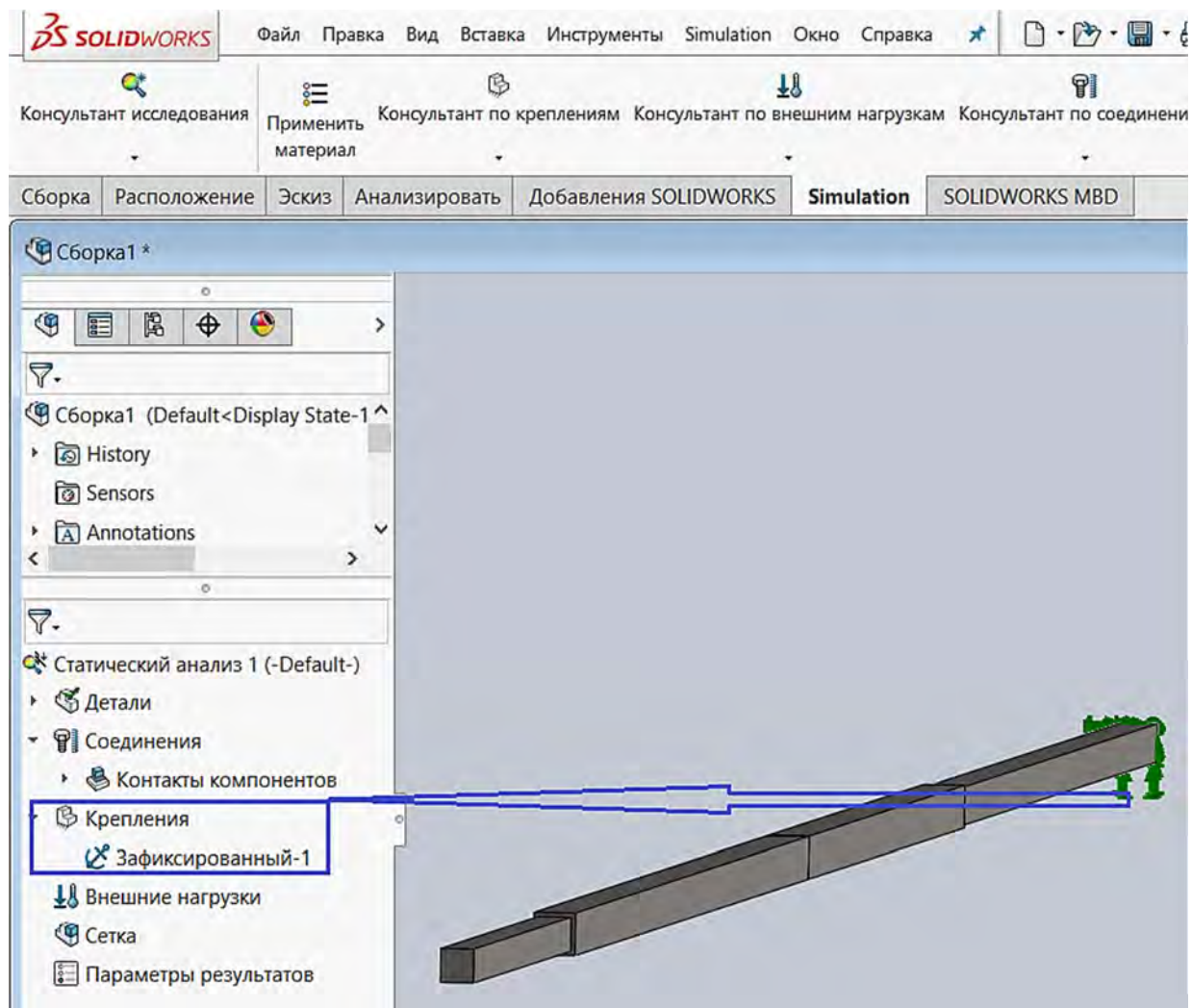


Рис. 3.16. Задание условий закрепления ступенчатого бруса

В сборках отдельные детали контактируют друг с другом по площадям поверхностей контакта. Для адекватного задания условий таких контактов используется опция в *Дереве конструирования (Feature Manager)* – *Контакты компонентов* (см. рис. 3.16). В режиме *по умолчанию* данная опция автоматически задает условия контакта соприкасающихся деталей как связанные друг с другом, без взаимного проникновения. Более подробно работу опции в *Дереве конструирования (Feature Manager)* рассмотрим далее.

Одной из наиболее ответственных стадий построения конечно-элементной модели является создание сетки разбиения изделия на конечные элементы. Итак, для создания сетки конечно-элементной модели необходимо в меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* выбрать опцию *Сетка* и нажать по ней правой клавишей мыши, при этом появится дополнительное выпадающее меню (рис. 3.17).

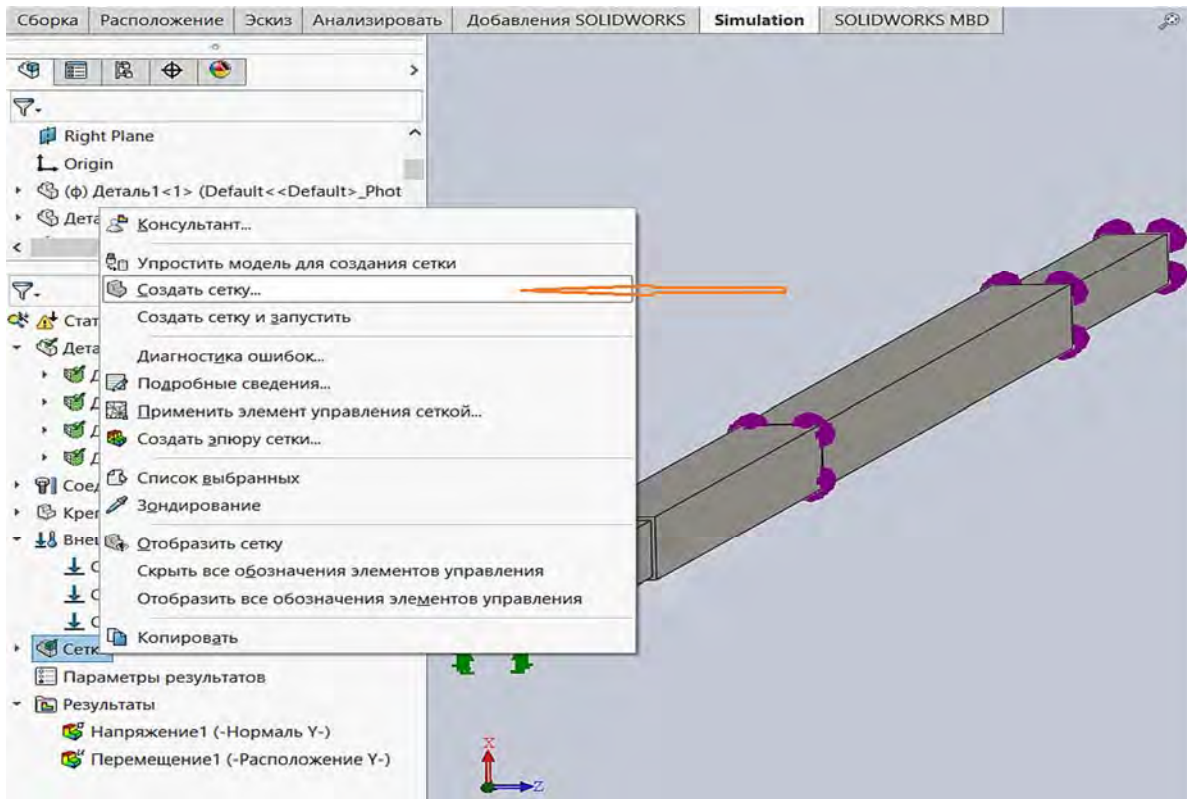


Рис. 3.17. Выпадающее меню для создания сетки конечно-элементной модели

В этом выпадающем меню посредством нажатия левой клавишей мыши активизировать опцию *Создать сетку ...*, при этом появится еще одно меню (рис. 3.18).

В данном меню присутствуют различные опции для построения сетки конечно-элементной модели, в том числе и опция *Плотность сетки*. Эта опция изначально устанавливает параметры сетки разбиения исходя из геометрических характеристик твердотельной модели исследуемого объекта. Поскольку рассматриваемый пример предназначен для ознакомления с процедурой конечно-элементного анализа в учебных целях, то, не вдаваясь в подробности, можно остановиться на создании сетки *по умолчанию*. Для этого необходимо левой клавишей мыши нажать на зеленую «галочку», расположенную в верхней части данного меню (см. рис. 3.18).

Важность этой стадии состоит в том, что от качества сетки разбиения в большой степени зависит точность проводимых расчетов.

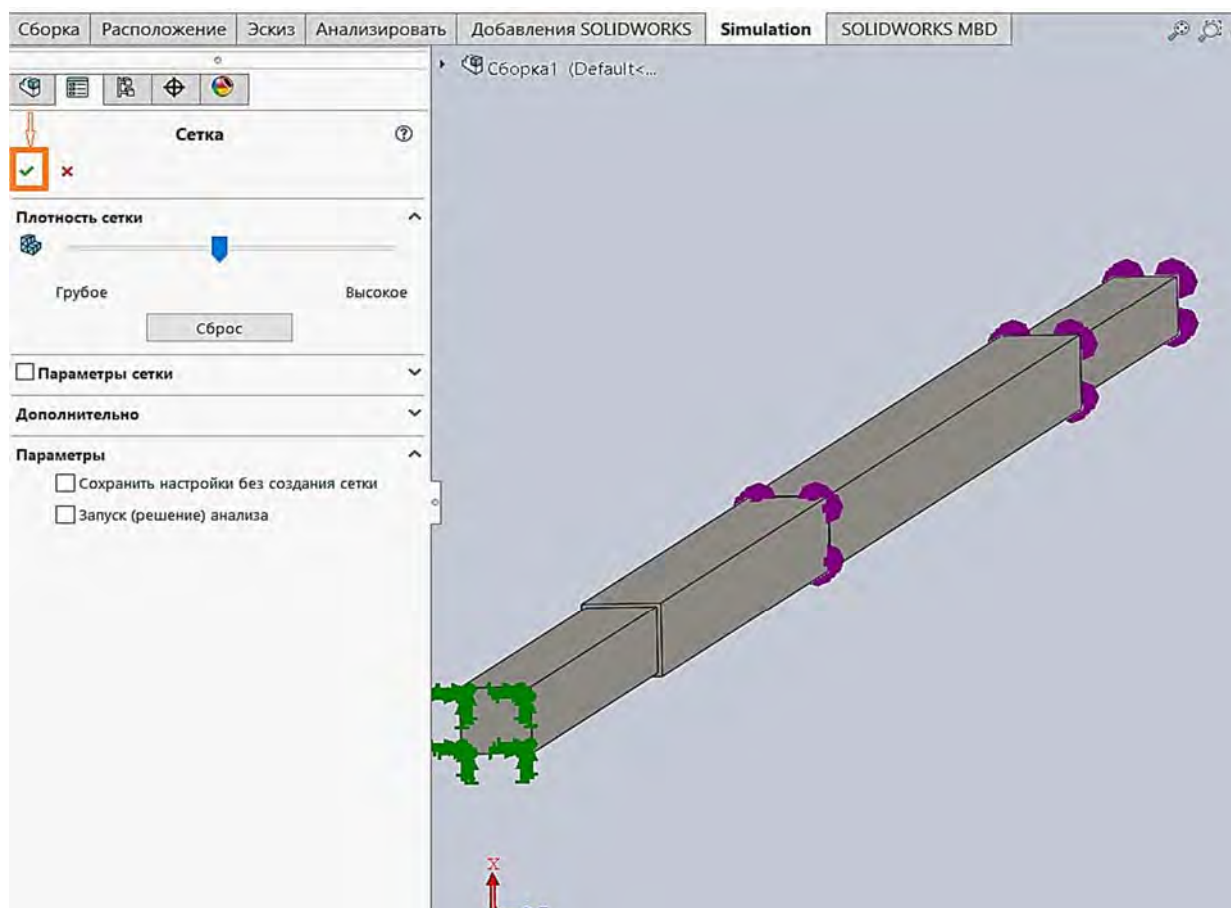


Рис. 3.18. Создание сетки конечно-элементной модели *по умолчанию*

Так, в областях изделия, где могут наблюдаться большие градиенты напряжений, использование грубой сетки разбиения может привести к значительному снижению пиковых значений или даже отсутствию их. С другой стороны, чрезмерное измельчение сетки разбиения приведет к существенному возрастанию узловых точек в конечно-элементной модели, а следовательно, увеличению используемых степеней свободы и порядка разрешающей системы уравнений и, в конечном счете, продолжительности времени анализа. Эта стадия создания конечно-элементной модели предполагает наличие определенного опыта в проведении подобного рода расчетов. Вместе с тем для некоторых простейших задач (подобных рассматриваемому примеру) вполне достаточно воспользоваться возможностями данного программного продукта при создании сетки *по умолчанию*.

Для того чтобы визуализировать саму сетку разбиения модели на конечные элементы, необходимо опять в меню *Дерево конструирования* (*Feature Manager*) выбрать иконку *Сетка* и щелкнуть правой клавишей мыши, при этом появится дополнительное выпадающее меню (см. рис. 3.17). В этом меню выбрать опцию *Отобразить сетку* и щелкнуть левой клавишей мыши. В результате проделанных операций будет построена конечно-элементная модель ступенчатого бруса с заданными в ней

условиями закрепления, нагрузками и механическими характеристиками всех деталей, входящих в сборку (рис. 3.19).

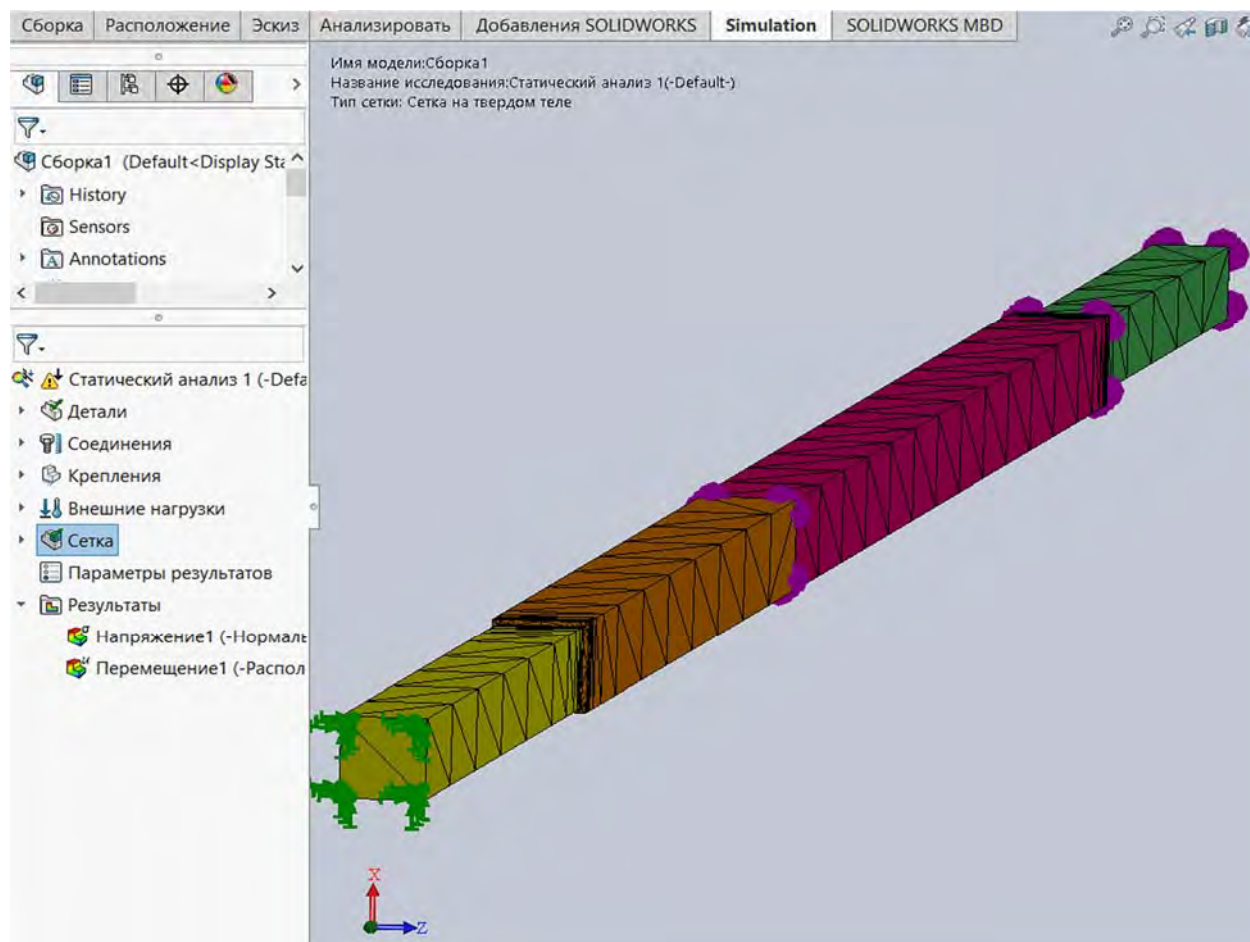


Рис. 3.19. Конечно-элементная модель ступенчатого бруса с нагрузками и условиями закрепления

Начиная с этой стадии, можно непосредственно переходить к анализу напряженно-деформированного состояния ступенчатого бруса при действии продольной, приложенной центрально, нагрузки, как это было задано в исходных данных (см. рис. 3.3).

На рис. 3.19 показана конечно-элементная модель ступенчатого бруса в целом, где каждый из участков ступенчатого бруса раскрашен в свой цвет. Это сделано для наглядности и осуществляется, впрочем, достаточно просто.

Для проведения анализа напряженно-деформированного состояния исследуемого изделия необходимо запустить программу на расчет. Это осуществляется следующим образом: в меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* следует выбрать иконку *Статический анализ* и щелкнуть правой клавишей мыши (рис. 3.20), при этом появится дополнительное выпадающее меню (рис. 3.21).

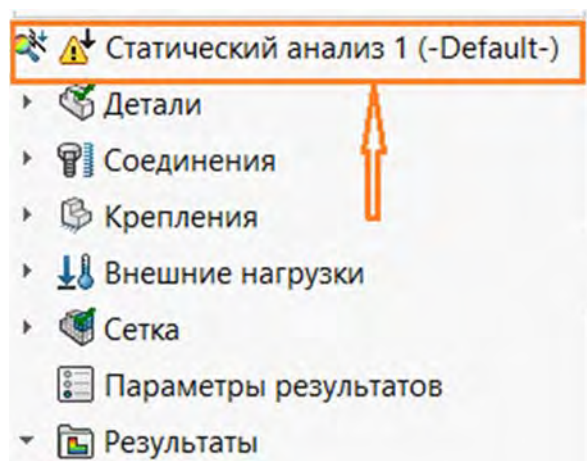


Рис. 3.20. Последовательность действий для проведения *Статического анализа*

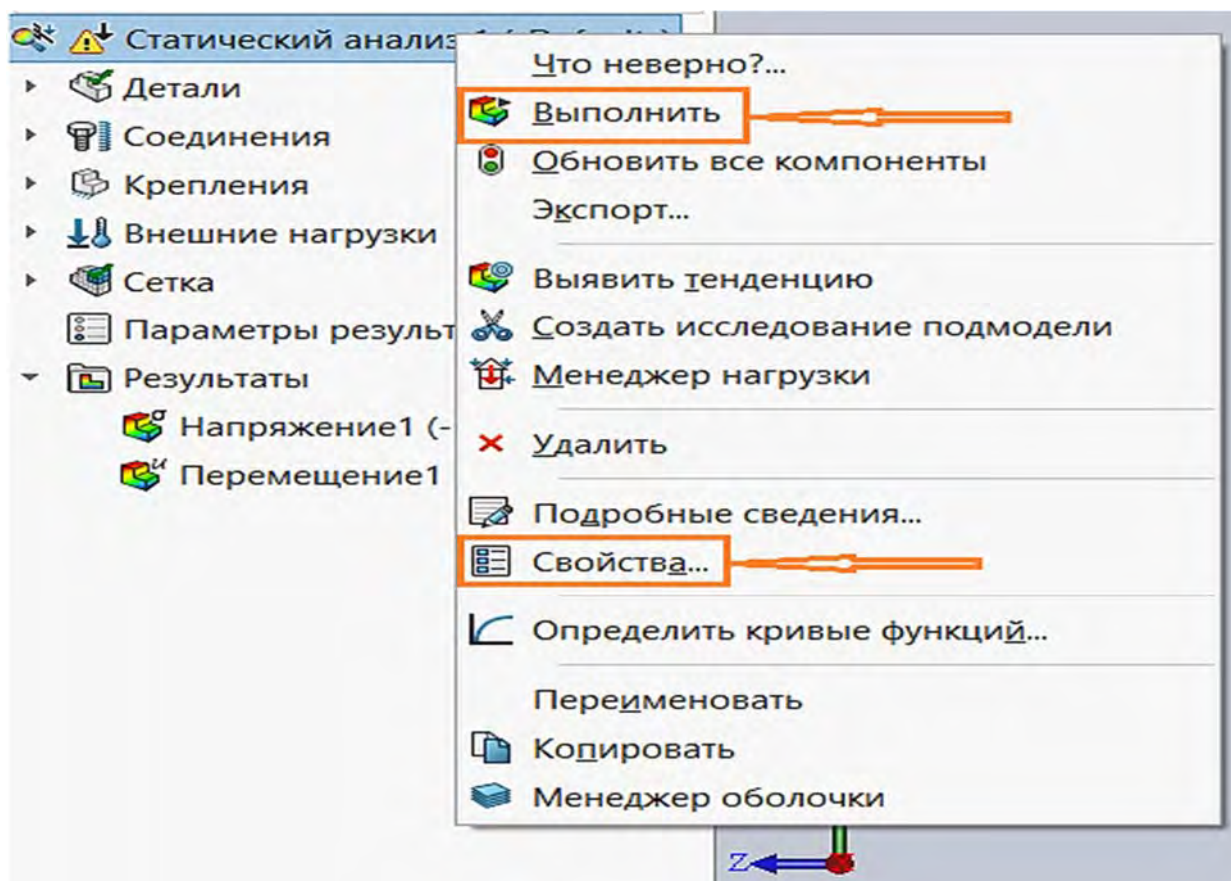


Рис. 3.21. Выпадающее меню иконки *Статический анализ*

Восклицательный знак, находящийся на этой опции, говорит о том, что пока этот анализ не проводился.

Выпадающее меню содержит опции, представленные на рис. 3.21.

Наибольший интерес на этой стадии обучения вызывают опции *Выполнить* и *Свойства*, поскольку они связаны непосредственно с решением результирующей системы уравнений.

Нажатие опции *Выполнить* левой клавишей мыши приводит к непосредственному решению результирующей системы уравнений при установке параметров решателя *по умолчанию*.

Активация опции *Свойства* левой клавишей мыши обуславливает появление еще одного выпадающего меню (рис. 3.22), в котором приводятся опции, позволяющие варьировать параметрами, обеспечивающими наиболее адекватный результат.

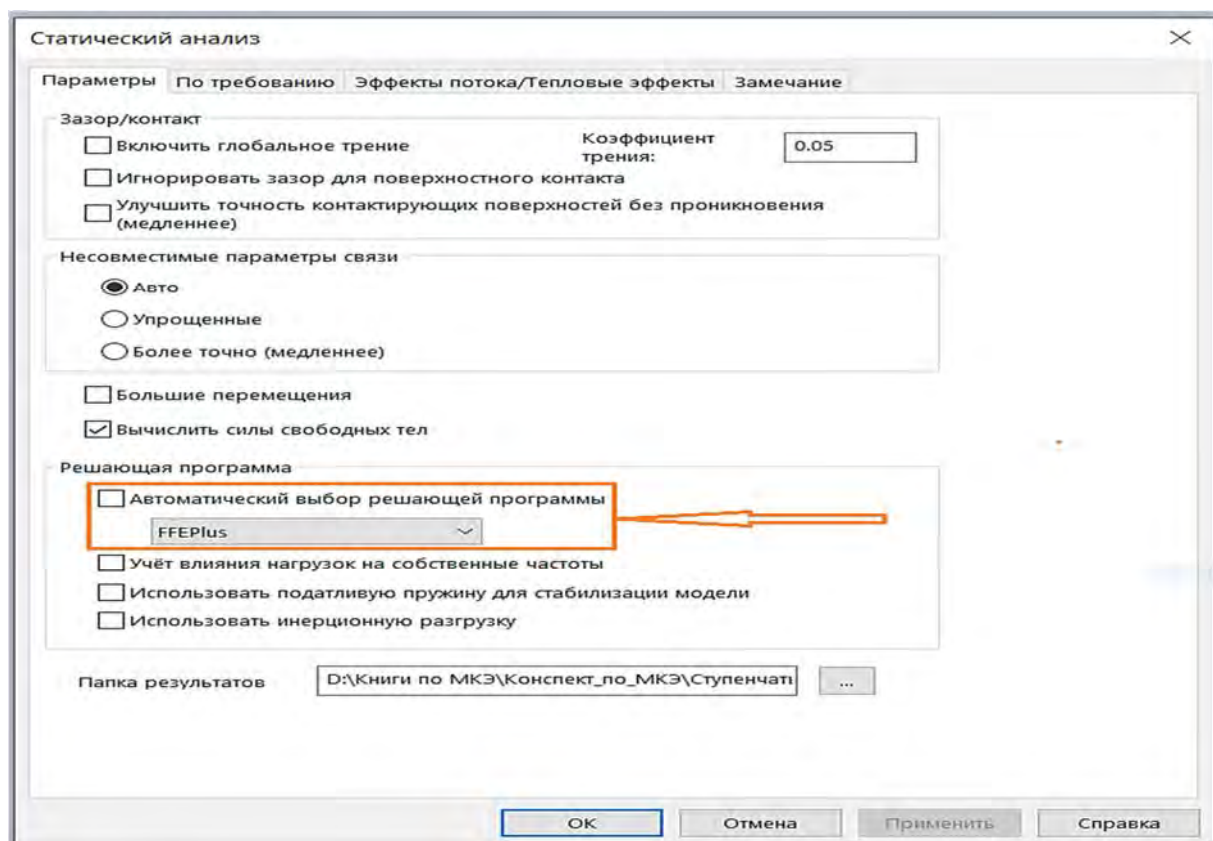
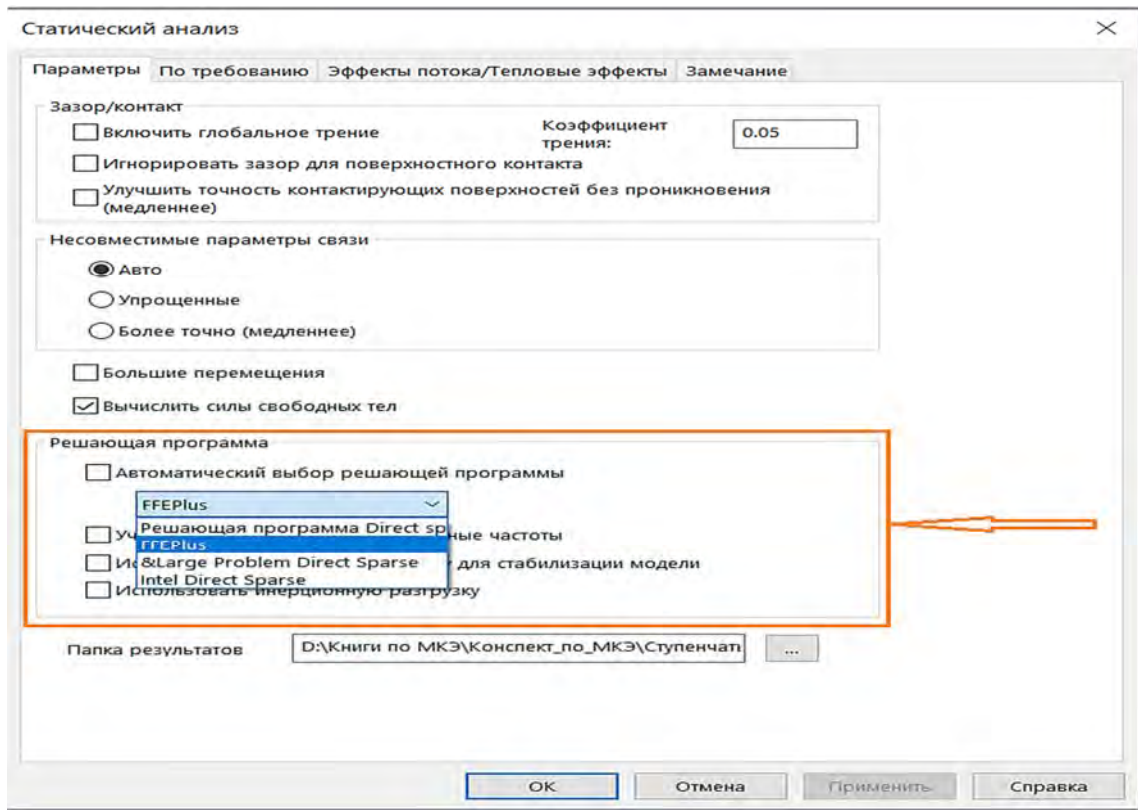


Рис. 3.22. Меню *Свойства* решателя результирующей системы уравнений конечно-элементной модели

Данное выпадающее меню содержит большое количество опций, описание функциональных возможностей каждой из них может быть открыто посредством нажатия иконки *Справка*, находящейся в правом нижнем углу таблицы (см. рис. 3.22).

Для проведения анализа в рассматриваемом конкретном случае наиболее актуальной является опция, связанная с выбором *решающей программы* (см. рис. 3.22). В случае если не активизирована иконка *Автоматический выбор решающей программы*, при раскрытии выпадающего меню необходимо выбрать одну из приведенных в нем программ (рис. 3.23).

Описание функциональных особенностей каждой из приведенных опций представлено на рис. 3.24.

Рис. 3.23. Предлагаемые варианты *решающих программ*

|                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Автоматический выбор решающей программы</b> | Программное обеспечение выбирает решающую программу на основе типа исследования, параметров анализа, условий контакта, и т. п. Некоторые параметры и условия применимы только либо для Direct Sparse, либо для FFEPlus.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Решающая программа Direct sparse</b>        | <p>Выбор решающей программы Direct Sparse. Программу Direct Sparse следует активировать при наличии нескольких процессоров и достаточных ресурсов ОЗУ.</p> <p>Для выполнения линейного статического анализа на каждые 200 000 степеней свободы требуется 1 Гб оперативной памяти. Решающей программе Direct Sparse требуется примерно в 10 раз больше памяти, чем решающей программе FFEPlus.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>FFEPlus</b>                                 | <p>Выбор решающей программы FFEPlus для запуска исследования. Настоящая решающая программа использует усовершенствованное переупорядочение матрицы, что делает ее более эффективной для больших задач.</p> <p>На каждые 2 000 000 степеней свободы требуется 1 Гб оперативной памяти.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Large Problem Direct Sparse</b>             | <p>Использование улучшенных алгоритмов распределения памяти помогает решающей программе <b>Large Problem Direct Sparse</b> в обработке проблем моделирования, сложность которых превышает возможности физической памяти вашего компьютера.</p> <p>При первоначальном выборе решающей программы <b>Direct Sparse</b> в связи с ограниченными ресурсами памяти при обнаружении решения, отличного от базового отображается предупреждение о необходимости переключения на программу <b>Large Problem Direct Sparse</b>.</p> <p>Решающая программа Large Problem Direct Sparse (LPDS) более эффективно использует ресурсы нескольких ядер процессора, чем FFEPlus и Direct Sparse.</p> |
| <b>Intel Direct Sparse</b>                     | Для статических, термических, частотных, линейных динамических и нелинейных исследований доступна решающая программа <b>Intel Direct Sparse</b> . С помощью использования улучшенных алгоритмов распределения памяти и возможности многоядерной обработки решающая программа <b>Intel Direct Sparse</b> повышает скорость данного решения для проблем моделирования, которые решаются внутри ядра.                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

Рис. 3.24. Функциональные особенности *решающих программ*

В результате выбора *решающей программы* и запуска задачи на счет посредством наведения указателя мыши на опцию *Выполнить* (см. рис. 3.21) и при последующем нажатии левой клавишей мыши стартует решение разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. При этом в графической области главного окна SolidWorks появляется новое всплывающее меню (рис. 3.25), по которому можно судить о ходе проводимых расчетов.

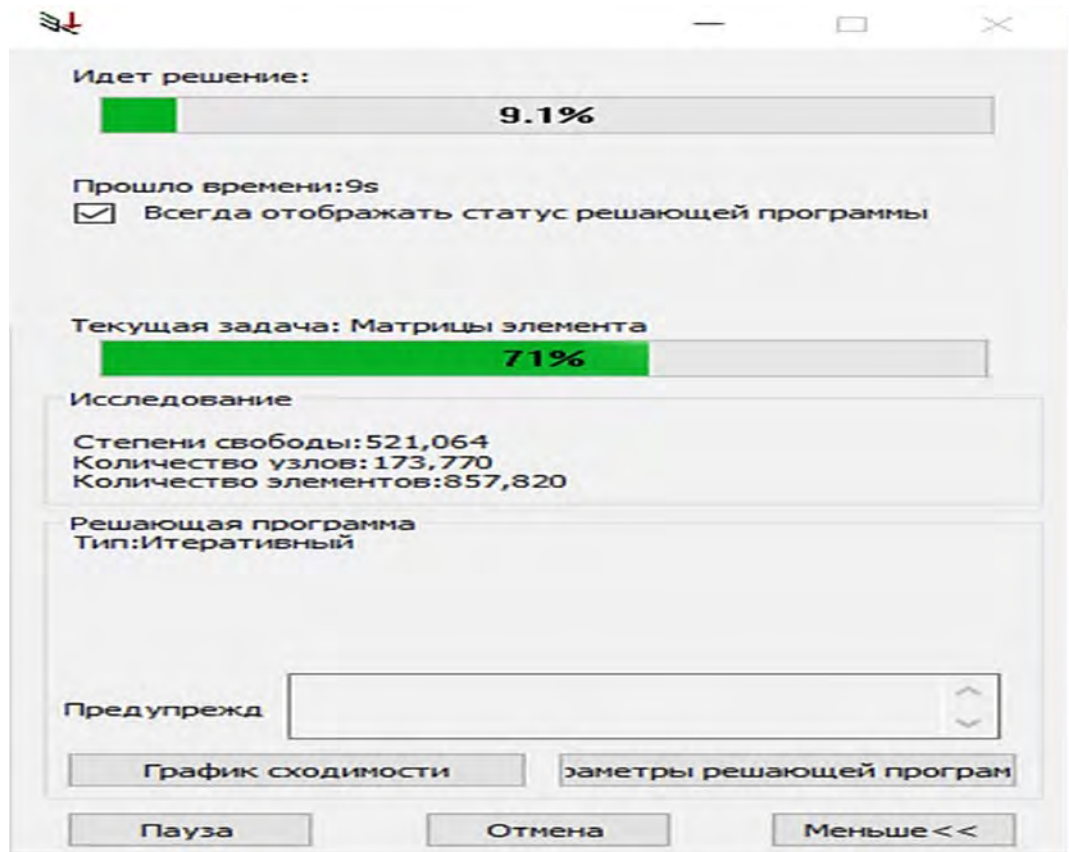


Рис. 3.25. Меню, характеризующее работу процессора

В данном меню приводится информация о проценте проведенных расчетов (верхняя шкала) и времени счета, проценте вычисленных матриц жесткости, количестве степеней свободы, количестве узловых точек и количестве конечных элементов, входящих в разработанную конечно-элементную модель. Кроме того, имеются клавиши, которые позволяют либо приостановить процесс расчета (клавиша *Пауза*), либо прервать расчет в случае, если программа зависла или процесс счета длится чрезмерно долго (клавиша *Отмена*).

На этой стадии проведения анализа вполне уместно поварьировать размерами сетки разбиения конечно-элементной модели. С одной стороны, чтобы не пропустить области, в которых присутствуют значительные градиенты напряжений при грубой сетке разбиения, и с другой – не привести к чрезмерному увеличению продолжительности счета в случае

использования чрезвычайно мелкой сетки. Критерием выбора оптимальных размеров сетки является начало прекращения изменений в картине поля напряжений в изделии по мере измельчения сетки разбиения.

Следующая стадия анализа в SolidWorks Simulation – *Постпроцессорное рассмотрение проводимого исследования*.

По окончании работы процессора формируется база данных, содержащая информацию, с помощью которой можно осуществлять анализ напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в изделии при нагружении. Данные о напряжениях, деформациях и перемещениях представляются в весьма наглядной и удобной форме непосредственно на твердотельной модели в виде эпюры, находящейся в графической области окна SolidWorks Simulation.

Создание этих эпюр осуществляется посредством щелчка правой клавишей мыши по опции *Результаты* в меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* (рис. 3.26).

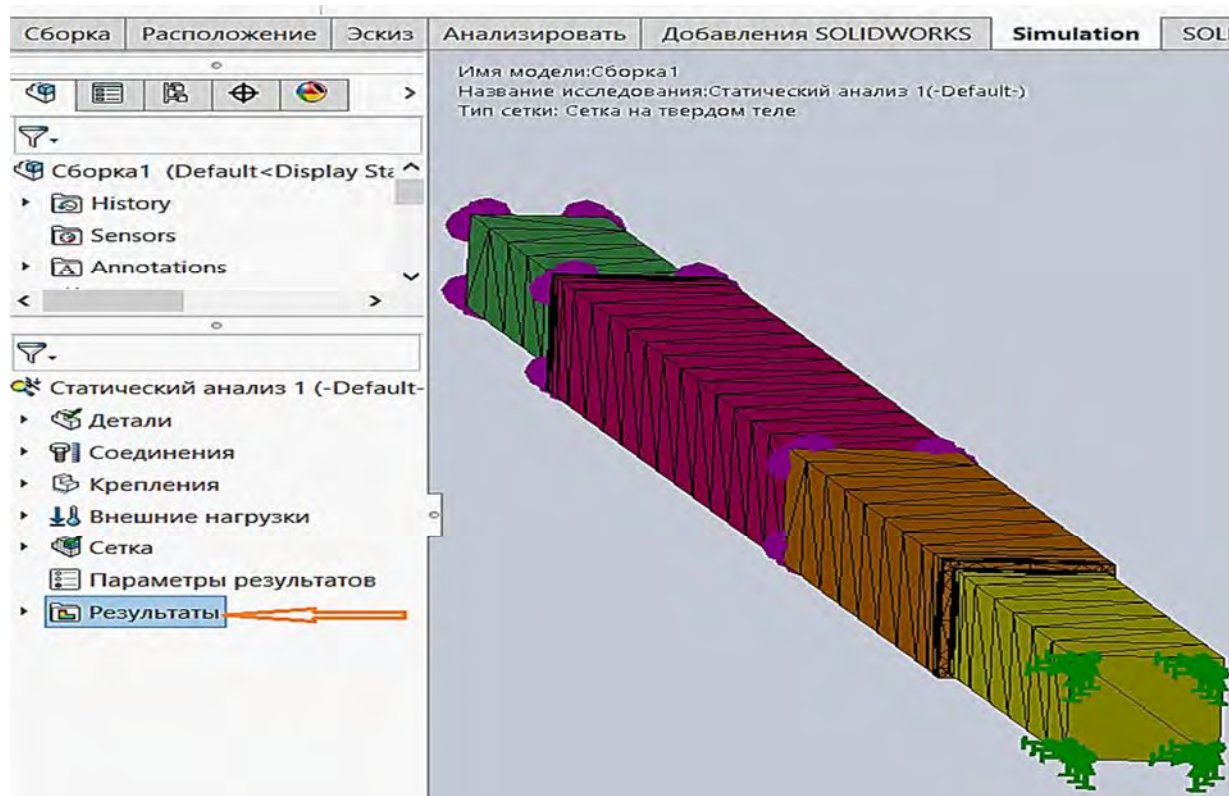


Рис. 3.26. Создание базы данных результатов проведенных расчетов

Далее появится всплывающее меню, представленное на рис. 3.27.

Используя опции данного меню, можно ввести в базу данных результатов расчета информацию об *эпюре напряжений*, *эпюре перемещений*, *эпюре относительных деформаций* и т. д. Остановимся более подробно на введении в базу результатов данных об эпюре напряжений (см. рис. 3.27), щелкнув левой клавишей мыши по данной опции.

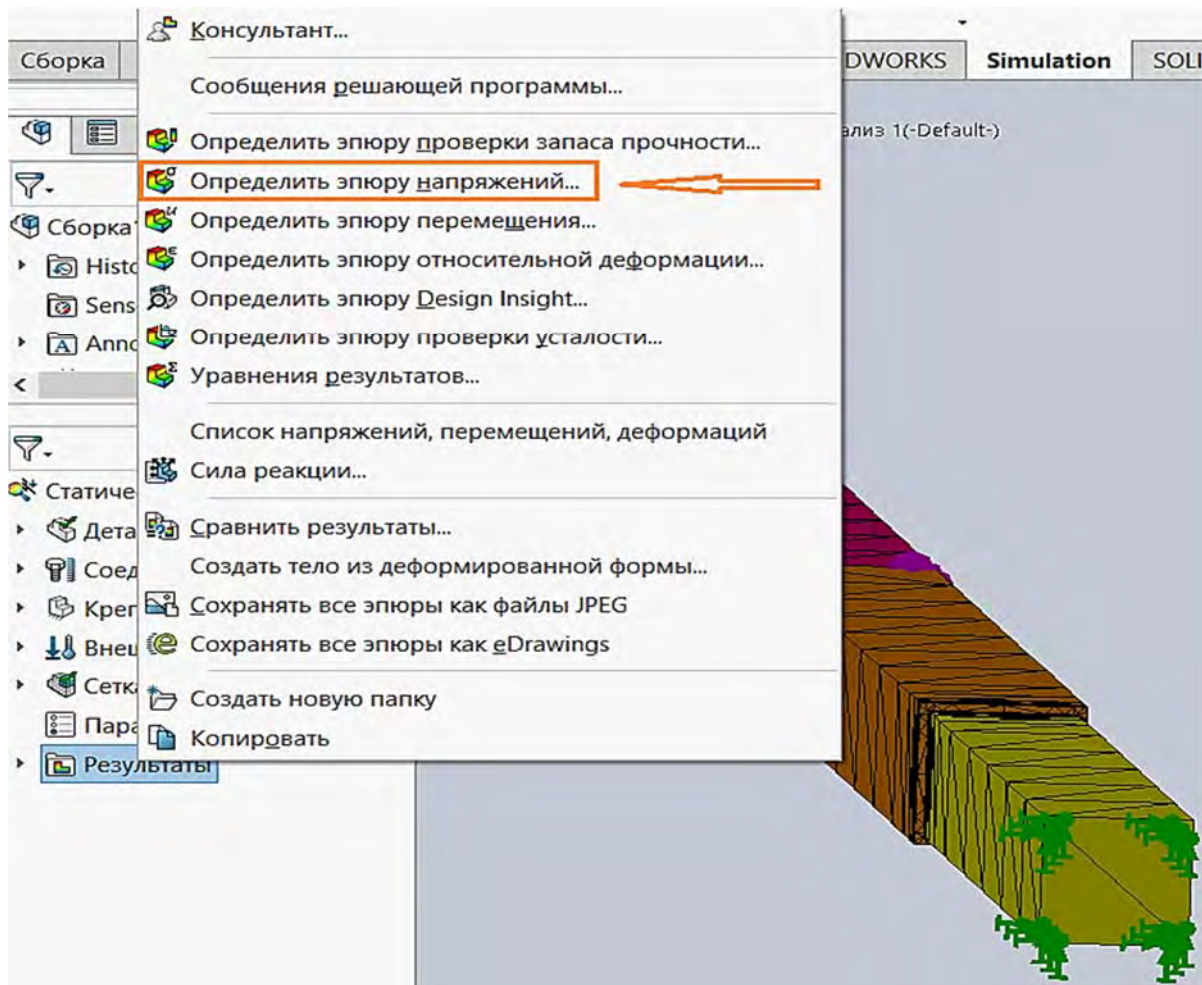


Рис. 3.27. Выбор эпюры, вносимой в базу данных результатов расчетов

Результатом этого действия станет появление нового меню (рис. 3.28), опциями которого будут параметры, характеризующие непосредственно построение эпюры напряжений.

Данное меню (см. рис. 3.28) содержит достаточно большое количество параметров, многие из которых можно назначать *по умолчанию*.

Наибольший интерес из них (для рассматриваемого примера) представляют параметры, находящиеся в разделе *Отображение*. В частности, к этому разделу относится выводимая на экран компонента напряжений. На рис. 3.28 приводится интегральный показатель напряжений – напряжения по Von Mises, с помощью которых можно судить о прочности изделия либо о наступлении пластического деформирования его.

Для анализируемого примера наибольший интерес представляет, как это видно из расположения твердотельной модели по отношению к заданной системе координат, компонента нормальных напряжений, действующая по направлению оси  $Y$ . Эта компонента нормальных напряжений обозначается в данном программном продукте  $S_Y$  и ее действие совпадает с осью рассматриваемого ступенчатого стержня.

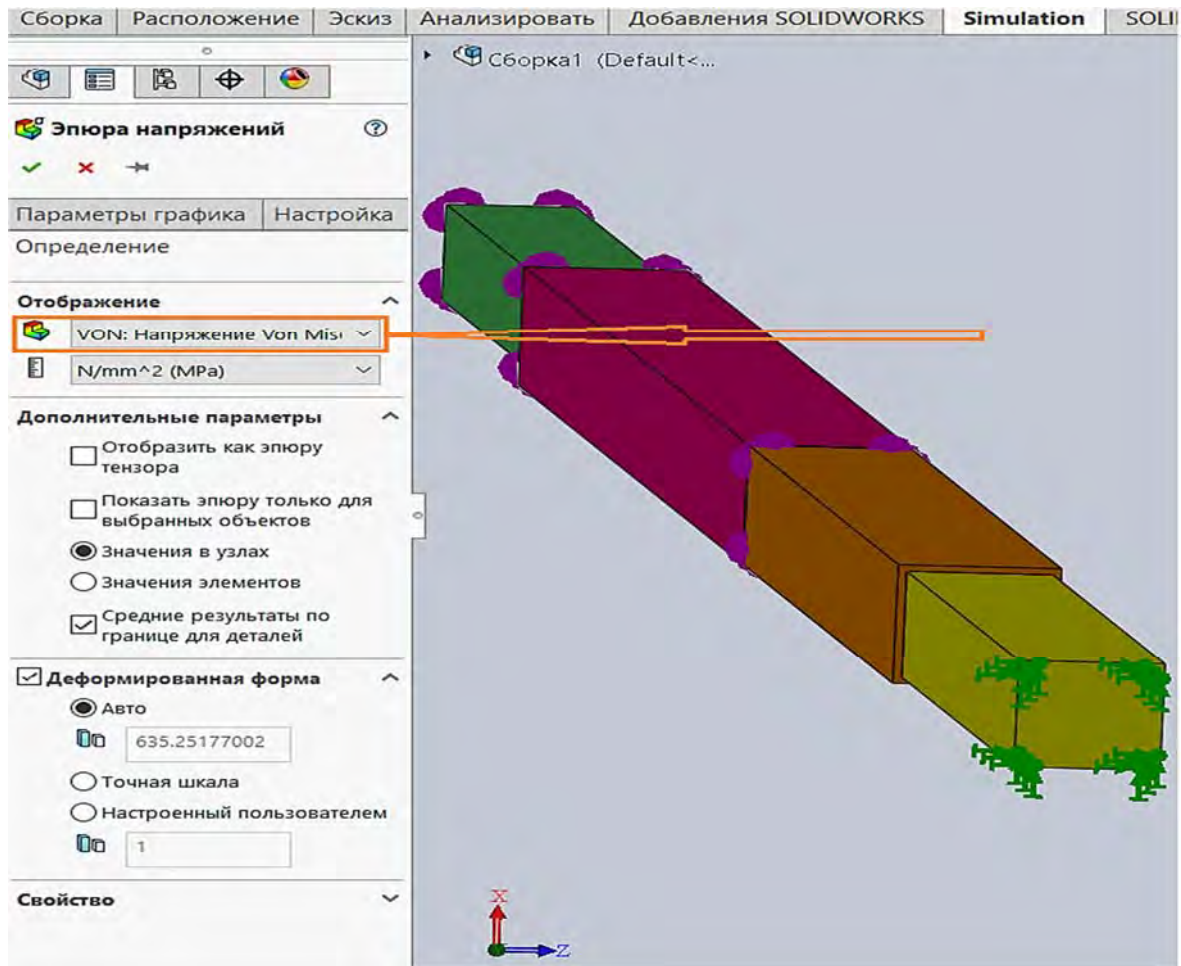


Рис. 3.28. Параметры, которые необходимо ввести для создания эпюры напряжений

На рис. 3.29 показаны компоненты напряжений, предлагаемые всплывающим меню к внесению в базу данных результатов расчета.

После щелчка левой клавишей мыши по интересующей компоненте напряжений информация о ней заносится в базу данных результатов расчета.

Далее, для вывода эпюры напряжений в графическую область окна SolidWorks Simulation необходимо щелкнуть левой клавишей мыши по опции *Результаты* в меню *Дерево конструирования (Feature Manager)*. В последующем появится меню, предлагающее вывести на экран эпюры, занесенные в базу данных результатов (рис. 3.30).

Как видно из рис. 3.30, в базу данных результатов были занесены сведения об эпюрах нормальных напряжений  $\sigma_y$  и линейных перемещений  $u_y$  по направлению оси  $Y$ . Здесь следует отметить, что порядок формирования параметров эпюры перемещений  $u$  полностью аналогичен порядку формирования для эпюры нормальных напряжений  $\sigma$ .

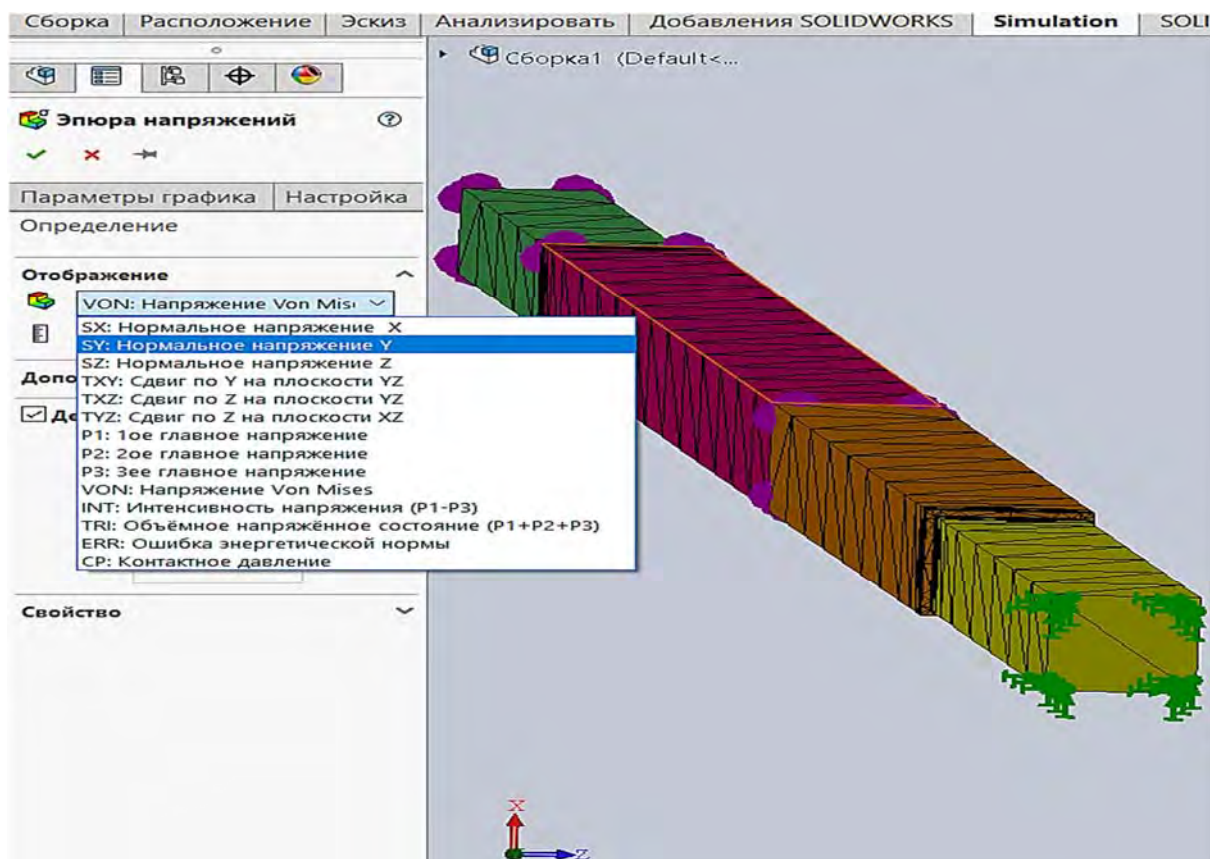


Рис. 3.29. Выбор компоненты напряжений, эпюра которой выводится в графическую область SolidWorks Simulation

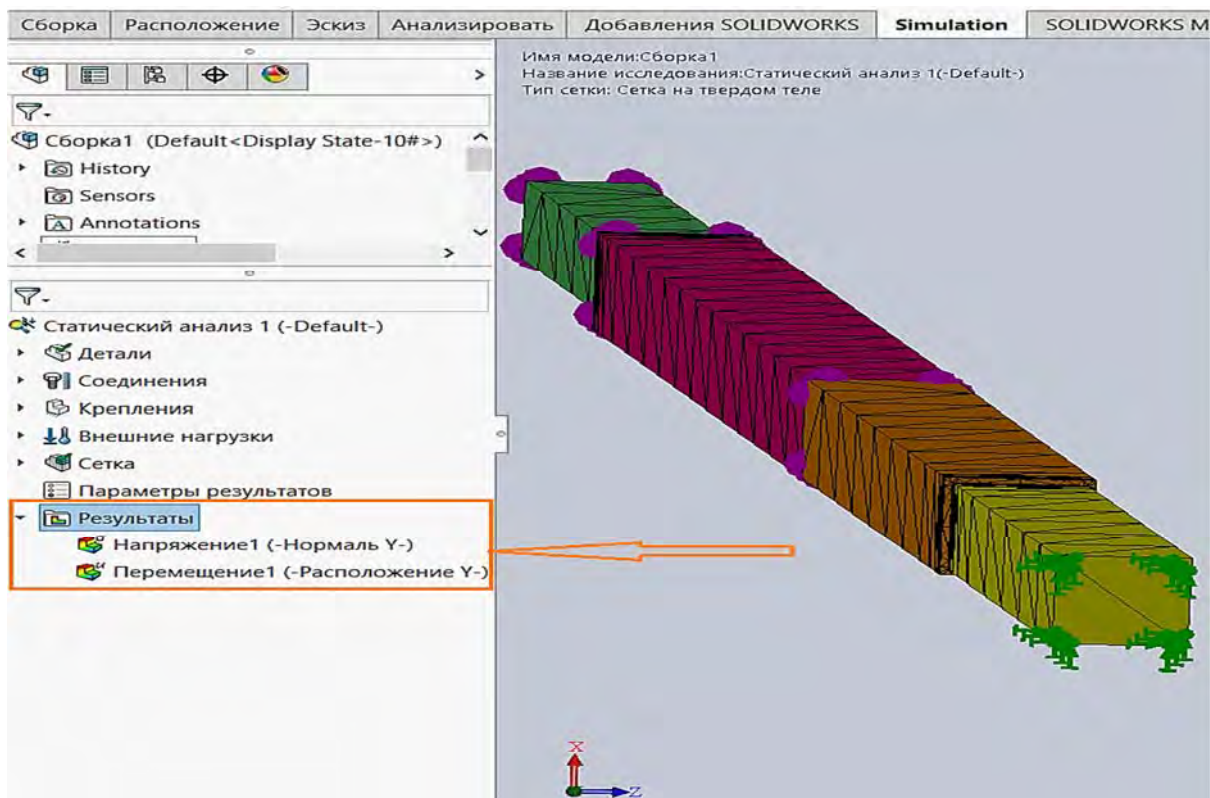


Рис. 3.30. Эпюры, предлагаемые к выводу в графическую область окна SolidWorks Simulation

Затем, дважды щелкнув левой клавишей мыши по выводимой в графическую область эпюре, получим изображение, представленное на рис. 3.31.

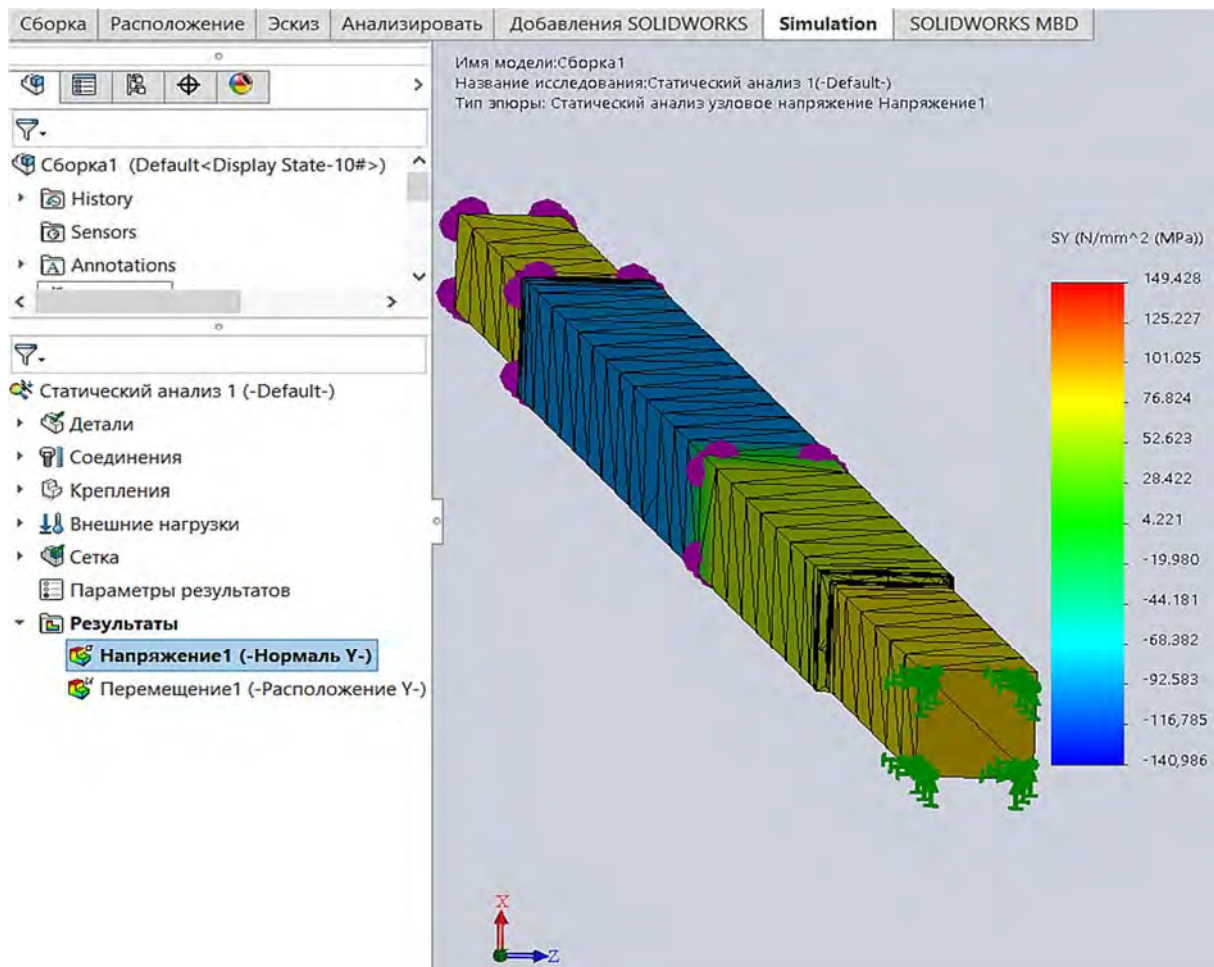


Рис. 3.31. Эпюра нормальных напряжений рассматриваемого ступенчатого бруса

В графической области (см. рис. 3.31) появился исследуемый объект с раскраской поверхности, обозначающей значения напряжений в данных местах в соответствии со шкалой, приведенной в правой части этого изображения. Здесь следует отметить, что разноцветная шкала может свободно перемещаться вдоль графической области, установив на ней мышью и зафиксировав ее левой клавишей. Кроме того, щелкнув правой клавишей мыши по области разноцветной шкалы, можно в дальнейшем осуществлять редактирование выводимого на экран изображения эпюры, а также различной информации, связанной с ней (рис. 3.32).

Так, например, используя опцию *Зондирование* (см. рис. 3.32), можно установить точное значение параметра эпюры в конкретной узловой точке конечно-элементной модели исследуемого объекта.

Для этого необходимо щелкнуть левой клавишей мыши по опции *Зондирование* (см. рис. 3.32), в результате в левой части экрана появится меню, содержащее таблицу *Результаты зондирования* (рис. 3.33).

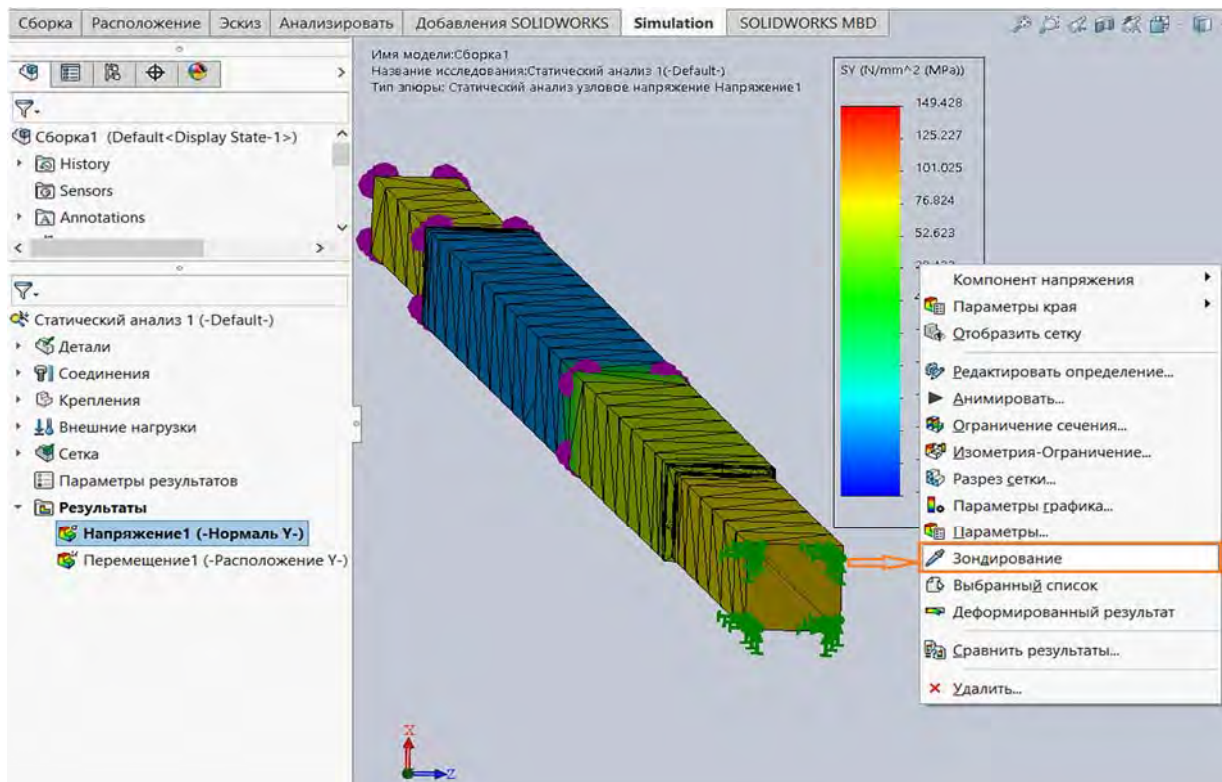


Рис. 3.32. Предлагаемые опции в меню редактирования эпюры и определения дополнительной информации о ней

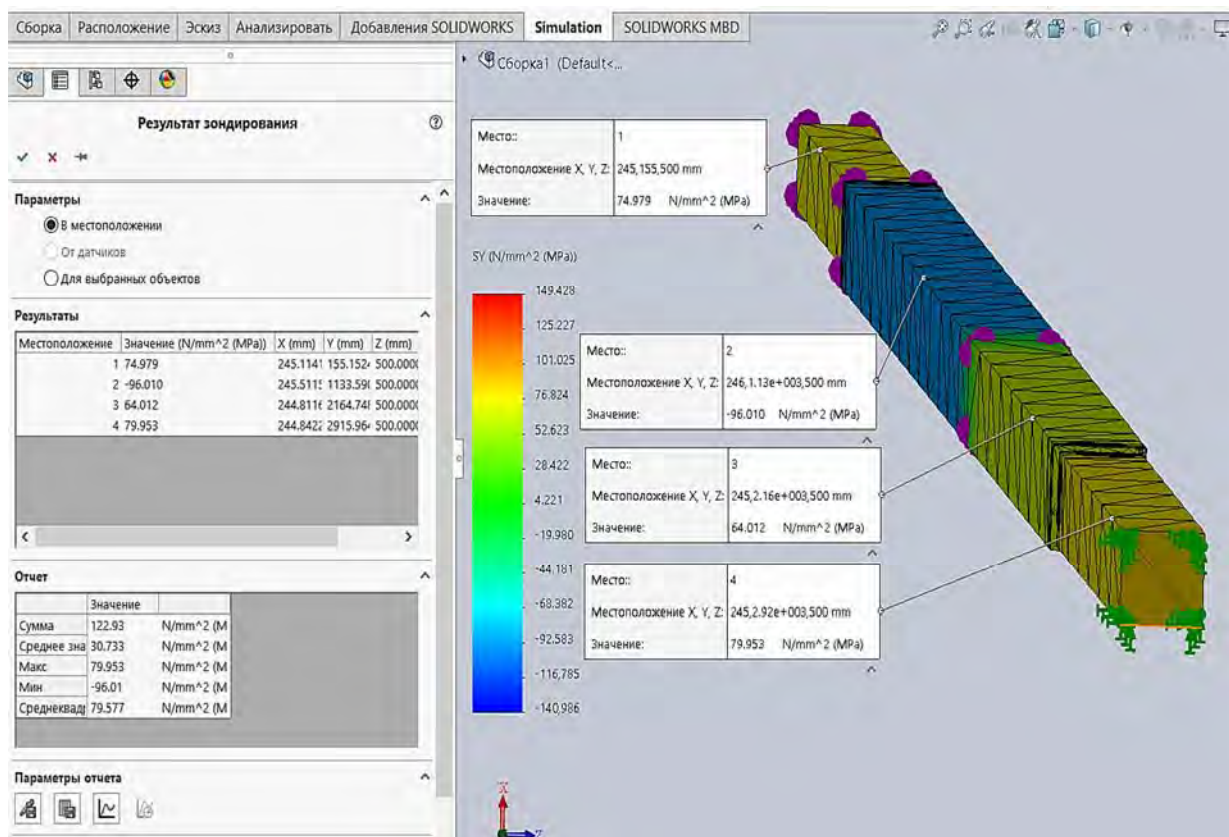


Рис. 3.33. Результаты зондирования эпюры нормальных напряжений на участках ступенчатого бруса

Данная таблица включает в себя информацию о порядковом номере точки, в которой устанавливалось значение эпюры, величине этого параметра и координатах данной точки. Место расположения точки, в которой определяется значение эпюры, устанавливается автоматически посредством наведения мыши на соответствующей узловой точке конечно-элементной модели объекта и щелчка левой клавишей. Информация, выводимая в таблицу, также выводится и в графическую область окна SolidWorks Simulation (см. рис. 3.33). Для наглядности эта информация на рисунке связывается непосредственно с узловой точкой, отображенной на приведенной эпюре (см. рис. 3.33). Информация, представленная на рис. 3.33 в светлой рамочке, легко «перетаскивается» по плоскости экрана, зацепив ее левой клавишей мыши.

Программное обеспечение SolidWorks Simulation позволяет автоматически по результатам зондирования построить график изменения рассматриваемого параметра при переходе от точки к точке (рис. 3.34).

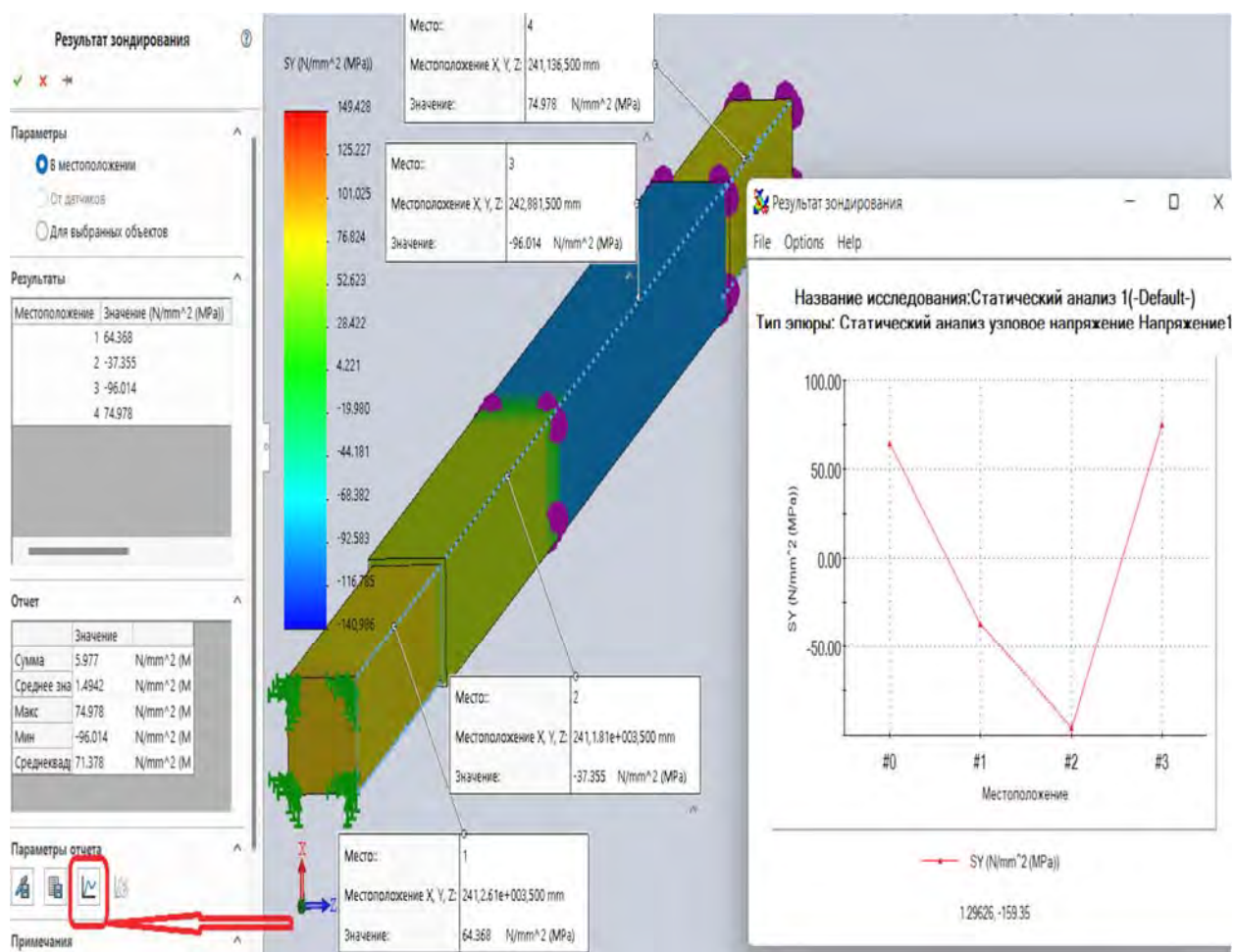


Рис. 3.34. Построение графика по результатам зондирования

Данная операция может быть выполнена нажатием левой клавишей мыши по иконке, выделенной красной рамочкой и помеченной стрелкой

(см. рис. 3.34) в разделе *Параметры отчета*. Справа от указанной иконки (она для данного случая расчета не активна) расположена опция, позволяющая построить графики изменения рассматриваемого параметра во времени. Этих графиков будет столько, сколько точек зондирования будет определено. Здесь следует отметить, что графики зависимости анализируемого параметра от времени актуальны (например, для динамических задач), в частности, при соударении анализируемых объектов.

Для проверки достоверности полученных результатов конечно-элементного расчета, а следовательно, адекватности построенной конечно-элементной модели реальному объекту исследования, на следующем этапе проводился сопоставительный анализ.

В табл. 3.2 приведено сопоставление результатов расчетов, полученных с помощью курса «Механика материалов» (см. рис. 3.4, в), и алгоритма метода конечных элементов, заложенного в программном продукте SolidWorks Simulation (см. рис. 3.33).

Табл. 3.2. Сопоставление результатов расчета ступенчатого бруса, полученных с использованием различных подходов

| Порядковый номер участка ступенчатого бруса | Значение нормальных напряжений в поперечных сечениях ступенчатого бруса, МПа |                                                          | Процент расхождения результатов |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------|
|                                             | Результат расчета с использованием курса «Механика материалов»               | Результат расчета с использованием SolidWorks Simulation |                                 |
| 1                                           | 75                                                                           | 74,979                                                   | 0,028                           |
| 2                                           | –96                                                                          | –96,010                                                  | 0,01                            |
| 3                                           | 64                                                                           | 64,012                                                   | 0,019                           |
| 4                                           | 80                                                                           | 79,953                                                   | 0,059                           |

Как видно из табл. 3.2, различие в результатах расчетов с помощью указанных подходов не превышает десятых долей процента, что подчеркивает достоверность разработанной конечно-элементной модели.

Аналогичным образом с эпюрой нормальных напряжений (см. рис. 3.33) может быть внесена в базу данных и эпюра продольных перемещений поперечных сечений ступенчатого бруса (рис. 3.35).

Значения продольных перемещений, представленных на рис. 3.4, г, отличаются знаком по сравнению с приведенными на рис. 3.35. Объясняется это тем, что знак перемещений (см. рис. 3.35) устанавливается в зависимости от того, совпадает направление соответствующей координатной оси с направлением перемещения рассматриваемой узловой точки

или нет. На рис. 3.4,  $\varepsilon$  знак устанавливается в зависимости от того, что происходит – растяжение или сжатие бруса.

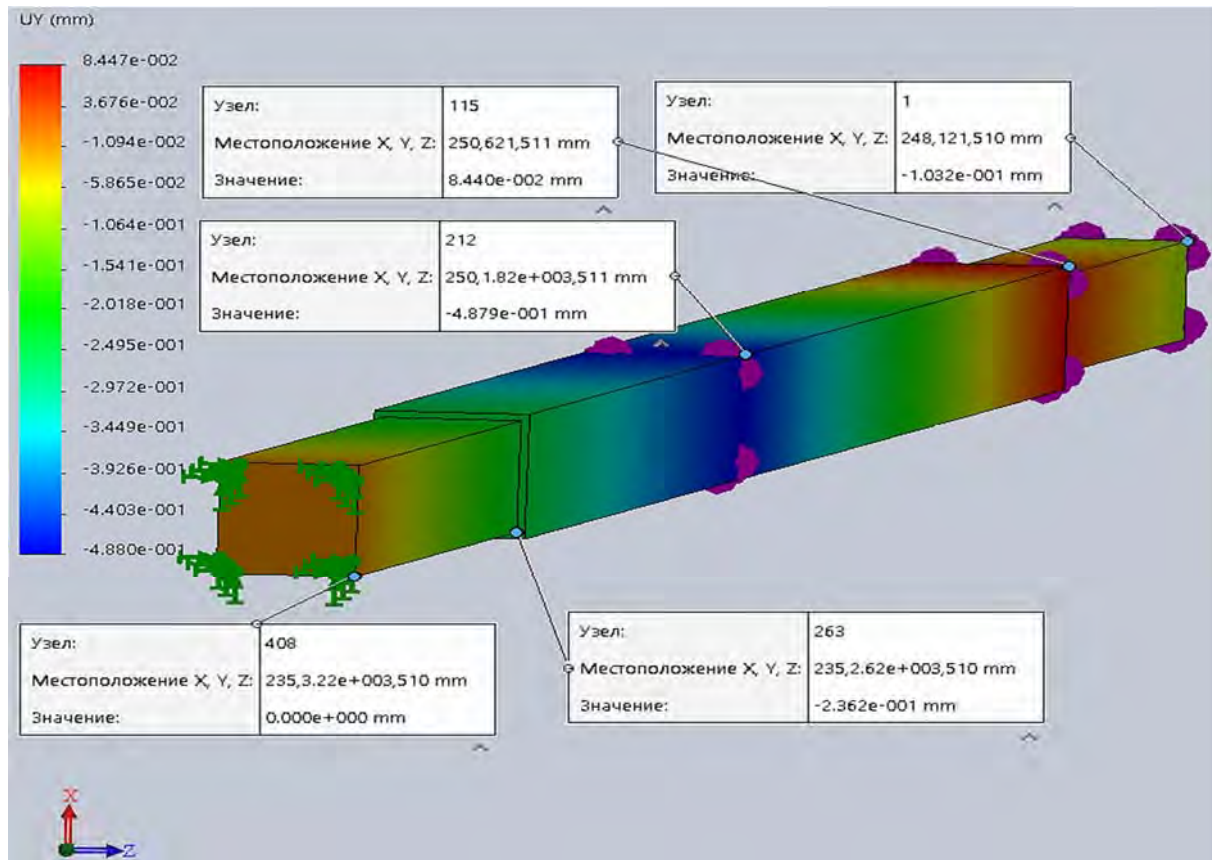


Рис. 3.35. Эпюра перемещений ступенчатого бруса по направлению его оси

Сопоставление значений перемещений, вычисленных указанными двумя подходами, приведено в табл. 3.3.

Табл. 3.3. Сопоставление значений продольных перемещений ступенчатого бруса, вычисленных методом конечных элементов и подходами курса «Механика материалов»

| Порядковый номер поперечных сечений бруса по мере перемещения от заделки к свободному концу | Значение перемещений поперечных сечений бруса, мм              |                                                          | Процент расхождения результатов |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------|
|                                                                                             | Результат расчета с использованием курса «Механика материалов» | Результат расчета с использованием SolidWorks Simulation |                                 |
| 1                                                                                           | 0                                                              | 0                                                        | 0                               |
| 2                                                                                           | 0,24                                                           | 0,236                                                    | 1,7                             |
| 3                                                                                           | 0,496                                                          | 0,488                                                    | 1,6                             |
| 4                                                                                           | –0,08                                                          | –0,084                                                   | 5                               |
| 5                                                                                           | 0,108                                                          | 0,103                                                    | 4,6                             |

Как видно из табл. 3.3, процент расхождения сравнительно невелик. Объясняется его наличие достаточно грубой сеткой разбиения модели на конечные элементы.

### ***Контрольные вопросы***

1. В чем заключается цель лабораторной работы?
2. Какой объект подвергается анализу в лабораторной работе?
3. С использованием каких методик осуществляется анализ объекта лабораторной работы?
4. Какова причина проведения анализа ступенчатого бруса? Используйте два подхода.
5. Каким количеством деталей представляется ступенчатый брус? Каково обоснование такого разбиения?
6. Какая форма поперечного сечения ступенчатого бруса в лабораторной работе?
7. Как выглядит правило знаков для продольной силы  $N$  при центральном растяжении-сжатии стержня?
8. С помощью какого выражения определяются напряжения при центральном растяжении-сжатии стержня?
9. С помощью какого выражения определяются абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса при данном напряженно-деформированном состоянии?
10. Как определяются индивидуальные исходные данные к лабораторной работе?
11. Какое количество эпюр необходимо построить в лабораторной работе, используя подходы курса «Механика материалов»?
12. Какова укрупненная последовательность действий анализа напряженно-деформированного ступенчатого бруса в компьютерной системе SolidWorks Simulation?
13. В каких местах геометрического объекта можно приложить нагрузку применительно к системе SolidWorks Simulation?
14. Какая последовательность действий при выборе типа проводимого анализа?
15. Какие задачи относятся к *статическому анализу*?
16. Какую информацию необходимо ввести, чтобы перейти от твердотельной модели к конечно-элементной?
17. Сведения о каких механических характеристиках обязательны для проведения статического анализа?
18. Какая последовательность действий при создании сетки разбиения изделия на конечные элементы?

19. Как отражается густота сетки разбиения изделия на конечные элементы на точность расчетов?

20. Какая последовательность действий для запуска разрешающей программы на счет?

21. Что означает восклицательный знак на опции *Статический анализ*?

22. В какой опции задается информация об используемой разрешающей программе?

23. Какие разрешающие программы результирующей системы уравнений вам известны?

24. Как называется стадия анализа, следующая за решением результирующей системы линейных алгебраических уравнений?

25. Какую информацию можно получить посредством использования опции *Результаты* в меню *Дерево конструирования (Feature Manager)* при статическом анализе?

26. Какие известные вам компоненты напряжений могут быть представлены в виде эпюр?

27. Какие известные вам компоненты перемещений могут быть представлены в виде эпюр?

28. Какую информацию можно получить посредством использования опции *Зондирование*?

29. Как, используя опцию *Зондирование*, можно построить график изменения рассматриваемого параметра по некоторому направлению?

30. Посредством каких действий формируется завершающий вывод по выполняемой лабораторной работе?

### **3.2. Лабораторная работа № 2. Осуществление сопоставительного анализа балки при плоском поперечном изгибе**

**Цель работы:** определить напряженно-деформированное состояние балки при плоском поперечном изгибе, используя методику курса «Механика материалов» и метод конечных элементов; сопоставить полученные результаты.

**Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы**

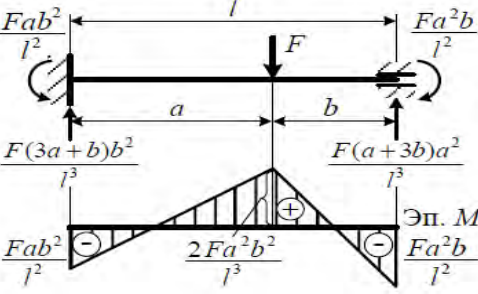
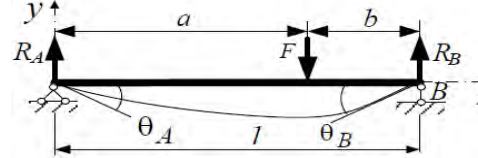
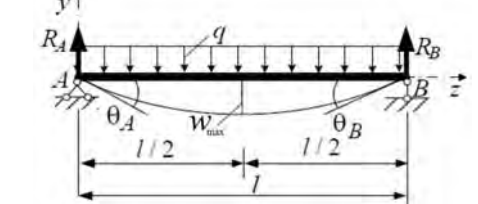
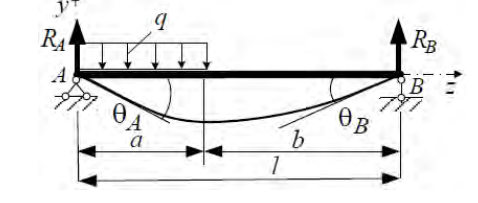
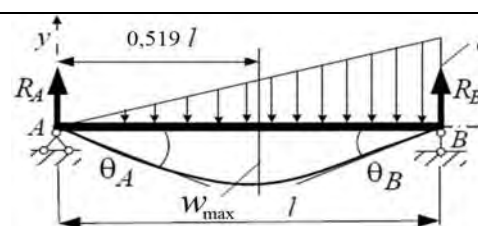
Плоским поперечным изгибом называется напряженно-деформированное состояние балки, когда силовая плоскость (плоскость действия внеш-

ней нагрузки) совпадает с одной из главных осей поперечного сечения. Согласно выкладкам, полученным в курсе «Механика материалов» [12–14], максимальные напряжения  $\sigma_{\max}$  определяются с помощью выражения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x},$$

где  $M_{\max}$ ,  $W_x$  – максимальный изгибающий момент и момент сопротивления поперечного сечения балки соответственно; вычисляют по формулам, приведенным в табл. 3.4–3.6.

Табл. 3.4. Схемы нагружения и закрепления балок

| Номер<br>схемы | Схема нагружения балки                                                              | Изгибающий<br>момент                                                                                                                     | Прогиб<br>в пролете                                                                                                    |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0              |   | Максимальное значение изгибающего момента $M_{\max}$ определить из эпюры моментов для конкретных значений нагрузки и места ее приложения | –                                                                                                                      |
| 1              |  | $M_{\max} = \frac{Fab}{l}$<br>при $z = a$                                                                                                | $w_{\max} = -\frac{Fab^2}{3EJ_x l}$<br>при $z = a$                                                                     |
| 2              |  | $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$<br>при $z = \frac{l}{2}$                                                                                     | $w_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EJ_x}$<br>при $z = \frac{l}{2}$                                                           |
| 3              |  | $M_{\max} = \frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{l}\right)^2$<br>при $z = \frac{a}{2} \left(2 - \frac{a}{l}\right)$                         | $w_{\max} = -\frac{qa^3 l}{24EJ_x} \times$<br>$\times \left(4 - 7\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)$<br>при $z = a$ |
| 4              |  | $M_{\max} = 0,064ql^2$<br>при $z = 0,577l$                                                                                               | $w_{\max} = -0,00652 \frac{ql^4}{EJ_x}$<br>при $z = 0,519l$                                                            |

Окончание табл. 3.4

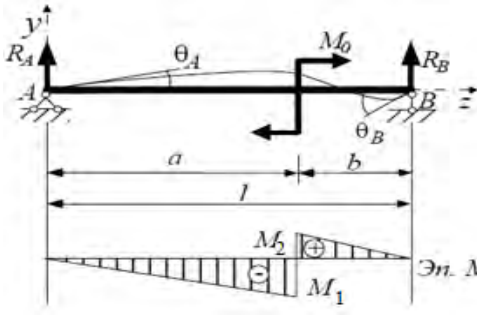
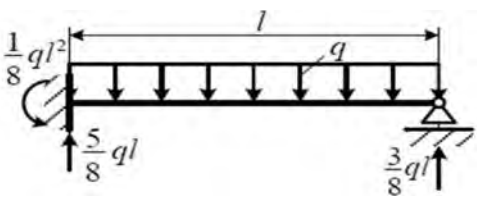
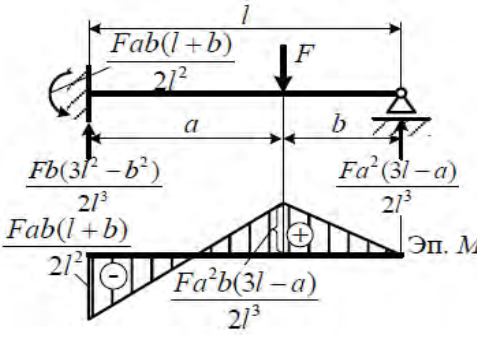
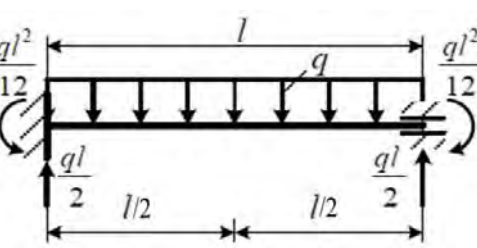
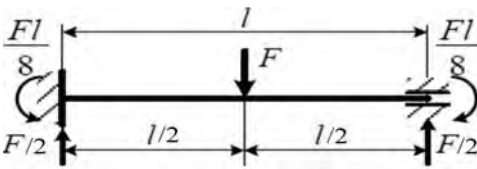
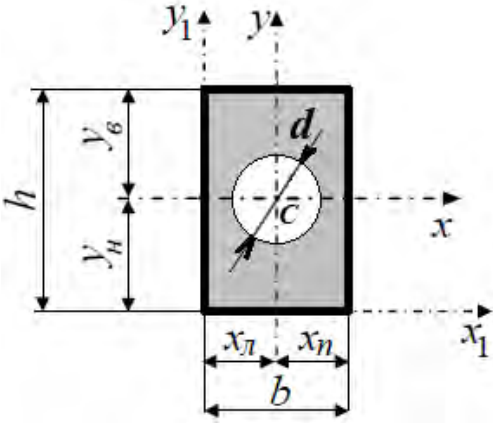
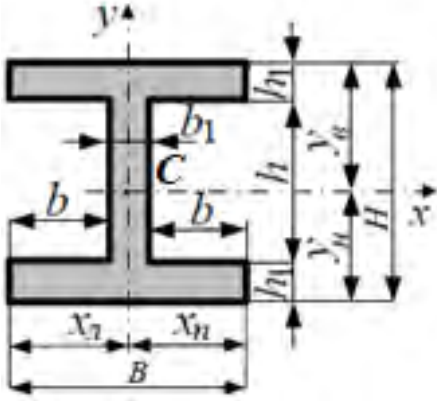
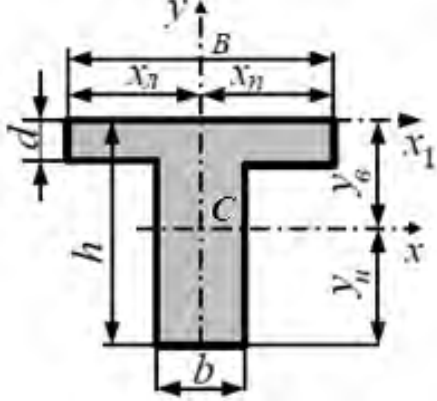
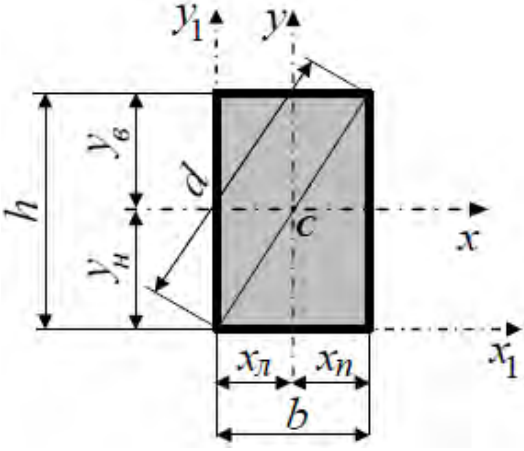
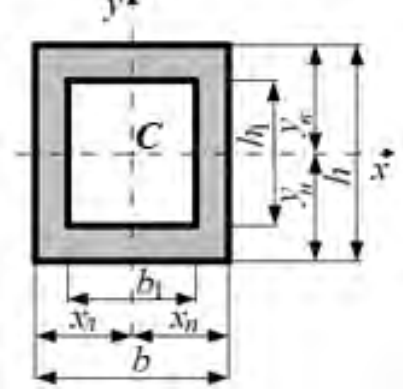
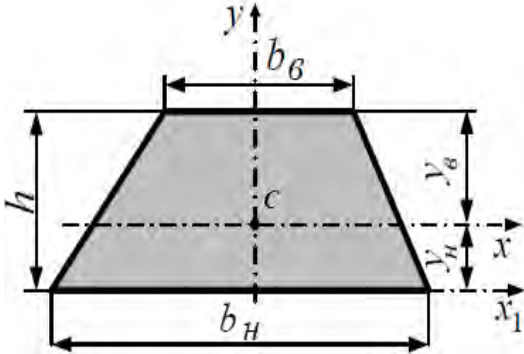
| Номер<br>схемы | Схема нагружения балки                                                              | Изгибающий момент                                                                                                                        | Прогиб<br>в пролете                                                                                                                  |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5              |    | $M_1 = -\frac{M_o a}{l};$ $M_2 = \frac{M_o b}{l}$                                                                                        | $w = \frac{M_o \ell^2}{3EJ_x} \times \left( 3\frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - 2\frac{a^3}{l^3} \right)$ <p>при <math>z = a</math></p> |
| 6              |    | $M = \frac{9}{128}ql^2$ <p>при <math>z = l - \frac{3}{8}l</math></p>                                                                     | —                                                                                                                                    |
| 7              |   | Максимальное значение изгибающего момента $M_{\max}$ определить из эпюры моментов для конкретных значений нагрузки и места ее приложения | —                                                                                                                                    |
| 8              |  | $M_{\max} = \frac{ql^2}{12}$ <p>при <math>z = 0, z = l</math></p>                                                                        | —                                                                                                                                    |
| 9              |  | $M_{\max} = \frac{Fl}{8}$ <p>при <math>z = 0, z = \frac{l}{2}, z = l</math></p>                                                          | —                                                                                                                                    |

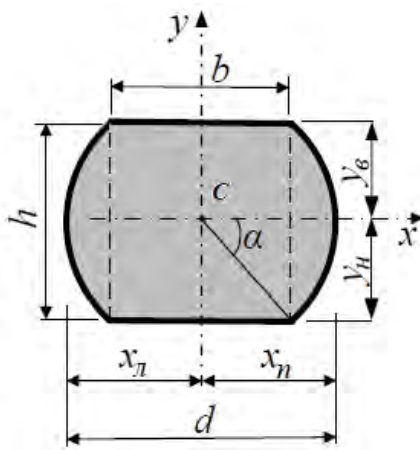
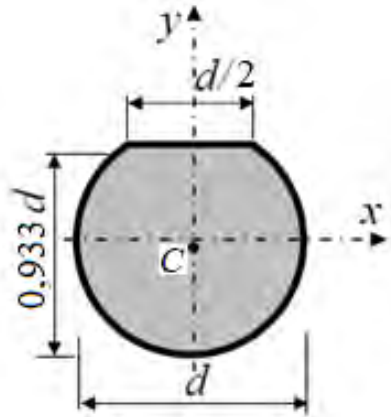
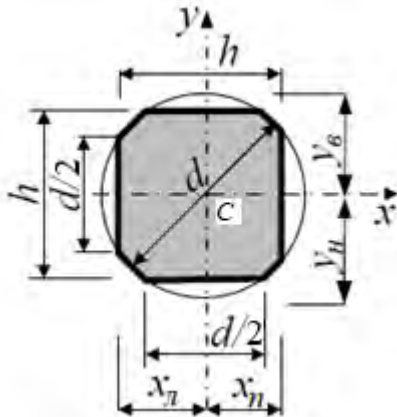
Табл. 3.5. Формы поперечных сечений и их геометрические характеристики

| Номер<br>схемы | Форма поперечного сечения                                                                                                                        | Геометрические характеристики<br>поперечного сечения                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0              | <p>Прямоугольник с центральным отверстием</p>                   | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64};$ $W_x = \left( \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) \frac{2}{h};$ $W_y = \left( \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) \frac{2}{b}$                                                                                                  |
| 1              | <p>Симметричный двутавр, составленный из прямоугольников</p>  | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $J_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb_1^3 + 2h_1B^3}{12};$ $W_x = \frac{BH^3 - 2bh^3}{6H}; \quad W_y = \frac{hb_1^3 + 2h_1B^3}{6B}$                                                                                                                                              |
| 2              | <p>Симметричный тавр, составленный из прямоугольников</p>     | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $A = (B - b) \cdot d + b \cdot h;$ $y_g = \frac{(B - b) \frac{d^2}{2} + b \frac{h^2}{2}}{(B - b)d + bh};$ $J_x = (B - b) \frac{d^3}{3} + \frac{bh^3}{3} - Ay_g^2;$ $W_{x,H} = \frac{J_x}{h - y_g}; \quad W_{x,g} = \frac{J_x}{y_g};$ $J_{\min} = J_y = \frac{(h - d)b^3}{12} + \frac{db^3}{12}$ |

Продолжение табл. 3.5

| Номер<br>схемы | Форма поперечного сечения                                                                                          | Геометрические характеристики<br>поперечного сечения                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3              | <p>Прямоугольник</p>              | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12};$ $W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$                                                                                                                     |
| 4              | <p>Полый прямоугольник</p>       | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1b_1^3}{12};$ $W_x = \frac{1}{6} \left( bh^2 - \frac{b_1h_1^3}{h} \right);$ $W_y = \frac{1}{6} \left( hb^2 - \frac{h_1b_1^3}{b} \right)$ |
| 5              | <p>Равнобедренная трапеция</p>  | <p>Момент сопротивления <math>W_{x,н}</math> и <math>W_{y,6}</math></p> $J_x = \frac{h^3(b_н^2 + 4b_нb_6 + b_6^2)}{36(b_6 + b_н)};$ $W_{x,н} = \frac{J_x}{y_н}; \quad W_{x,6} = \frac{J_x}{y_6};$ $y_6 = \frac{2b_н + b_6}{3(b_н + b_6)}h$                                                    |

Продолжение табл. 3.5

| Номер<br>схемы | Форма поперечного сечения                                                                                                                     | Геометрические характеристики<br>поперечного сечения                                                                                  |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6              | <p>Круг со срезанными сегментами<br/>сверху и снизу</p>      | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $J_x = 0,0395d^4; J_y = 0,0485d^4;$ $W_x = 0,088d^3; W_y = 0,097d^3$ |
| 7              | <p>Круг со срезанным сегментом сверху</p>                   | <p>Момент сопротивления <math>W_x</math></p> $J_x \approx 0,044d^4;$ $W_x \approx 0,092d^3$                                           |
| 8              | <p>Круг со срезанными сегментами<br/>с четырех сторон</p>  | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $J_x = J_y = 0,038d^4;$ $W_x = W_y = 0,087d^3$                       |

Окончание табл. 3.5

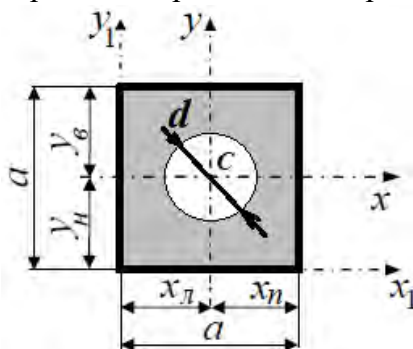
| Номер<br>схемы | Форма поперечного сечения                                                                                             | Геометрические характеристики<br>поперечного сечения                                                                                                                   |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 9              | Квадрат с центральным отверстием<br> | Моменты сопротивления $W_x$ и $W_y$<br>$J_x = J_y = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64};$ $W_x = W_y = \left( \frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) \frac{2}{a}$ |

Табл. 3.6. Исходные данные для анализа поперечного изгиба балки

| Номер<br>строки | Расчетная<br>схема балки<br>(см. табл. 3.4) | $l$ ,<br>м | $a$ ,<br>м | $b$ ,<br>м | $F$ ,<br>кН | $M$ ,<br>кН·м | $q$ ,<br>кН/м | Номер схемы поперечного<br>сечения по табл. 3.5<br>и его размеры            |
|-----------------|---------------------------------------------|------------|------------|------------|-------------|---------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1               | 2                                           | 3          | 4          | 5          | 6           | 7             | 8             | 9                                                                           |
| 0               | 0                                           | 3,0        | 2,0        | 1          | 3,9         | 5,9           | 1,1           | <b>№ 0</b><br>$h = 0,13$ м; $b = 0,08$ м; $d = 0,06$ м                      |
| 1               | 1                                           | 2,1        | 1,1        | 1          | 3           | 5,0           | 2             | <b>№ 1</b><br>$H = 0,1$ м; $B = 0,05$ м;<br>$h = 0,09$ м; $b = 0,02$ м      |
| 2               | 2                                           | 2,2        | 1,2        | 1          | 3,1         | 5,1           | 1,9           | <b>№ 2</b><br>$h = 0,12$ м; $B = 0,06$ м;<br>$d = 0,006$ м; $b = 0,01$ м    |
| 3               | 3                                           | 2,3        | 1,3        | 1          | 3,2         | 5,2           | 1,8           | <b>№ 3</b><br>$h = 0,11$ м; $b = 0,055$ м                                   |
| 4               | 4                                           | 2,4        | 1,4        | 1          | 3,3         | 5,3           | 1,7           | <b>№ 4</b><br>$h = 0,12$ м; $b = 0,06$ м;<br>$h_1 = 0,11$ м; $b_1 = 0,05$ м |
| 5               | 5                                           | 2,5        | 1,5        | 1          | 3,4         | 5,4           | 1,6           | <b>№ 5</b><br>$h = 0,13$ м; $b_n = 0,2$ м; $b_e = 0,1$ м                    |
| 6               | 6                                           | 2,6        | 1,6        | 1          | 3,5         | 5,5           | 1,5           | <b>№ 6</b><br>$h = 0,866d$ ; $d = 0,15$ м; $b = d/2$                        |
| 7               | 7                                           | 2,7        | 1,7        | 1          | 3,6         | 5,6           | 1,4           | <b>№ 7</b><br>$d = 0,12$ м                                                  |
| 8               | 8                                           | 2,8        | 1,8        | 1          | 3,7         | 5,7           | 1,3           | <b>№ 8</b><br>$d = 0,1299$ м; $h = 0,1$ м                                   |

Окончание табл. 3.6

| 1 | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        | 8        | 9                                                      |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------------------------------------------------|
| 9 | 9        | 2,9      | 1,9      | 1        | 3,8      | 5,8      | 1,2      | <b>№ 9</b><br>$a = 0,11 \text{ м}; d = 0,08 \text{ м}$ |
|   | <b>а</b> | <b>а</b> | <b>а</b> | <b>а</b> | <b>в</b> | <b>в</b> | <b>в</b> | <b>б</b>                                               |

### *Исходные данные*

В лабораторной работе по одной из схем нагружения и закрепления балок, приведенных в табл. 3.4, а также учитывая, что поперечное сечение имеет форму, представленную в табл. 3.5, необходимо выполнить сопоставительный анализ напряженно-деформированного состояния, используя оба подхода.

Исходные данные к проведению численного анализа взять из табл. 3.4–3.6 (по трем последним цифрам номера зачетной книжки).

Следует иметь в виду, что указанные в табл. 3.4 сведения о распределении эпюр изгибающих моментов, формулы для определения максимальных изгибающих моментов  $M_{\max}$  и максимальных прогибов  $w_{\max}$  приведены для проведения последующего сопоставительного анализа.

В табл. 3.5 присутствуют формулы для определения моментов сопротивления  $W_x$  и осевых моментов  $J_x$ , необходимых для проведения сопоставительного анализа при определении максимальных нормальных напряжений и максимальных прогибов балки (если эти сведения приведены в таблице для данного поперечного сечения). Во всех вариантах анализа предполагается, что для материала балки модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Исходные данные к анализу балки выбираются из табл. 3.6.

Кроме того, еще раз следует отметить, что для расчетных схем 1–5 (см. табл. 3.4) необходимо вычислить максимальные прогибы балки  $w_{\max}$ . Затем полученные данные сопоставить с результатами численного анализа, проведенного с использованием метода конечных элементов.

### *Пример выполнения лабораторной работы*

Рассмотрим пример проведения сопоставительного анализа балки, закрепленной и нагруженной, как показано на рис. 3.36.

Согласно данным, приведенным в табл. 3.4, максимальный изгибающий момент  $M_{\max}$  и максимальный прогиб в пролете  $w_{\max}$  будут соответственно равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \text{ при } z = 0,577l;$$

$$w_{\max} = -0,00652 \frac{ql^4}{EJ_x} \text{ при } z = 0,519l.$$

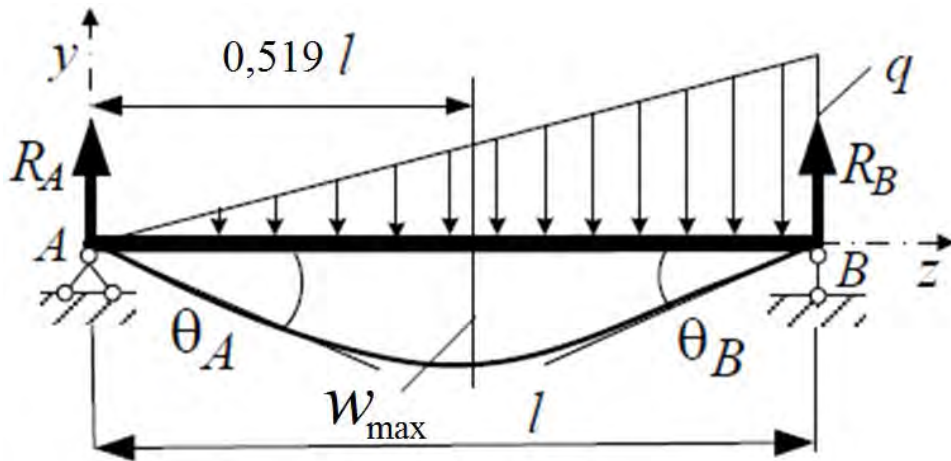


Рис. 3.36. Схема закрепления и нагружения балки

Поперечное сечение рассматриваемой балки представляет собой равнобедренную трапецию (см. табл. 3.5), изображенную на рис. 3.37.

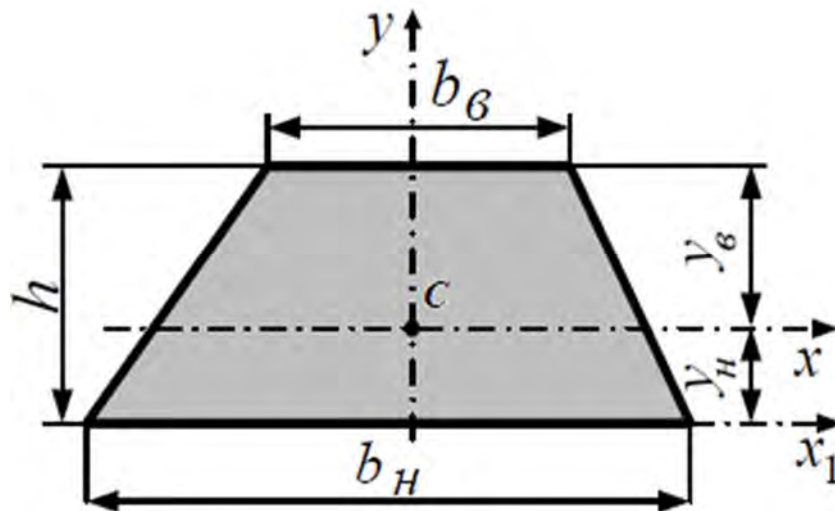


Рис. 3.37. Форма поперечного сечения рассматриваемой балки

Геометрические характеристики приведенного поперечного сечения могут быть определены с помощью следующих соотношений (см. табл. 3.5):

$$J_x = \frac{h^3 (b_H^2 + 4b_H b_\epsilon + b_\epsilon^2)}{36(b_\epsilon + b_H)};$$

$$W_{x,H} = \frac{J_x}{y_H}; \quad W_{x,\epsilon} = \frac{J_x}{y_\epsilon};$$

$$y_\epsilon = \frac{2b_H + b_\epsilon}{3(b_H + b_\epsilon)} h,$$

где  $W_{x,H}$ ,  $W_{x,\epsilon}$  – моменты сопротивления для нижних и верхних волокон балки соответственно;  $y_\epsilon$  – вертикальная координата центра тяжести поперечного сечения.

Кроме указанных сведений, необходимо еще учесть в соответствии с табл. 3.6 следующие данные:  $l = 2,4$  м,  $q = 1,2$  кН/м,  $h = 0,13$  м,  $b_H = 0,2$  м,  $b_\epsilon = 0,1$  м.

Первоначально создаем твердотельную модель рассматриваемого объекта (рис. 3.38).

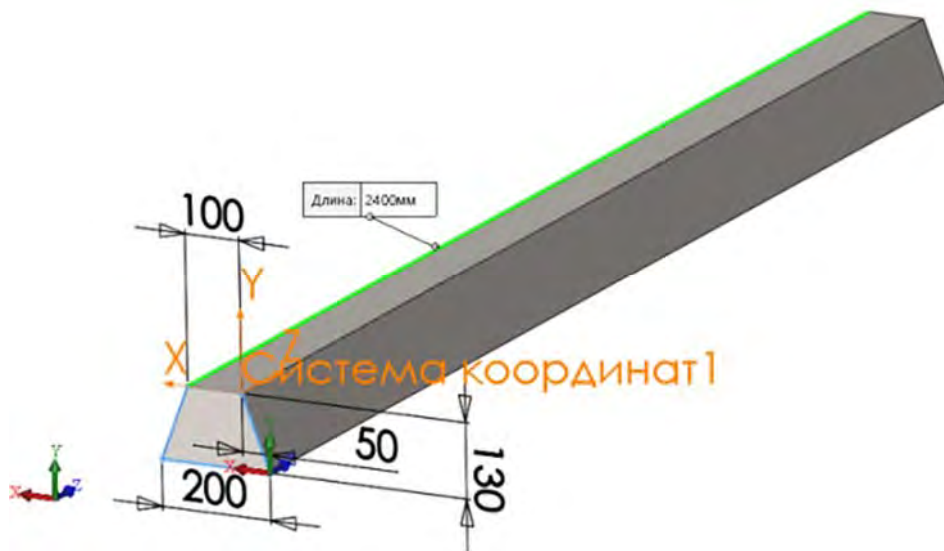


Рис. 3.38. Твердотельная модель рассматриваемой балки

На рис. 3.38, кроме габаритных размеров, еще показана дополнительная *Система координат 1*, созданная с использованием возможностей опции *Справочная геометрия*. Данная система координат в последующем понадобится для задания неравномерно распределенной по длине балки внешней нагрузки  $q$  (см. рис. 3.36).

Кроме приведенной информации о твердотельной модели, необходимо задать механические свойства материала данного изделия. В рассматриваемом примере выбрана простая углеродистая сталь, данные о механических характеристиках которой имеются в базе данных SolidWorks.

Следует иметь в виду, что в оболочке COSMOSWorks (Simulation) также присутствует возможность задания механических свойств материала, в том числе и уникальных, зависящих от различных параметров (например, температуры).

После создания твердотельной модели объекта активизируется оболочка Simulation, при этом следует выбрать *Статический анализ*.

Вслед за выполнением этой операции слева на экране под менеджером оболочки SolidWorks появляется менеджер проекта Simulation (рис. 3.39).

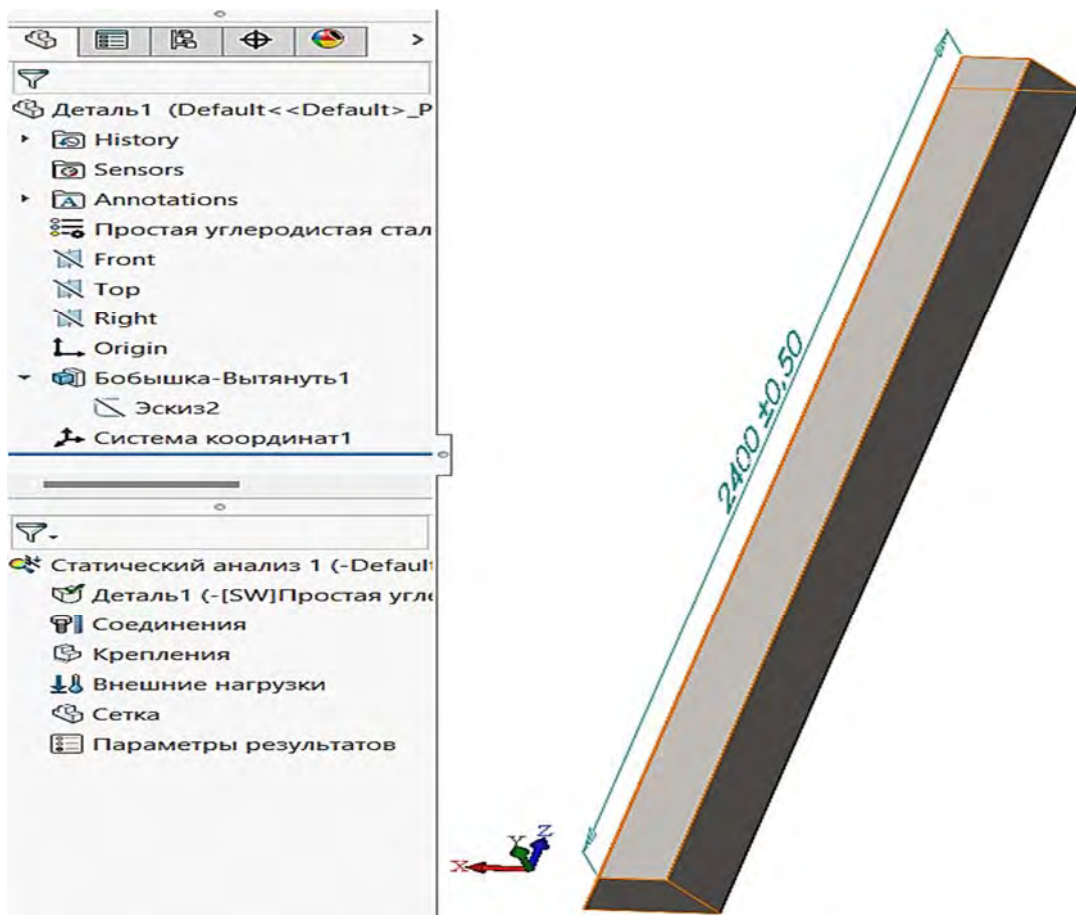


Рис. 3.39. Расположение менеджеров оболочки SolidWorks и Simulation

Менеджер Simulation представляет собой типичное для современных программных продуктов дерево, корень которого – это тип проводимого анализа, а ветви первого уровня – это блоки, обеспечивающие выполнение определенного типа действий (рис. 3.40). При щелчке правой кнопкой мыши по какому-либо элементу появляется контекстное меню, содержащее функции, доступные для работы с данным объектом.

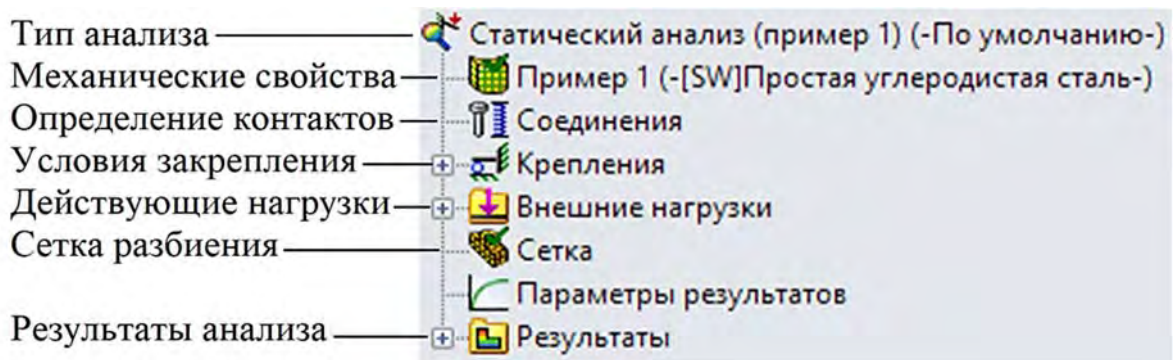


Рис. 3.40. Внешний вид менеджера Simulation для статического анализа

Ветви второго уровня растут, соответственно, из «корней» ветвей первого уровня (рис. 3.41).

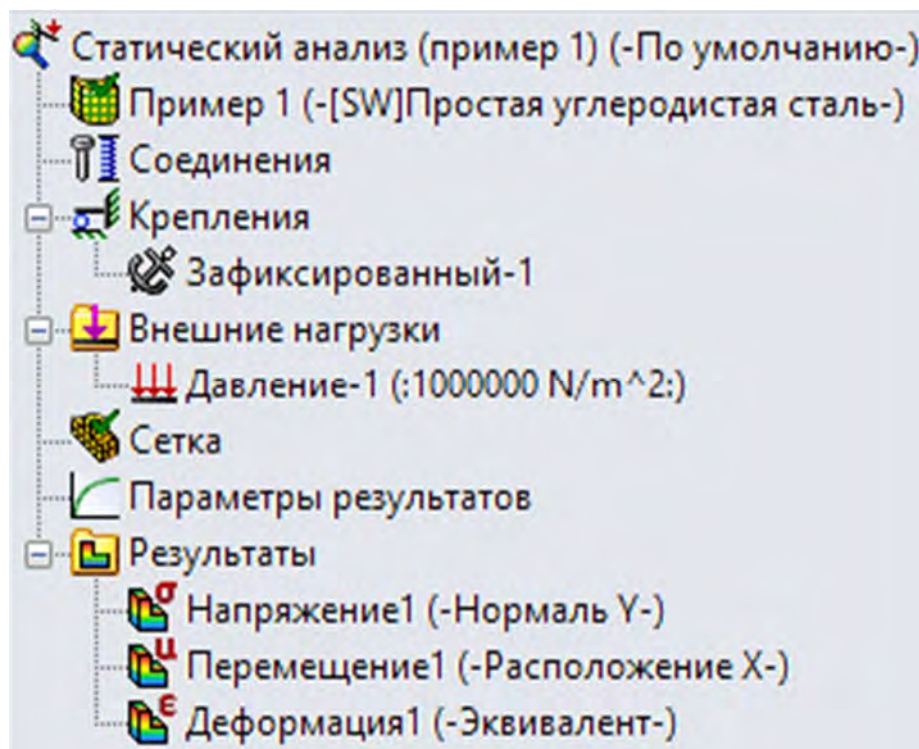


Рис. 3.41. Информация, содержащаяся в ветвях второго уровня

Как видно из рис. 3.41, на ветвях второго уровня представлены сведения о характере закрепления исследуемого изделия, приложенной к нему нагрузке, результатах проводимых исследований (напряжения, перемещения, деформации). Посредством щелчка правой кнопкой мыши по какому-либо элементу появляется контекстное меню, содержащее функции, представленные на рис. 3.42, позволяющие выполнять определенные операции над объектом коррекции.

Приведенные в контекстном меню термины (см. рис. 3.42) означают следующие действия:

- *Скрыть* – не отображать данную информацию на графическом представлении модели (в данном примере это место и характер закрепления);
- *Погасить* – не использовать эту информацию при расчете, но в памяти она сохраняется;
- *Редактировать определение* – осуществлять корректировку введенной ранее информации;
- *Удалить* – стереть представленную ранее информацию;
- *Добавить в библиотеку* – сохранить эту информацию в библиотеке примера;
- *Подробные сведения* – привести подробную информацию об используемых в примере условиях;
- *Копировать* – осуществлять копирование данной информации в буферную память с целью последующего использования в другом исследовании данного объекта.

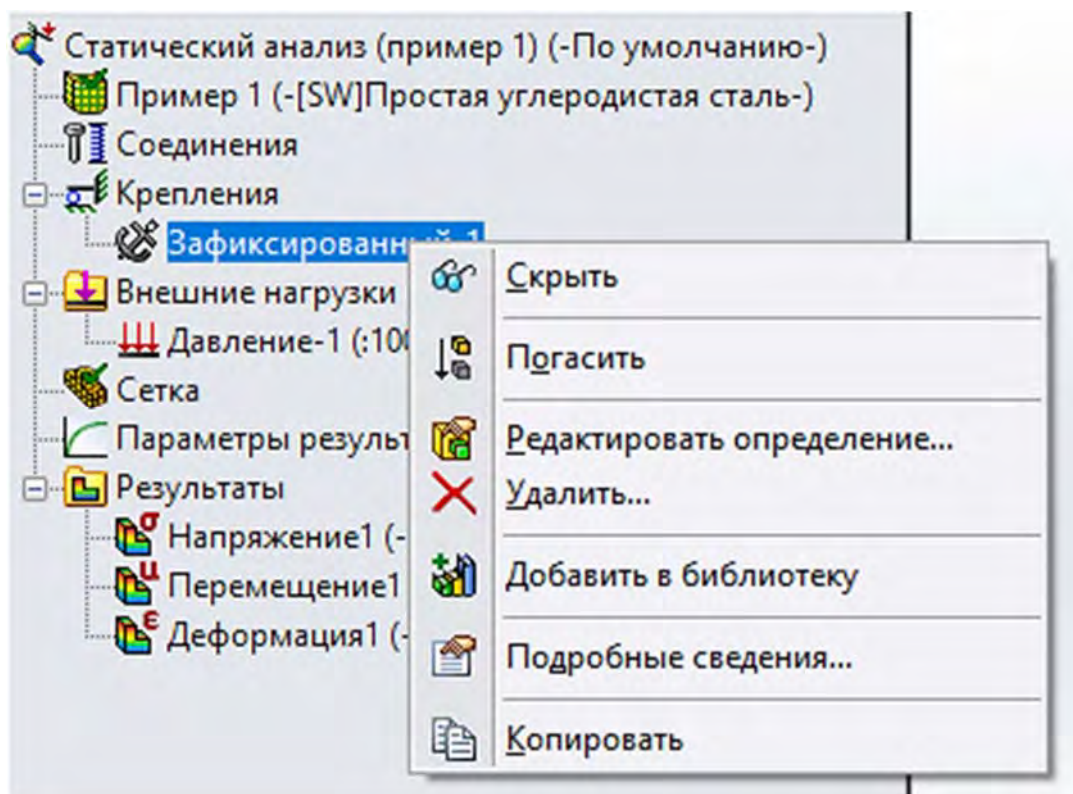


Рис. 3.42. Контекстное меню по корректировке введенных ранее исходных данных

Функция *Редактировать определение* позволяет произвести корректировку вводимой ранее информации об объекте исследования, щелкнув по этому элементу левой кнопкой мыши. В результате предоставляется возможность увидеть существующую информацию и возможные варианты изменений (рис. 3.43).

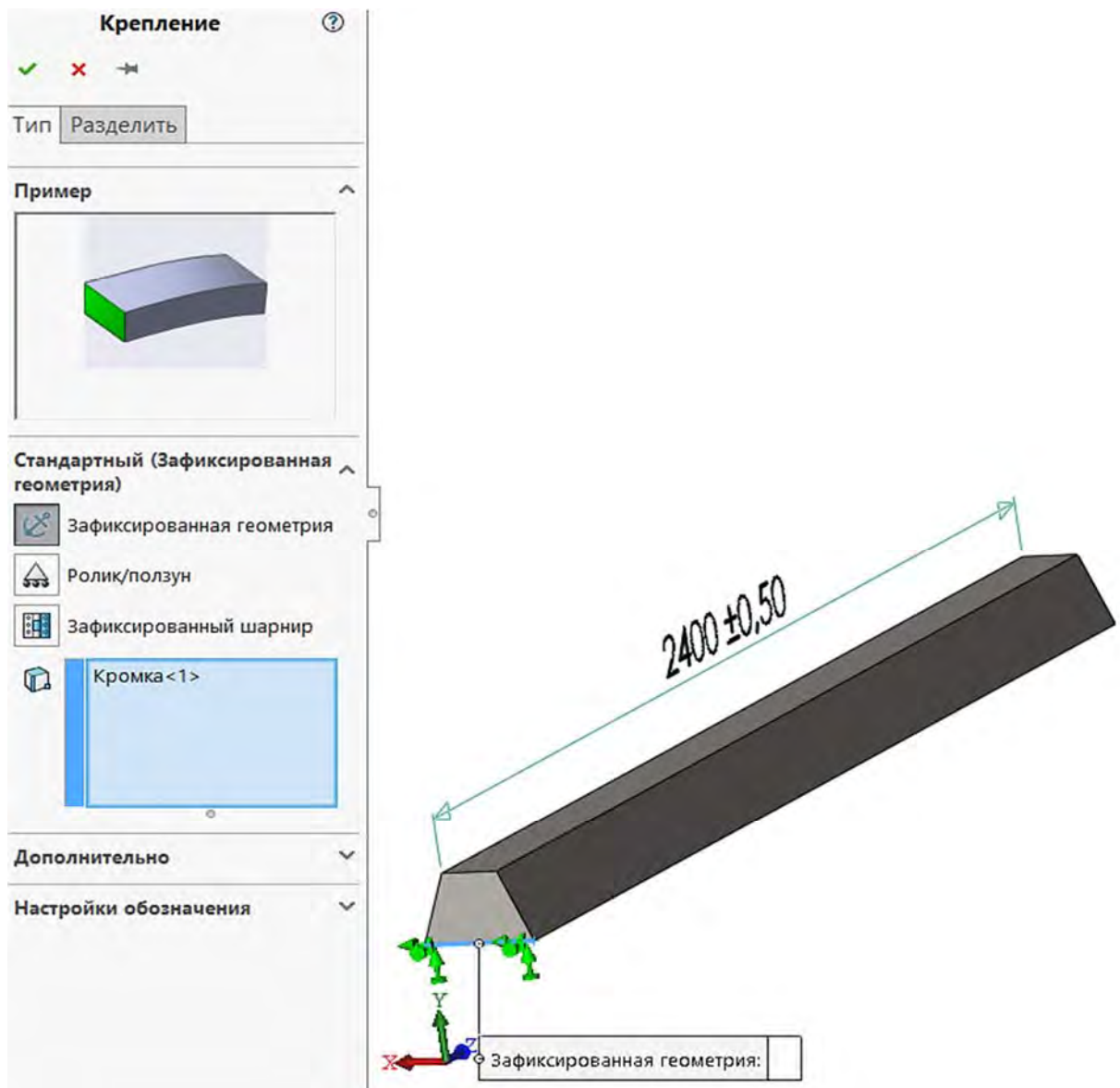


Рис. 3.43. Редактирование определения (условий закрепления) в рассматриваемом примере исследований

Поскольку в рассматриваемом примере имеет место неравномерно распределенная по длине нагрузка (см. рис. 3.36), остановимся более подробно на внесении такого типа исходных данных. Так как указанная нагрузка имеет треугольный вид (см. рис. 3.36), равнодействующая всех сил от нее будет равна

$$R = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{1200 \cdot 2,4}{2} = 1440 \text{ Н.}$$

Затем эту равнодействующую сил необходимо распределить по верхней грани в соответствии с заданным треугольным законом. Поэтому в опции *Внешние нагрузки* выбираем *Силу*, для которой устанавливаем закон

распределения по верхней грани (рис. 3.44). Для этого активизируем опцию *Неравномерное распределение* и в ней указываем систему координат, в соответствии с которой определяется закон распределения нагрузки (см. рис. 3.44).

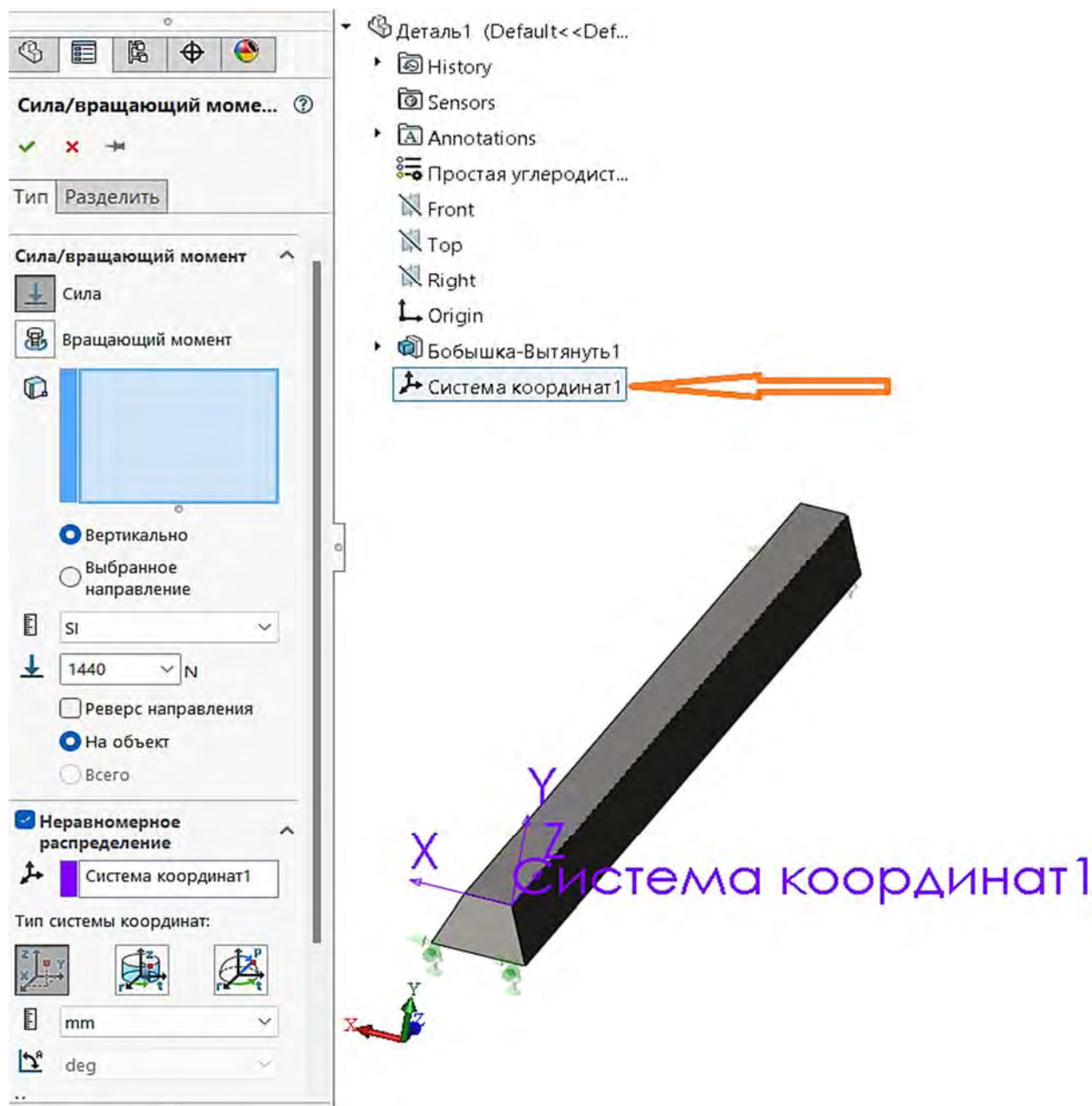


Рис. 3.44. Процесс распределения равнодействующей по верхней грани балки

Далее, посредством активации опции *Редактировать уравнение* (рис. 3.45) непосредственно устанавливается закон распределения нагрузки по верхней грани. Как видно (см. рис. 3.45), в результате выполнения этой операции был задан закон распределения нагрузки по верхней грани, в соответствии с которым нагрузка изменяется вдоль координаты  $z$  по линейному закону.

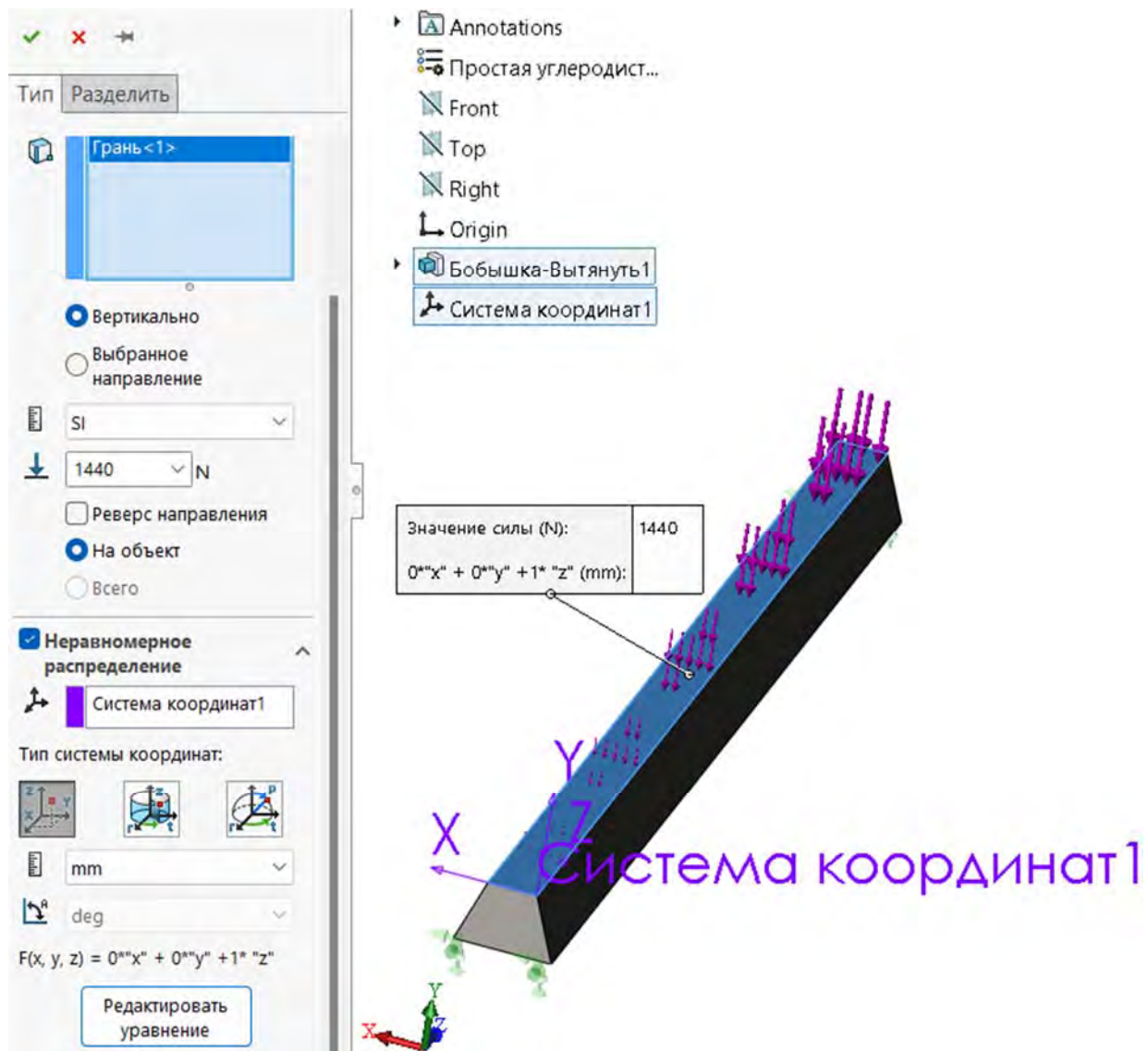


Рис. 3.45. Закон распределения усилия по верхней грани

Следующий этап создания конечно-элементной модели состоит в построении сетки элементов. Его можно выполнить, как и в предыдущей лабораторной работе, *по умолчанию*. В результате выполнения всех этих операций конечно-элементная модель исследуемого объекта выглядит так, как это показано на рис. 3.46.

После введения всей информации о конечно-элементной модели исследуемого объекта можно перейти непосредственно к расчетной части анализа, когда формируются матрицы жесткости всех конечных элементов, входящих в модель, объединенная матрица жесткости всей системы в целом и производится решение системы линейных алгебраических уравнений с определением вектор-столбца перемещений всех узловых точек модели.

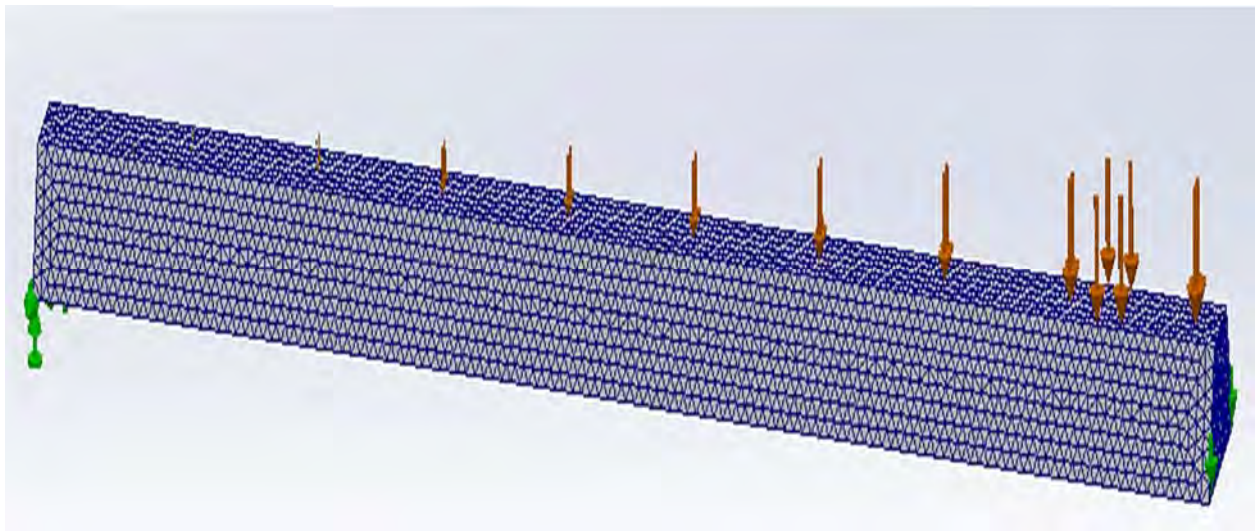


Рис. 3.46. Конечно-элементная модель поперечного изгиба балки

Настройка параметров расчетной части исследования осуществляется посредством щелчка правой клавишей мыши по корню дерева менеджера Simulation в том месте, где обозначается тип анализа. В результате высвечивается контекстное меню, представленное на рис. 3.47.

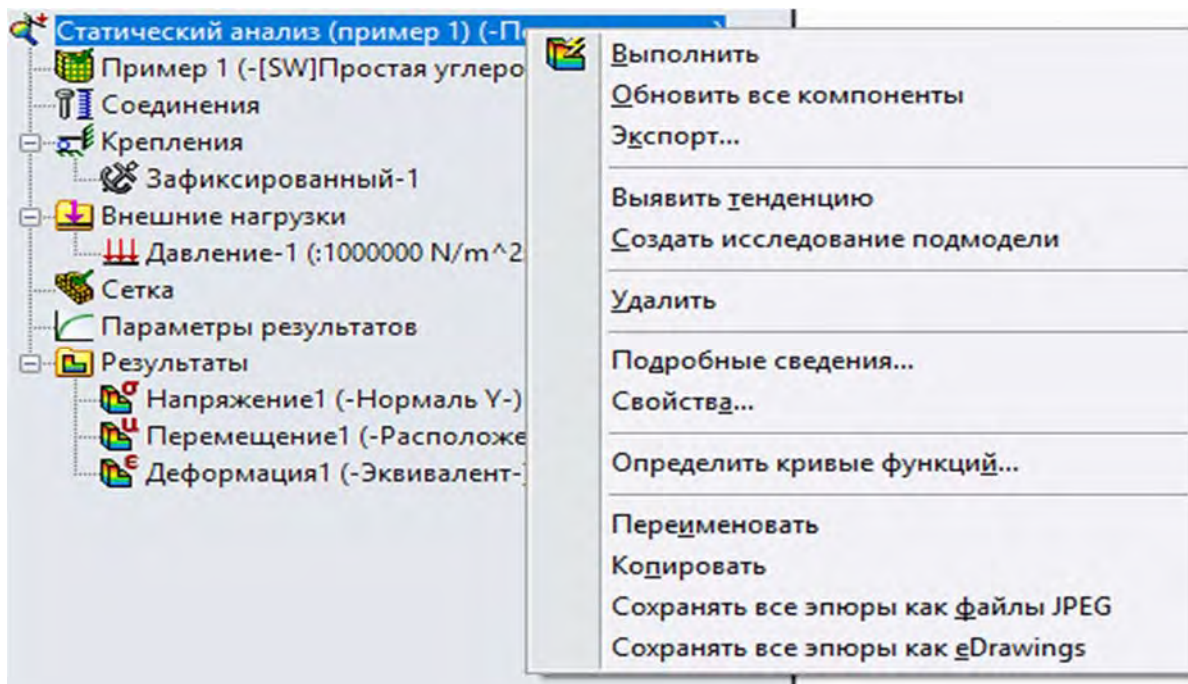


Рис. 3.47. Контекстное меню проводимого анализа

Посредством щелчка левой клавишей мыши по пункту контекстного меню *Выполнить* (см. рис. 3.47) происходит запуск программы расчета задачи с параметрами *по умолчанию*. Если есть необходимость произвести коррекцию параметров расчета, то в этом случае нажатие левой клавишей

мыши по разделу *Свойства* приведет к появлению нового меню, отображенного на рис. 3.48.

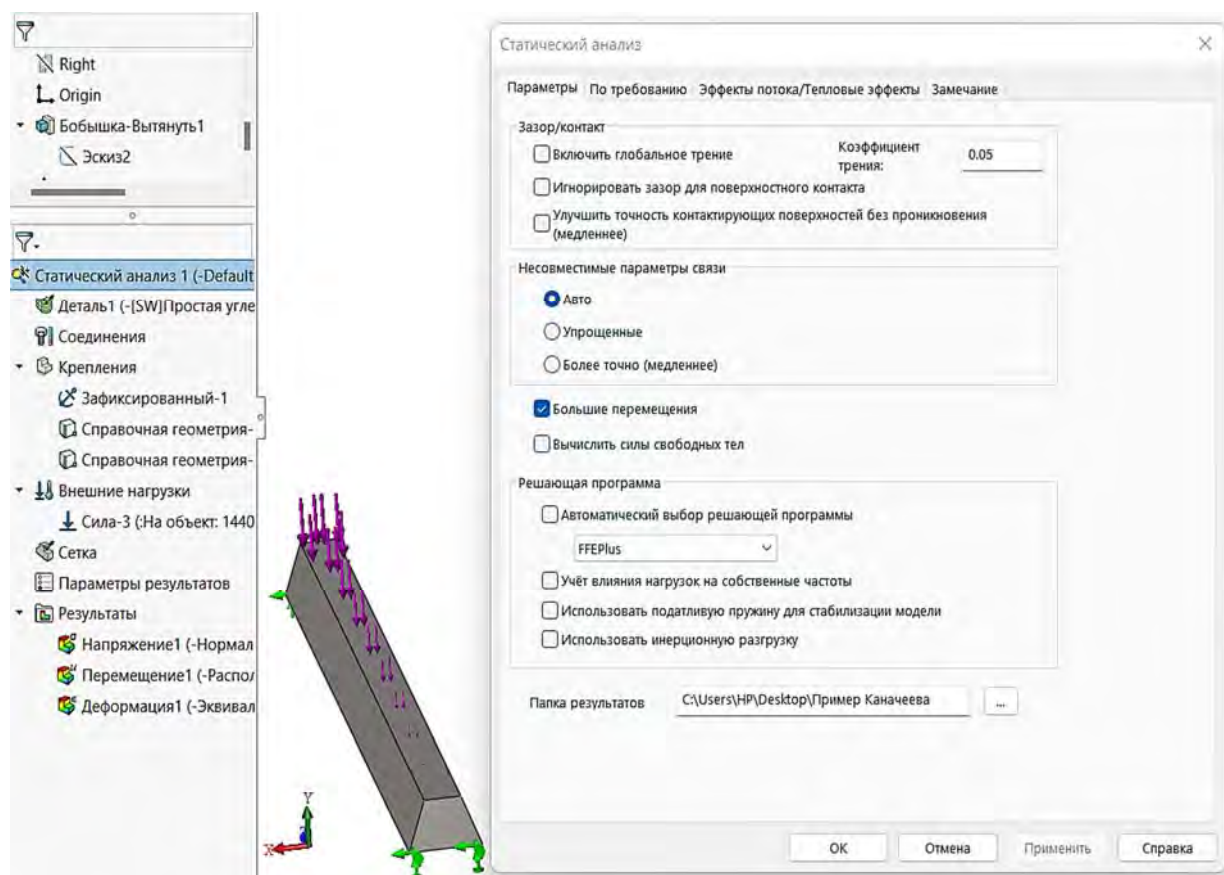


Рис. 3.48. Меню параметров статического анализа

В табл. 3.7 приведена справка по диалоговому окну свойств *Статический анализ*.

Табл. 3.7. Функциональные возможности опций окна свойств вычислительного процесса *Статический анализ*

| Действие                   | Назначение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Зазор/контакт</i>       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Включить глобальное трение | Позволяет включить или пренебречь влиянием трения условий глобального контакта. Настоящий флажок не управляет условиями локального контакта. Программное обеспечение рассчитывает силы статического трения путем умножения сил по нормали, образующихся на контактирующих площадях, на заданный коэффициент трения. Направление силы трения в местоположении противоположно направлению движения в этом местоположении |

Продолжение табл. 3.7

| Действие                                                                    | Назначение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Коэффициент трения                                                          | Устанавливается коэффициент статического трения для условий глобального контакта. Для условий локального контакта коэффициент трения задан в PropertyManager <i>Набор контактов</i> для каждого условия. Коэффициент трения должен быть между 0 и 1,0                                                                                                                                                                                                                |
| Игнорировать зазор для поверхностного контакта                              | Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа учитывает по умолчанию условия контакта вне зависимости от начального расстояния между определенной пользователем пары поверхностей                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Улучшить точность контактирующих поверхностей без проникновения (медленнее) | Настоящий метод дает непрерывные и более точные напряжения в областях контактов без проникновения. Этот метод используется при определении контактов между гранями и гранями или гранями и кромками. Он также гарантирует сходимость при использовании <i>h</i> -адаптивного метода. Когда выбран настоящий параметр, программному обеспечению может потребоваться больше времени для решения задачи. Настоящий метод в литературе называется «строительный контакт» |
| <i>Несовместимые параметры связи</i>                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Авто                                                                        | Если связанный контакт поверхности к поверхности по умолчанию значительно снижает производительность решения, решающая программа переключается на связанный контакт узла к поверхности автоматически. Автоматическое переключение доступно для статических, частотных, линейных динамических исследований и исследований потери устойчивости                                                                                                                         |
| Упрощенные                                                                  | Программа корректирует контакт связи поверхностей по умолчанию и переходит к контакту связи узлов. Выберите этот параметр только в случаях возникновения проблем с быстродействием при решении моделей с большим количеством контактирующих поверхностей. Если для анализа 2D-упрощения выбран этот параметр, программа применяет контакт связи узлов к кромке                                                                                                       |
| Более точно (медленнее)                                                     | Постановка задачи для поверхностного контакта по умолчанию занимает намного больше времени, чем постановка задачи для контакта узлов. Для анализа 2D-упрощения решающая программа применяет контакт связи кромок                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <i>Дополнительные параметры</i>                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Большие перемещения                                                         | Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа прикладывает нагрузки постепенно, равномерно и ступенчато до их полных значений, выполняя итерации контакта на каждом шаге. Количество шагов определяется программой внутренне. Этот параметр не доступен для исследований 2D-упрощения                                                                                                                                                                    |

Продолжение табл. 3.7

| Действие                                                                                                                                                                                  | Назначение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Вычислить силы свободных тел                                                                                                                                                              | Выберите этот флажок, чтобы инструктировать прикладную программу о подготовке масштабной сетки равновесия сил в каждом узле. После запуска исследования с этим установленным флажком нажмите правой кнопкой мыши папку <i>Результаты</i> и выберите <i>Вывести силы реакции</i> , чтобы вывести список сил, которые действуют на грани, кромки и вершины. Силы могут исходить от контакта, внешних нагрузок, ограничений или соединителей. Этот параметр не доступен для исследований 2D-упрощения |
| <p style="text-align: center;"><i>Решающая программа</i></p> <p style="text-align: center;">Позволяет задать решающую программу для использования при выполнении статического анализа</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Автоматический                                                                                                                                                                            | Программное обеспечение выбирает решающую программу на основе типа исследования, параметров анализа, условий контакта и т. п. Некоторые параметры и условия применимы только либо для Direct Sparse, либо для FFEPlus                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Direct Sparse                                                                                                                                                                             | Установите флажок этого параметра для использования решающей программы Direct Sparse                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| FFEPlus                                                                                                                                                                                   | Используйте решающую программу FFEPlus, чтобы запустить исследование. Настоящая решающая программа использует усовершенствованное переупорядочение матрицы, что делает ее более эффективной для больших задач                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Large Problem Direct Sparse                                                                                                                                                               | Использование улучшенных алгоритмов распределения памяти помогает решающей программе Large Problem Direct Sparse в обработке проблем моделирования, сложность которых превышает возможности физической памяти вашего компьютера. При первоначальном выборе решающей программы Direct Sparse и в связи с ограниченными ресурсами памяти при отыскании решения, отличного от базового, отображается предупреждение о необходимости переключения на Large Problem Direct Sparse                       |
| Учет влияния нагрузок на собственные частоты                                                                                                                                              | Включите этот параметр, чтобы учитывать влияние нагрузки в своей плоскости при расчете жесткости                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Использовать незакаленную пружину для стабилизации модели                                                                                                                                 | Установите флажок у этого параметра. Чтобы инструктировать программу, необходимо добавить мягкие пружины, прикрепленные к основанию для предотвращения неустойчивости. Если приложить нагрузки к неустойчивой конструкции, она будет перемещаться и/или вращаться как твердое тело. Вы должны применить соответствующие ограничения, чтобы предотвратить движение твердого тела                                                                                                                    |

Окончание табл. 3.7

| Действие                           | Назначение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Использовать инерционную разгрузку | Когда у настоящего параметра установлен флажок, программа автоматически прикладывает инерционные силы, чтобы уравновесить несбалансированную внешнюю нагрузку. Настоящий параметр является в особенности полезным, когда вы импортируете нагрузки из пакета движения (SolidWorks Motion), где внешние нагрузки могут быть немного не сбалансированы. Когда у настоящего параметра установлен флажок, можно решать структурные задачи без необходимости применять ограничения или активизировать параметр <i>мягкая пружина</i> , чтобы стабилизировать модель от перемещений твердого тела |

В постпроцессорной части проводимого численного анализа методом конечных элементов были определены картины распределения напряжений, перемещений и деформаций. На рис. 3.49–3.51 приведено распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки  $\sigma_z$ , перемещений балки в вертикальном направлении  $UY$  и относительные линейные деформации  $\epsilon_z$  в направлении, перпендикулярном поперечному сечению.

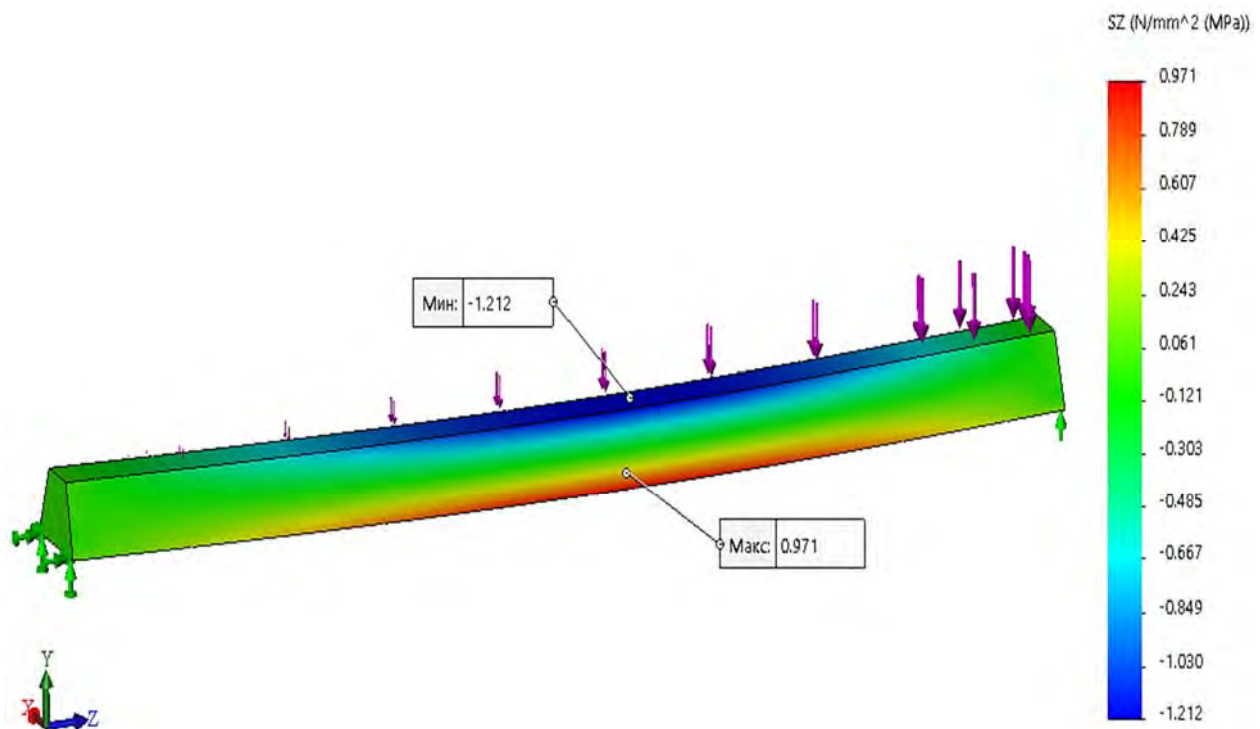


Рис. 3.49. Распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

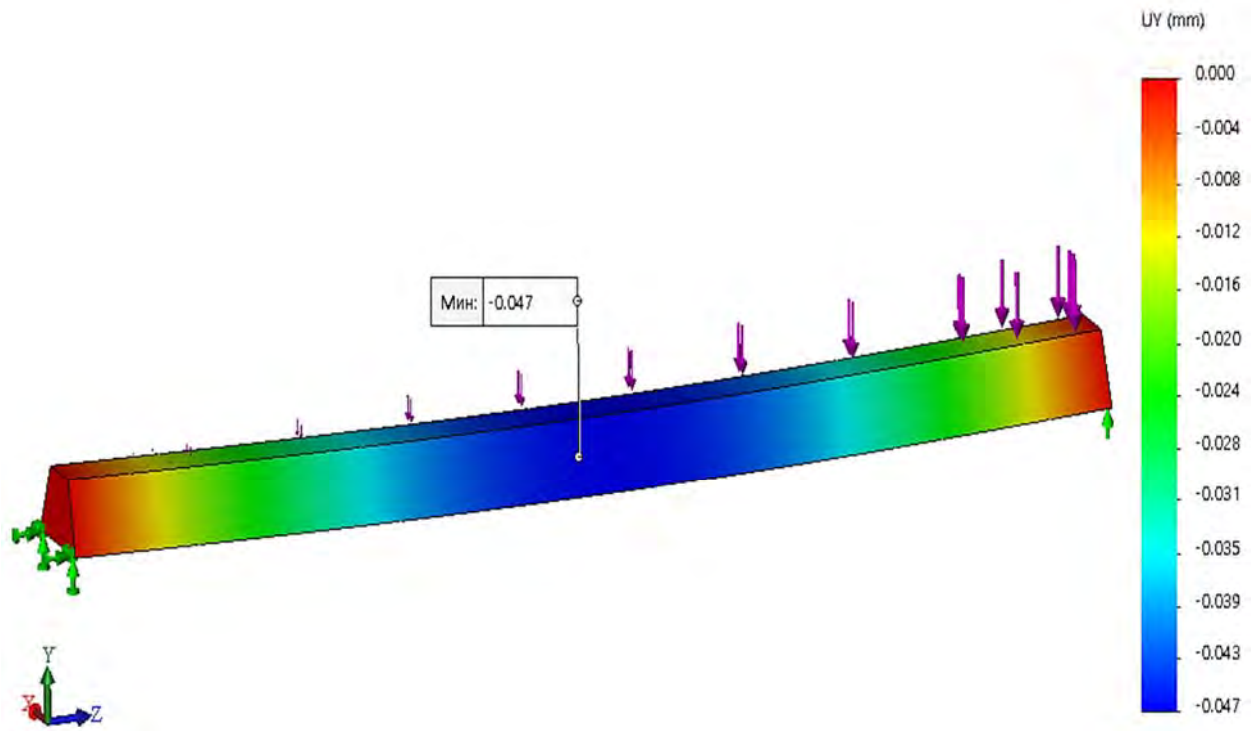


Рис. 3.50. Перемещения точек поверхности балки в вертикальном направлении

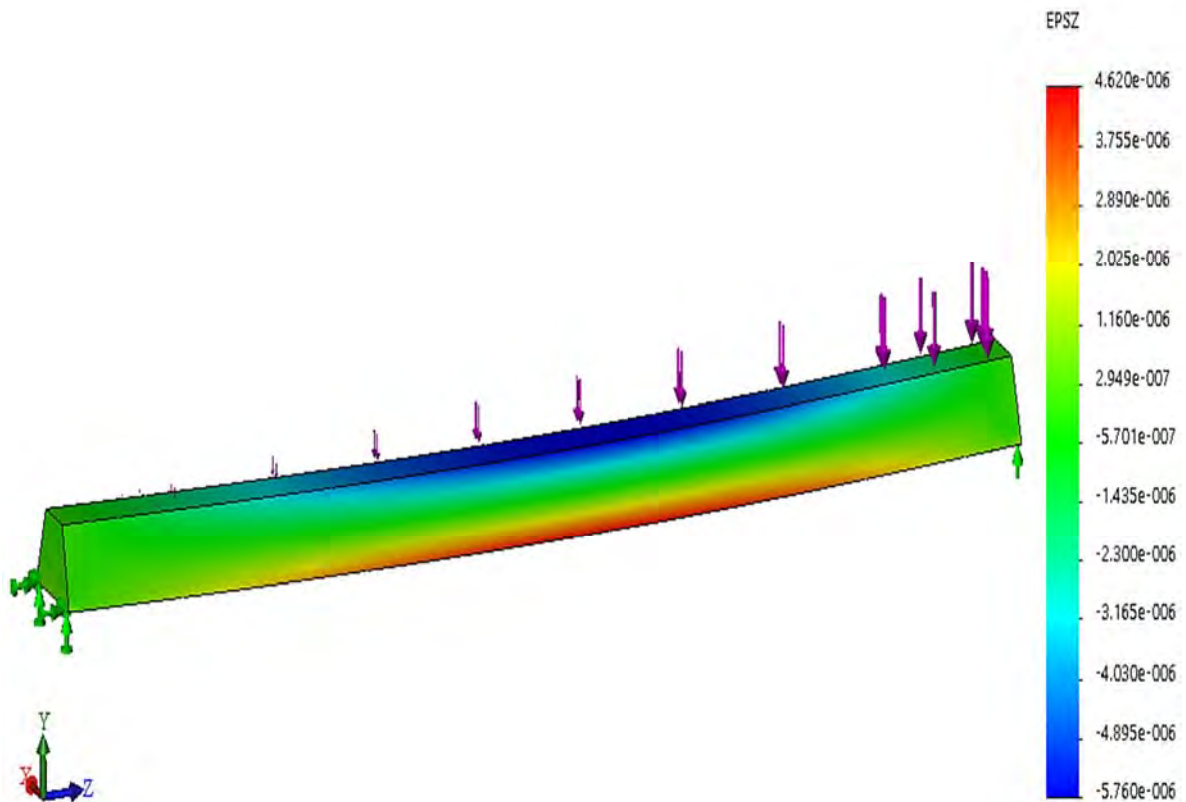


Рис. 3.51. Распределение относительных линейных деформаций  $\varepsilon_z$  в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

Следует отметить, что при подготовке картины распределения соответствующего параметра по поверхности разработанной модели SolidWorks Simulation предоставляет большие возможности в формировании и виде выводимой информации. Для этого необходимо правой клавишей мыши щелкнуть по пункту меню, в котором указан физический параметр, выводимый в качестве рисунка. В результате высветится еще одно меню, разделами которого являются пункты предлагаемого редактирования (рис. 3.52).

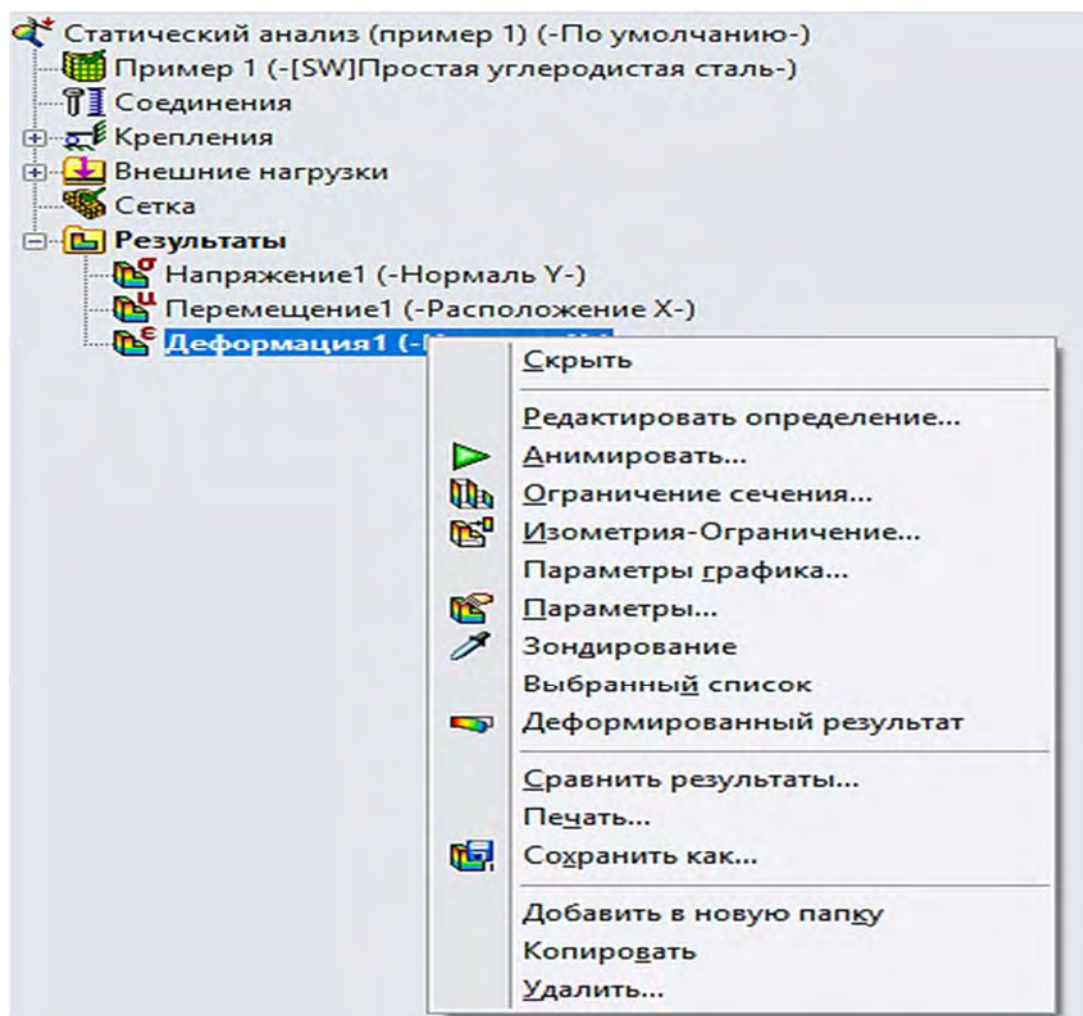


Рис. 3.52. Пункты возможного редактирования выводимой графической информации о результатах анализа

Для проверки адекватности созданной конечно-элементной модели балки и, следовательно, верности полученных результатов наряду с указанными расчетами производился анализ с использованием подходов курса «Механика материалов». Согласно выкладкам этого курса, а также исходным данным рассматриваемого примера максимальный изгибающий момент, возникающий в поперечном сечении балки (см. табл. 3.4), будет равен

$$M_{\max} = 0,064ql^2 = 0,064 \cdot 1200 \cdot 2,4^2 = 442,368 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Геометрические характеристики поперечного сечения будут соответственно равны (см. табл. 3.5)

$$J_x = \frac{h^3(b_H^2 + 4b_H b_\epsilon + b_\epsilon^2)}{36(b_\epsilon + b_H)} = \frac{0,13^3(0,2^2 + 4 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,1^2)}{36(0,2 + 0,1)} = 2,645 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$y_\epsilon = \frac{2b_H + b_\epsilon}{3(b_H + b_\epsilon)} h = \frac{2 \cdot 0,2 + 0,1}{3(0,2 + 0,1)} = 0,072 \text{ м};$$

$$W_{x,\epsilon} = \frac{J_x}{y_\epsilon} = \frac{2,645 \cdot 10^{-5}}{0,072} = 0,366 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

В результате максимальные (по абсолютной величине) нормальные напряжения, возникающие в рассматриваемой балке, под действием заданной нагрузки будут равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{442,368}{0,366 \cdot 10^{-3}} = 1,208 \text{ МПа}.$$

Как видно из рис. 3.49, максимальные нормальные напряжения, полученные посредством использования метода конечных элементов, равны  $\sigma_{\max} = 1,213 \text{ МПа}$ , что отличается от значений, полученных подходом курса «Механика материалов», на 0,412 %.

В соответствии с данными табл. 3.4 и соответствующими расчетами максимальный прогиб имеет следующее значение:

$$w_{\max} = -0,00652 \frac{ql^4}{EJ_x} = -0,00652 \frac{1200 \cdot 2,4^4}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,645 \cdot 10^{-5}} = -0,047 \text{ мм}.$$

Сопоставление этой величины прогиба с данными, приведенными на рис. 3.50, говорит о практически полном совпадении результатов.

Таким образом, можно констатировать, что разработанная конечно-элементная модель адекватна реальному состоянию балки.

### ***Контрольные вопросы***

1. В чем заключается цель лабораторной работы?
2. Какой случай нагружения балки называется плоским поперечным изгибом?
3. С помощью какого выражения определяются максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении балки при плоском поперечном изгибе?
4. Какие исходные данные необходимы для проведения анализа напряженно-деформированного состояния балки?
5. Укрупненно, какие этапы должен содержать анализ напряженно-деформированного состояния балки в SolidWorks Simulation?
6. Для чего используется дополнительная система координат в примере лабораторной работы?
7. Какие составляющие содержит менеджер Simulation для статического анализа? Их функциональное назначение.
8. Поясните понятия «корень дерева», «ветви первого уровня», «ветви второго уровня», применяемые для менеджера Simulation.
9. В каком месте менеджера Simulation располагается опция *Редактировать определение ...?*
10. Укрупненно, каким образом задается информация в Simulation о неравномерно распределенной внешней нагрузке?
11. Какие опции содержит диалоговое окно свойств *Статический анализ*?
12. Приведите возможные причины несовпадения результатов численного анализа с использованием SolidWorks Simulation и данных, полученных посредством применения подходов курса «Механика материалов».

### 3.3. Лабораторная работа № 3. Сопоставительный анализ стойки на устойчивость

**Цель работы:** разработать конечно-элементную модель анализа стойки на устойчивость и в последующем сопоставить полученные результаты с данными, определенными посредством использования подходов курса «Механика материалов».

#### *Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы*

Под термином «устойчивость» [12–14] подразумевается способность системы находиться в состоянии устойчивого равновесия при возникновении в ее фрагментах сжимающих напряжений. К отмеченной формулировке следует добавить, что состояние объекта называется устойчивым, если малые возмущения вызовут малые отклонения системы от расчетного состояния (невозмущенного состояния). Наоборот, если при малых возмущениях возникнут большие отклонения системы от расчетного состояния, то последнее является неустойчивым. На рис. 3.53 проиллюстрированы три возможных состояния системы в зависимости от величины сжимающей нагрузки – устойчивое (см. рис. 3.53, а), безразличное равновесие (см. рис. 3.53, б) и неустойчивое (см. рис. 3.53, в).

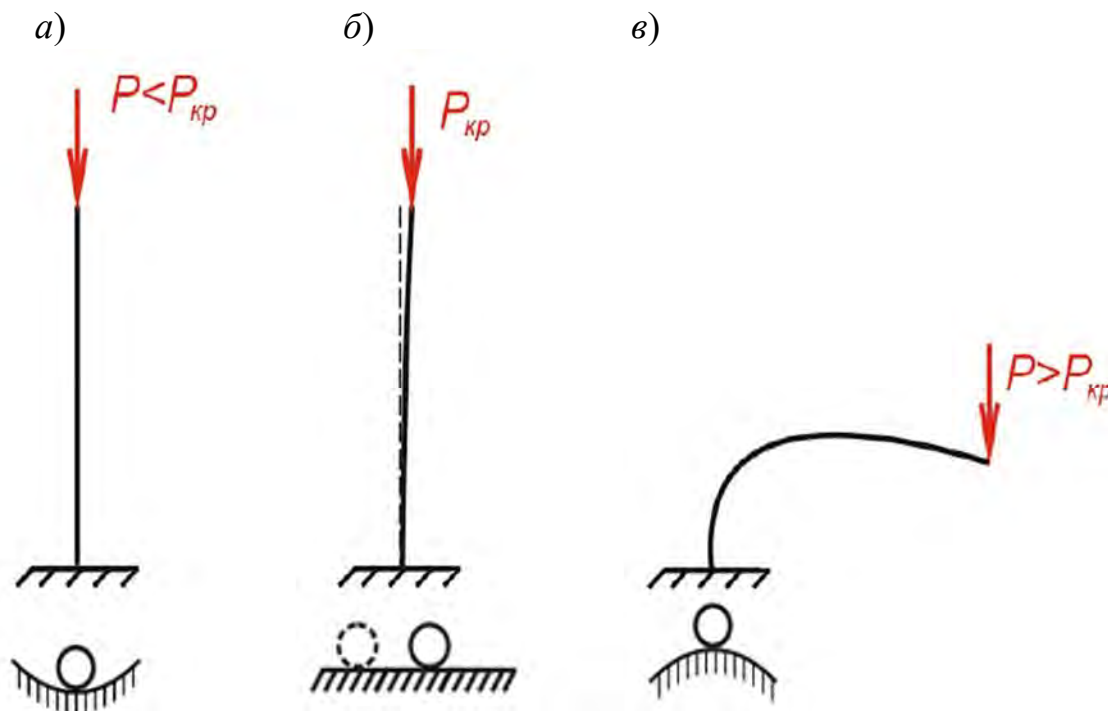


Рис. 3.53. Состояния системы в зависимости от величины сжимающей нагрузки

Величина нагрузки, начиная с которой состояние анализируемого объекта становится неустойчивым, называется критической  $P_{кр}$ .

Явление потери устойчивости свойственно фрагментам конструкций, у которых один либо два габаритных размера существенно меньше третьего. К таким объектам относятся, например: пластинки, оболочки, стойки, раскосы ферм и т. д.

Форма, которую принимает объект при потере устойчивости, называется формой потери устойчивости, а само появление новых смежных равновесных форм называется бифуркацией.

Наряду с понятием «критическая нагрузка»  $P_{кр}$  в механике твердого деформируемого тела используется понятие «критические напряжения»  $\sigma_{кр}$ , которые определяются из соотношения

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стойки.

При критическом напряжении  $\sigma_{кр}$ , меньшем чем предел пропорциональности  $\sigma_{пл}$  материала стойки, критическая сила  $P_{кр}$  может быть вычислена по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

где  $E$  – модуль Юнга (модуль упругости 1-го рода);  $l$  – длина стойки;  $I_{\min}$  – минимальный осевой момент инерции стойки;  $\mu$  – коэффициент, учитывающий условия закрепления стойки (табл. 3.8).

В том случае, когда критическое напряжение превышает предел пропорциональности, критическую силу определяют с помощью формулы Ясинского:

$$P_{кр} = A(a - b \cdot \lambda_{\max}),$$

где  $a, b$  – параметры, зависящие от механических свойств материала стойки;  $\lambda_{\max}$  – гибкость стержня.

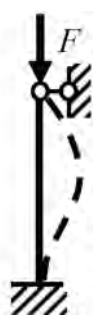
В свою очередь, гибкость стержня  $\lambda_{\max}$  определяется посредством использования соотношения

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}},$$

а радиус инерции поперечного сечения  $i_{\min}$  – с помощью выражения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Табл. 3.8. Значения коэффициента, учитывающего условия закрепления стойки, и критической силы

|                                            |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Схема стержней и форма потери устойчивости |  |  |  |  |
| Коэффициент $\mu$                          | 1                                                                                 | 2                                                                                 | 0,7                                                                                | 0,5                                                                                 |
| Критическая сила $P_{кр}$                  | $P_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{l^2}$                                     | $P_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{4l^2}$                                    | $P_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{0,49l^2}$                                  | $P_{кр} = \frac{4\pi^2 E \cdot I_{\min}}{l^2}$                                      |

Для стоек, изготовленных из малоуглеродистой стали, коэффициенты формулы Ясинского принимают следующие значения:  $a = 310$  МПа;  $b = 1,14$  МПа.

Таким образом, окончательно критические напряжения для стойки из стали определяются в соответствии с графиком, представленным на рис. 3.54. На графике  $\sigma_T$  – предел текучести материала стойки.

Исходя из сказанного, при определении критической нагрузки следует придерживаться следующего алгоритма действий.

1. Определяется максимальная гибкость анализируемой стойки  $\lambda_{\max}$ .
2. Устанавливается, какому интервалу графика (см. рис. 3.54) принадлежит гибкость стойки и по соответствующему выражению вычисляется критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ .
3. В заключение, зная критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ , определяется значение критической силы  $P_{кр} = A \cdot \sigma_{кр}$ .

Установив значение критической нагрузки, можно в последующем определить величину коэффициента запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_{зАд}},$$

где  $P_{зАд}$  – приложенная к стойке нагрузка.

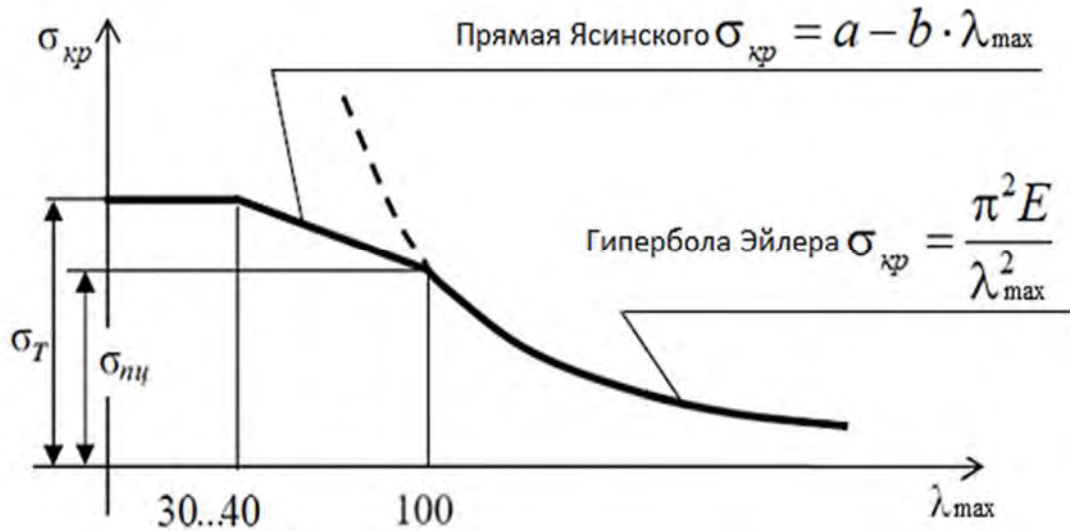


Рис. 3.54. График критических напряжений

### ***Исходные данные***

В лабораторной работе требуется определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$  для стойки, закрепленной и нагруженной, как показано на рис. 3.55.

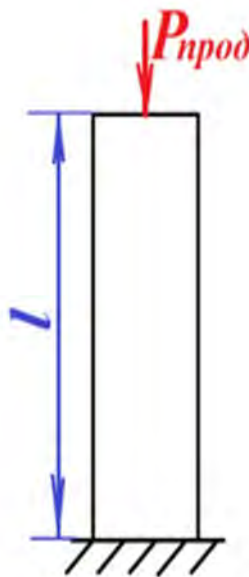


Рис. 3.55. Расчетная схема для определения критической силы и коэффициента запаса устойчивости  $n_y$  центрально-сжатой стойки

Длину стойки  $l$ , величину заданной нагрузки  $P_{ЗД}$ , схему поперечного сечения и его размеры необходимо выбрать из табл. 3.5 и 3.9 (по трем последним цифрам номера зачетной книжки).

Табл. 3.9. Исходные данные для анализа устойчивости стойки

| Номер строки | Сжимающая нагрузка $P_{ЗД}$ , Н | $l$ , м  | Номер схемы поперечного сечения по табл. 3.5 и его размеры               |
|--------------|---------------------------------|----------|--------------------------------------------------------------------------|
| 0            | 190000                          | 3,0      | <b>№ 0</b><br>$h = 0,13$ м; $b = 0,08$ м; $d = 0,06$ м                   |
| 1            | 100000                          | 2,1      | <b>№ 1</b><br>$H = 0,1$ м; $B = 0,05$ м; $h = 0,09$ м; $b = 0,02$ м      |
| 2            | 110000                          | 2,2      | <b>№ 2</b><br>$h = 0,12$ м; $B = 0,06$ м; $d = 0,006$ м; $b = 0,01$ м    |
| 3            | 120000                          | 2,3      | <b>№ 3</b><br>$h = 0,11$ м; $b = 0,055$ м                                |
| 4            | 130000                          | 2,4      | <b>№ 4</b><br>$h = 0,12$ м; $b = 0,06$ м; $h_1 = 0,11$ м; $b_1 = 0,05$ м |
| 5            | 140000                          | 2,5      | <b>№ 5</b><br>$h = 0,13$ м; $b_H = 0,2$ м; $b_e = 0,1$ м                 |
| 6            | 150000                          | 2,6      | <b>№ 6</b><br>$h = 0,12$ м; $d = 0,15$ м; $b = d/2$                      |
| 7            | 160000                          | 2,7      | <b>№ 7</b><br>$d = 0,12$ м                                               |
| 8            | 170000                          | 2,8      | <b>№ 8</b><br>$d = 0,12$ м; $h = 0,1$ м                                  |
| 9            | 180000                          | 2,9      | <b>№ 9</b><br>$a = 0,11$ м; $d = 0,08$ м                                 |
|              | <b>б</b>                        | <b>в</b> | <b>а</b>                                                                 |

**Примечание.** В табл. 3.9, в отличие от табл. 3.6, изменены формы поперечных сечений.

### ***Пример выполнения лабораторной работы***

Рассмотрим пример анализа стойки длиной  $l = 2,9$  м на устойчивость с поперечным сечением в виде полого прямоугольника, изображенного на рис. 3.56, и нагруженной продольной силой  $P_{ЗД} = 140000$  Н.

Данное поперечное сечение (см. рис. 3.56) имеет следующие размеры:  $h = 120$  мм,  $b = 60$  мм,  $h_1 = 110$  мм,  $b_1 = 50$  мм.

Используя приведенные исходные данные, разработана твердотельная модель анализируемого объекта и осуществлен переход в оболочку Simulation – Потеря устойчивости (рис. 3.57).

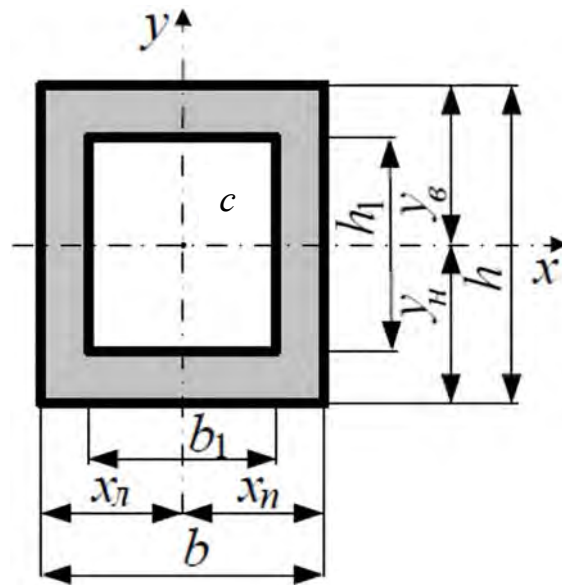


Рис. 3.56. Поперечное сечение стойки в виде полого прямоугольника

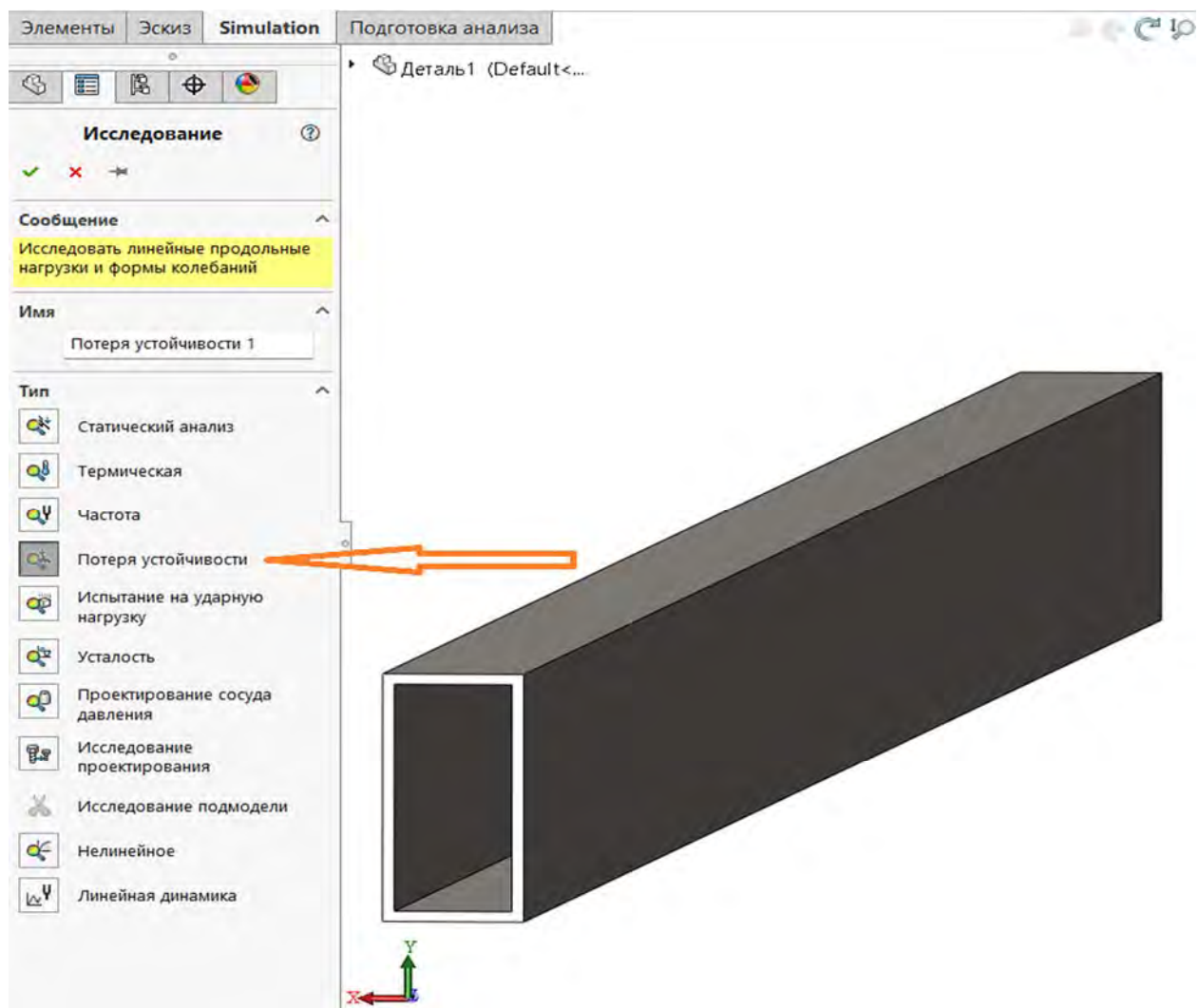


Рис. 3.57. Переход в оболочку Simulation – Потеря устойчивости

При создании конечно-элементной модели исследуемого изделия исходили из того, что материал для его изготовления – простая углеродистая сталь.

Для проведения расчета на устойчивость в разделе контекстного меню *Свойства* (рис. 3.58) необходимо указать количество используемых форм потери устойчивости. Как правило, первая форма потери устойчивости является наиболее информативной с точки зрения определения наименьшей критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости. Остальные параметры можно оставить *по умолчанию*.

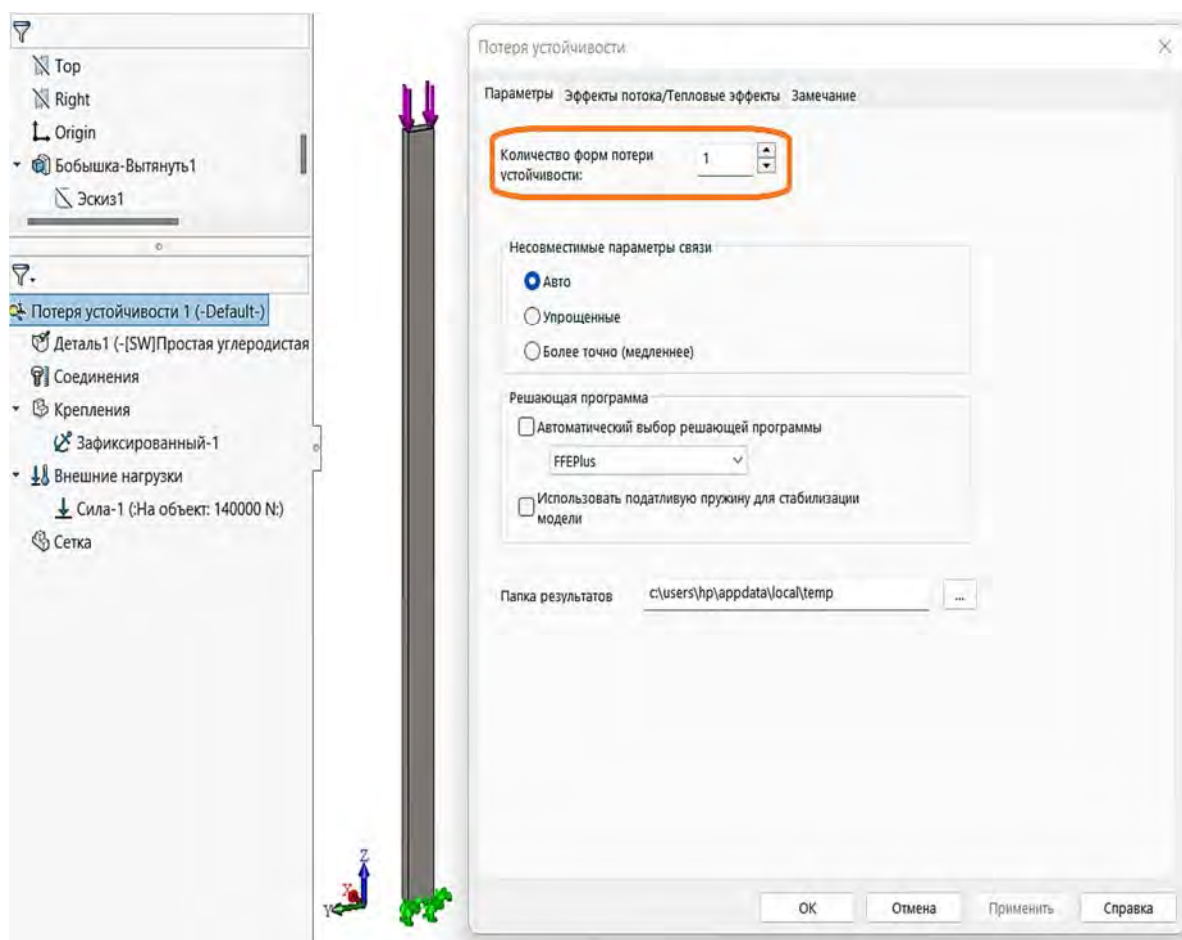


Рис. 3.58. Фиксация количества используемых форм потери устойчивости

После проведения завершающего расчета посредством щелчка левой клавишей мыши по дереву менеджера Simulation в том месте, где высвечивается пункт *Результаты* (рис. 3.59), будет раскрыто меню, использование которого позволит просмотреть итоги численного анализа на возможную потерю устойчивости объекта. Дважды щелкнув левой клавишей мыши по разделу меню (в данном примере это *Амплитуда 1*), на мониторе появится картинка (см. рис. 3.59) с информацией о форме потери устойчивости и значении коэффициента запаса устойчивости  $n_y$ . Как

видно, в рассматриваемом примере (см. рис. 3.59) коэффициент запаса устойчивости  $n_y = 0,446$  (в оболочке Simulation он назван *Коэффициент нагрузки*).

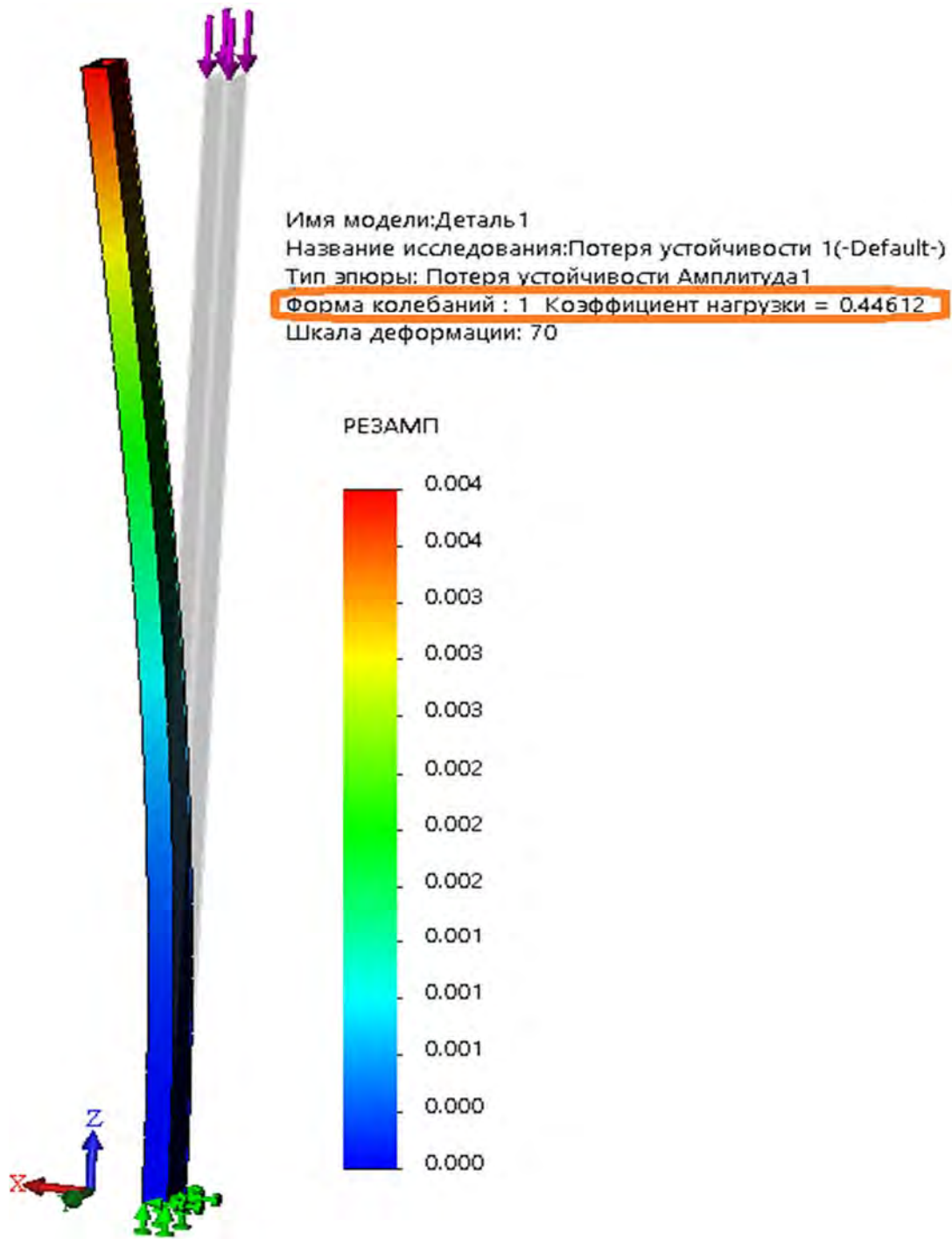


Рис. 3.59. Форма потери устойчивости, наложенная на недеформированное состояние, коэффициент запаса устойчивости и числовые значения эюры формы (колебаний/амплитуд РЕЗАМП)

Числовые значения эюры формы (колебаний/амплитуд РЕЗАМП) показывают относительные (безразмерные) значения амплитуд для

рассматриваемой формы. Здесь параметр РЕЗАМП представляет собой результирующую амплитуду без привязки к какой-либо координатной оси.

Поскольку коэффициент запаса устойчивости  $n_y = 0,446 < 1$ , то, следовательно, рассматриваемую стойку необходимо усилить.

Определяем теперь величину критического усилия и запас устойчивости, полученные на основании использования подходов курса «Механика материалов». Для рассматриваемого поперечного сечения стойки главные осевые моменты инерции будут соответственно равны (см. табл. 3.5)

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{0,06 \cdot 0,12^3}{12} - \frac{0,05 \cdot 0,11^3}{12} = 3,094 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = \frac{0,12 \cdot 0,06^3}{12} - \frac{0,11 \cdot 0,05^3}{12} = 1,014 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Поскольку  $I_y < I_x$ , то  $I_{\min} = 1,014 \text{ м}^4$  и, следовательно, минимальный радиус инерции будет равен

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,014 \cdot 10^{-6}}{(0,12 \cdot 0,06 - 0,11 \cdot 0,05)}} = 0,024 \text{ м}.$$

Заданному характеру закрепления колонны соответствует коэффициент  $\mu$ , учитывающий условия закрепления, равный 2.

Тогда максимальная гибкость колонны

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,9}{0,024} = 237,464.$$

Для полученного значения гибкости стальной колонны критическая величина сжимающей нагрузки может быть определена с помощью формулы Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,014 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 2,9)^2} = 62411 \text{ Н}.$$

## Запас устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_{зАд}} = \frac{62411}{140000} = 0,4458.$$

Сопоставление данного результата с полученным ранее посредством использования метода конечных элементов говорит о практически полном их совпадении, что подтверждает адекватность разработанной конечно-элементной модели.

## **Контрольные вопросы**

1. В чем заключается цель лабораторной работы?
2. Что подразумевается под термином «устойчивость» стоек?
3. Поясните понятия «устойчивое», «безразличное» и «неустойчивое» равновесие системы.
4. Какую нагрузку называют *критической* с точки зрения *устойчивости*?
5. Какие фрагменты конструкций следует подвергать анализу на *устойчивость*?
6. Что называют *критическими напряжениями* в разделе *Устойчивость*?
7. Запишите формулу Эйлера для определения критической нагрузки.
8. От каких параметров зависит значение критической силы при анализе стоек на *устойчивость*?
9. В каком диапазоне напряжений справедлива формула Эйлера для определения критической силы?
10. Как учитываются условия закрепления стойки при анализе на *устойчивость*?
11. Как выглядит формула Ясинского при определении критической нагрузки?
12. В каком диапазоне напряжений справедлива формула Ясинского?
13. Какой параметр называется *гибкостью* стержня? Запишите формулу, с помощью которой он определяется.
14. Какой параметр называется *радиусом инерции* поперечного сечения стержня?
15. Как выглядит график изменения критических напряжений на всем диапазоне гибкостей стоек?

16. Поясните понятие «*коэффициент запаса устойчивости*». Приведите формулу для его определения.

17. Какие значения должен принимать *коэффициент запаса устойчивости* для безопасной эксплуатации стоек?

18. Как в оболочке SolidWorks Simulation называется *коэффициент запаса устойчивости*?

19. Какой параметр обязательно необходимо указать в разделе контекстного меню *Свойства* при анализе на устойчивость?

20. Какую информацию можно получить с помощью эпюры РЕЗАМП в результате проведенного анализа стойки на устойчивость?

### **3.4. Лабораторная работа № 4. Сопоставительный анализ балки, подверженной удару падающим грузом**

**Цель работы:** провести сопоставительный анализ напряженно-деформированного состояния балки, подверженной удару падающим грузом, при использовании двух подходов – метода конечных элементов и курса «Механика материалов».

#### ***Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы***

Под ударом понимается взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени [15].

Время удара измеряется в тысячных, а иногда и миллионных долях секунды, а сила удара может достигать величин, значительно превышающих статическое взаимодействие.

На рис. 3.60 показана диаграмма изменения силы удара падающего груза в зависимости от времени.

В точке *С* сила удара достигает наибольшего значения. Точка *С* разделяет диаграмму на две части, соответствующие первой и второй фазам удара. В первой фазе центры тяжести соударяемых тел сближаются, а сила взаимодействия между телами возрастает, достигая максимального значения в момент наибольшего сближения тел, когда скорости взаимного сближения обращаются в нуль. Во второй фазе центры тяжести тел удаляются друг от друга (при упругом деформировании рассматриваемых объектов), силы взаимодействия уменьшаются, обращаясь в нуль в конце удара, когда прекращается контакт тел.

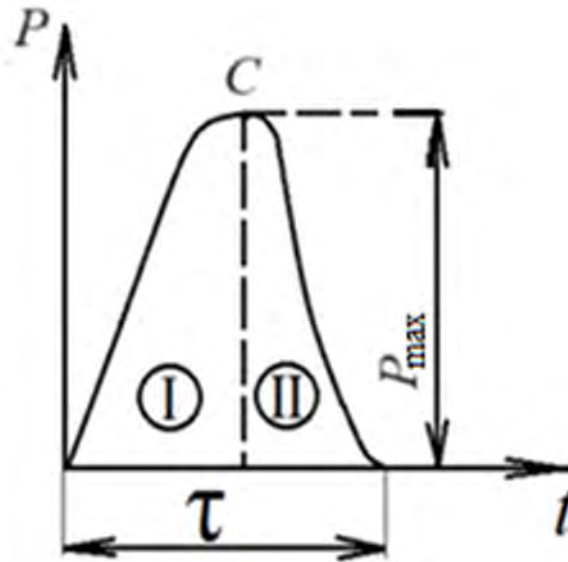


Рис. 3.60. Диаграмма изменения силы удара падающего груза в зависимости от времени

В курсе «Механика материалов» значения динамических напряжений  $\sigma_d$  и деформаций  $\Delta_d$  при поперечном ударе балок падающим грузом определяются посредством перемножения напряжений  $\sigma_{ст}$  и деформаций  $\Delta_{ст}$ , возникающих в анализируемом объекте от действия статически приложенной нагрузки, на динамический коэффициент  $K_d$ :

$$\sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст};$$

$$\Delta_d = K_d \cdot \Delta_{ст}.$$

В свою очередь, динамический коэффициент  $K_d$  может быть вычислен с помощью следующего выражения:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст}}},$$

где  $h$  – высота, с которой падает груз.

При проведении данного сопоставительного анализа важно иметь в виду, что в курсе «Механика материалов» при выводе формулы для динамического коэффициента  $K_d$  сделано допущение о *невесомости* упругодеформируемой балки. Поэтому при задании механических свойств материала балки в SolidWorks Simulation для сопоставимости результатов, полученных указанными двумя подходами, *целесообразно уменьшить удельный вес реального материала в 1000 раз.*

Величина статических напряжений  $\sigma_{ст}$  и статических прогибов балки  $\Delta_{ст}$  от веса груза, расположенного на верхней поверхности балки, осуществляется стандартными подходами курса «Механика материалов».

Кроме того, при проведении анализа состояния балки с помощью средств SolidWorks Simulation необходимо *подобрать временной интервал*, в пределах которого производится анализ рассматриваемого удара груза по балке, равный первой фазе удара (см. рис. 3.60).

### ***Исходные данные***

В лабораторной работе для исходных данных, представленных в табл. 3.10, и для расчетных схем, приведенных на рис. 3.61, необходимо провести анализ напряженно-деформированного состояния балки, подверженной поперечному удару грузом массой  $m$ .

Табл. 3.10. Исходные данные для анализа поперечного удара по балке

| Номер строки | Схема на рис. 3.61 | $l$ , м  | $m$ , кг | $h_m$ , м | Номер схемы поперечного сечения по табл. 3.5 и его размеры                  |
|--------------|--------------------|----------|----------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 0            | 0                  | 3,0      | 3,0      | 0,50      | <b>№ 0</b><br>$h = 0,13$ м; $b = 0,08$ м; $d = 0,06$ м                      |
| 1            | 1                  | 2,1      | 2,1      | 0,41      | <b>№ 1</b><br>$H = 0,1$ м; $B = 0,05$ м; $h = 0,09$ м; $b = 0,02$ м         |
| 2            | 2                  | 2,2      | 2,2      | 0,42      | <b>№ 2</b><br>$h = 0,12$ м; $B = 0,06$ м;<br>$d = 0,006$ м; $b = 0,01$ м    |
| 3            | 3                  | 2,3      | 2,3      | 0,43      | <b>№ 3</b><br>$h = 0,11$ м; $b = 0,055$ м                                   |
| 4            | 4                  | 2,4      | 2,4      | 0,44      | <b>№ 4</b><br>$h = 0,12$ м; $b = 0,06$ м;<br>$h_1 = 0,11$ м; $b_1 = 0,05$ м |
| 5            | 5                  | 2,5      | 2,5      | 0,45      | <b>№ 5</b><br>$h = 0,13$ м; $b_H = 0,2$ м; $b_e = 0,1$ м                    |
| 6            | 6                  | 2,6      | 2,6      | 0,46      | <b>№ 6</b><br>$h = 0,12$ м; $d = 0,15$ м; $b = d/2$                         |
| 7            | 7                  | 2,7      | 2,7      | 0,47      | <b>№ 7</b><br>$d = 0,12$ м                                                  |
| 8            | 8                  | 2,8      | 2,8      | 0,48      | <b>№ 8</b><br>$d = 0,12$ м; $h = 0,1$ м                                     |
| 9            | 9                  | 2,9      | 2,9      | 0,49      | <b>№ 9</b><br>$a = 0,11$ м; $d = 0,08$ м                                    |
|              | <b>а</b>           | <b>б</b> | <b>в</b> | <b>а</b>  | <b>в</b>                                                                    |

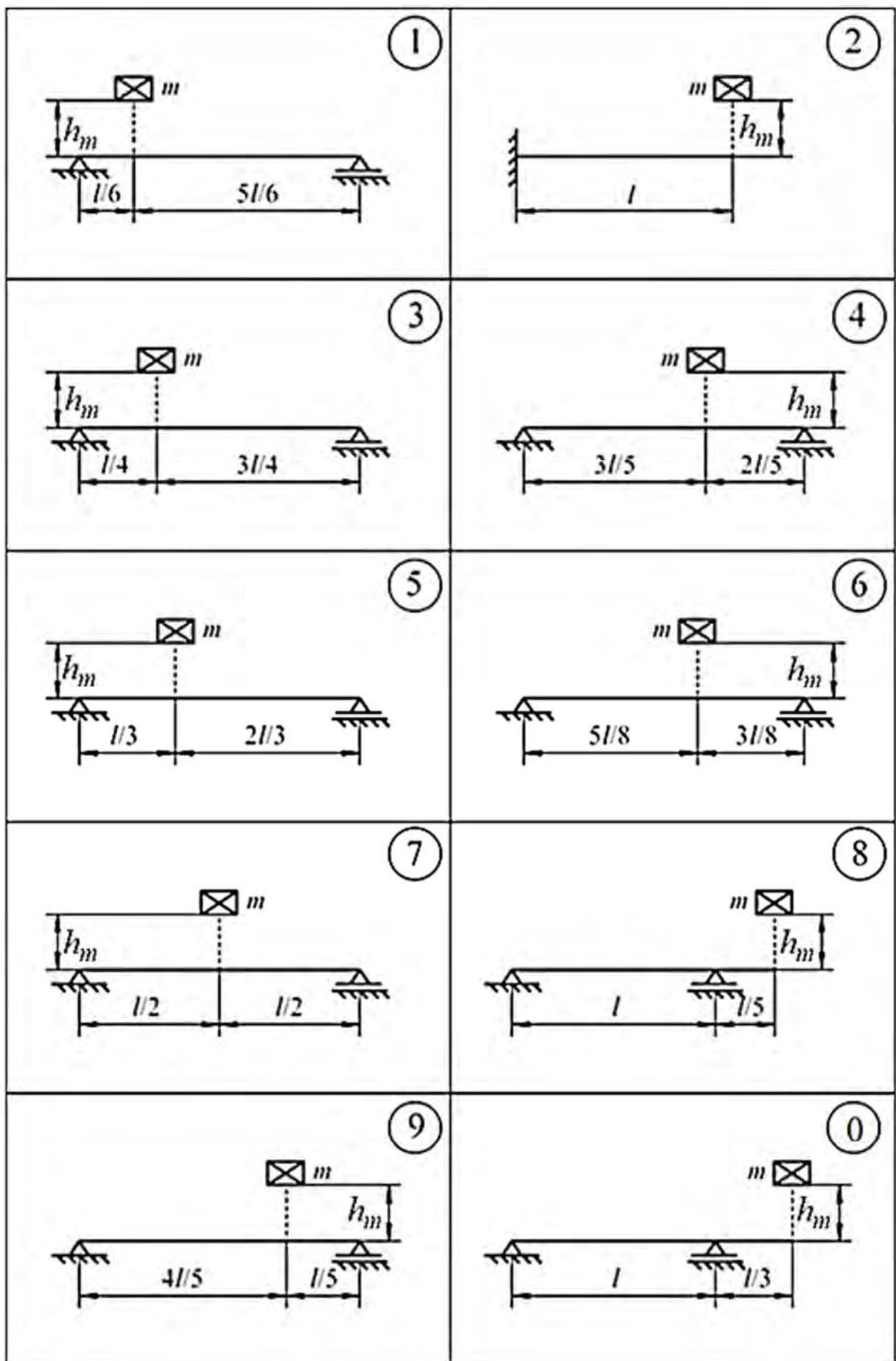


Рис. 3.61. Расчетные схемы для анализа поперечного удара по балке

Следует отметить, что в приведенных исходных данных форма поперечного сечения стала другой, чем в предыдущих лабораторных работах.

На рис. 3.62 приведено обозначение габаритных размеров падающего груза в форме параллелепипеда.

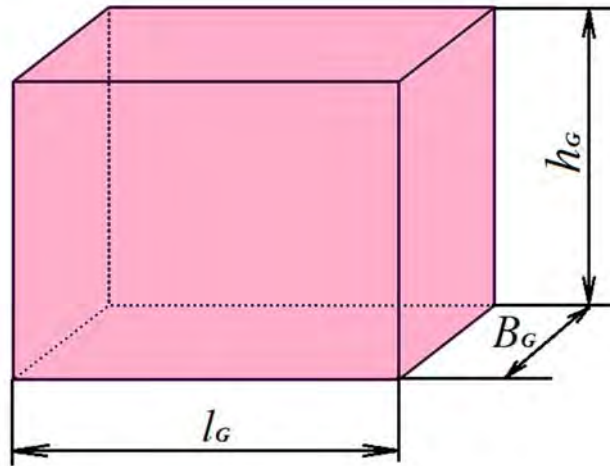


Рис. 3.62. Габаритные размеры падающего на балку груза

Габаритный размер падающего груза  $B_G$  принимается равным ширине верхней поверхности балки (данные взять из табл. 3.10, а также из данных соответствующего поперечного сечения балки). Габаритный размер падающего груза, совпадающий по направлению (см. рис. 3.62) с осью балки, принимается равным  $l_G = 60$  мм.

Размер груза  $h_G$ , м, определяется с помощью выражения

$$h_G = 2,14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m}{B_G} ,$$

где  $m$  – вес падающего груза (см. табл. 3.10).

Материал, из которого изготовлена балка, – сталь Ст3, модуль упругости которой  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

### ***Пример выполнения лабораторной работы***

Рассмотрим пример анализа напряженно-деформированного состояния балки, подверженной поперечному удару грузом и закрепленной, как показано на рис. 3.63.

При этом характерные параметры схемы имеют следующие значения:  $l = 3$  м,  $m = 2$  кг,  $h_m = 0,5$  м.

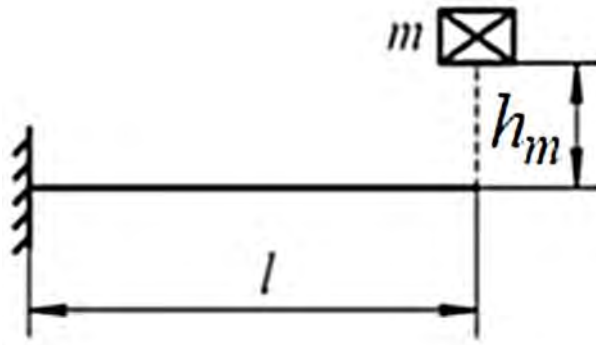


Рис. 3.63. Схема нагружения балки ударом

Поперечное сечение балки представляет собой симметричный тавр, состоящий из прямоугольников (рис. 3.64).

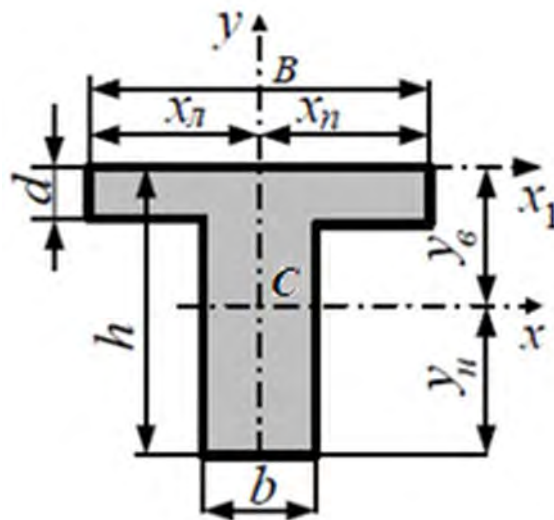


Рис. 3.64. Форма поперечного сечения рассматриваемой балки

Габаритные размеры данного поперечного сечения имеют следующие значения:  $h = 0,12$  м,  $B = 0,06$  м,  $d = 0,006$  м,  $b = 0,01$  м.

Поскольку в методе конечных элементов предполагается, что все детали сборки находятся в контакте, то взаимодействие соударяющейся массы с балкой рассматривается только с момента соприкосновения их. В этот момент груз, падающий с высоты  $h_m$ , приобретает скорость  $v_m$ , величину которой можно определить из равенства потенциальной энергии груза, находящегося на высоте  $h_m$ , и приобретаемой кинетической энергии этого груза в момент соприкосновения с балкой:

$$m \cdot g \cdot h_m = \frac{m \cdot v_m^2}{2}.$$

В результате элементарных преобразований может быть получено выражение

$$v_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Таким образом, скорость груза  $v_m$ , падающего с высоты  $h_m = 0,5$  м, будет равна

$$v_m = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5} = 3,13 \text{ м/с}.$$

Кроме этих данных, для построения твердотельной модели исследуемого объекта необходимо также определить габаритные размеры падающего груза (см. рис. 3.62) в соответствии с тем, что масса этого груза  $m = 2$  кг.

Как уже отмечалось ранее, габаритный размер груза  $l_G$ , совпадающий по направлению с осью балки, принимаем равным 60 мм. Поперечный размер  $B_G$  равен ширине верхней поверхности балки, т. е. в нашем случае  $B_G = B = 0,06$  м.

Размер груза  $h_G$  определяется исходя из соображений равенства этого объема металла массе груза, заданной в исходных данных, в нашем случае массе  $m = 2$  кг. Для определения данного параметра используется выражение

$$h_G = 2,14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m}{B_G} = 2,14 \cdot 10^{-3} \frac{2}{0,06} = 0,0713 \text{ м}.$$

Используя данные габаритные размеры балки и груза, была создана твердотельная модель этой сборки (рис. 3.65).

Для проведения исследования *Нагружения балки посредством удара падающим грузом* был выбран из предлагаемых SolidWorks Simulation типов анализов (табл. 3.11) *Нелинейный динамический анализ*. Использование такого типа анализа обусловлено тем, что взаимодействие двух соударяемых тел происходит на протяжении определенного промежутка времени, хоть и весьма малого, и это взаимодействие явно не носит линейный характер.

Как видно из табл. 3.11, среди прочих имеется *Анализ на ударную нагрузку*. В этом типе анализа рассматривается случай удара анализируемого объекта об абсолютно жесткую или упругую стенку, т. е. учитываются деформативные свойства только одного из соударяемых тел.

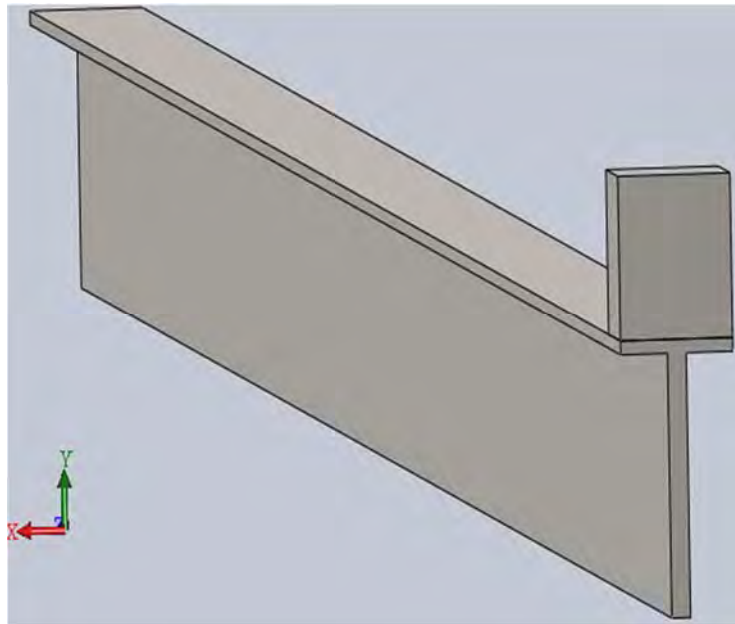


Рис. 3.65. Твёрдотельная модель сборки балки и груза

Табл. 3.11. Типы проводимых в Simulation анализов и их обозначения

| Тип исследования               | Значок исследования | Тип исследования                              | Значок исследования |
|--------------------------------|---------------------|-----------------------------------------------|---------------------|
| Статический                    |                     | Модальная временная диаграмма                 |                     |
| Частотный анализ               |                     | Гармонический анализ                          |                     |
| Потеря устойчивости            |                     | Случайные колебания                           |                     |
| Термический анализ             |                     | Спектр реакции                                |                     |
| Исследование проектирования    |                     | Анализ на ударную нагрузку                    |                     |
| Нелинейный статический анализ  |                     | Усталость                                     |                     |
| Нелинейный динамический анализ |                     | Конструкция сосуда, работающего под давлением |                     |

Настройка параметров расчетной части исследования осуществляется посредством щелчка правой клавишей мыши по корню дерева менеджера Simulation в том месте, где обозначается тип анализа. В результате высвечивается контекстное меню, представленное на рис. 3.66.

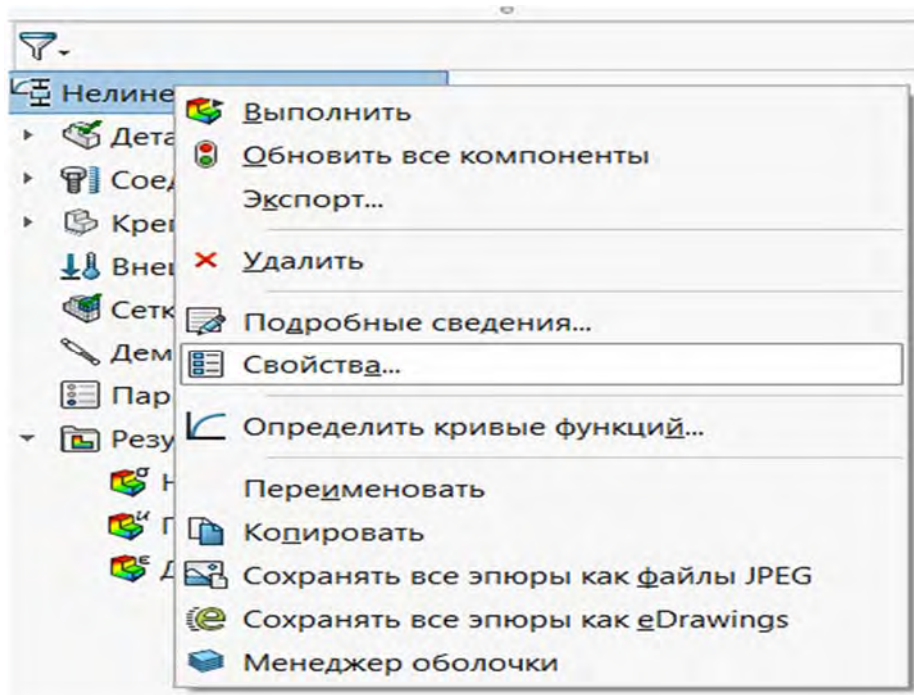


Рис. 3.66. Настройка параметров расчетной части *Нелинейного динамического анализа*

После нажатия левой клавишей мыши позиции *Свойства* появится новое диалоговое окно (рис. 3.67).

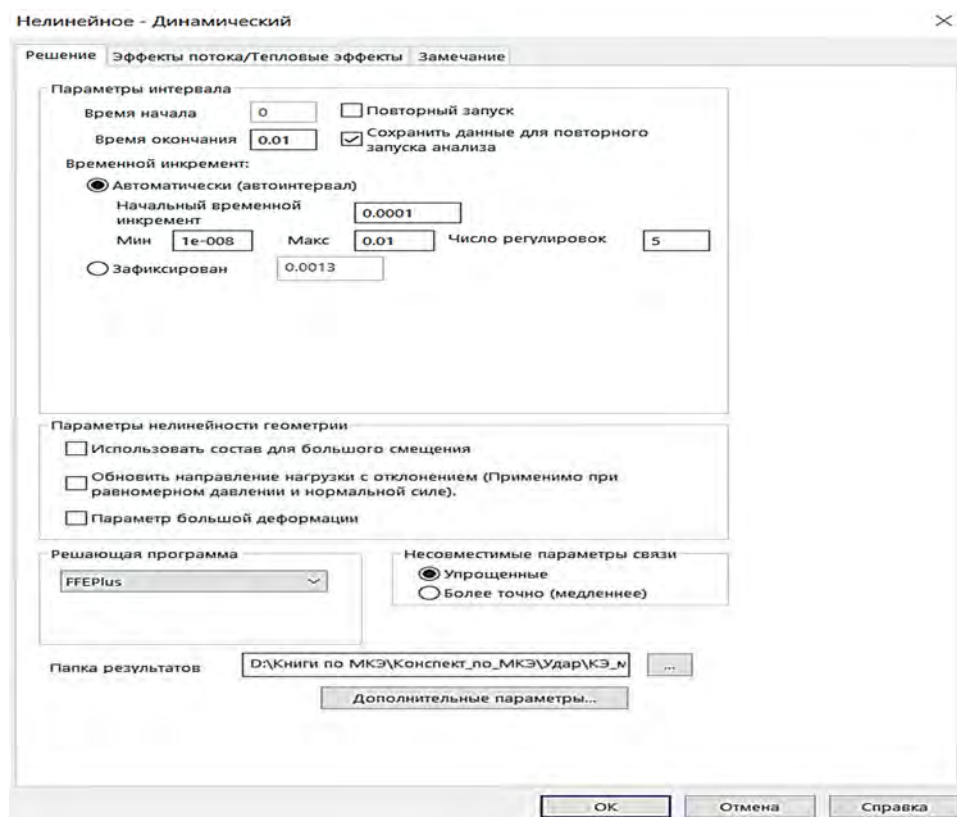


Рис. 3.67. Диалоговое окно настройки расчетной части

В этом диалоговом окне необходимо обязательно указать время начала и окончания динамического взаимодействия исследуемого процесса. В данном примере (см. рис. 3.67) началу соответствовала нулевая отметка, а концу – значение 0,01 с. Временной интервал при проведении такого анализа первоначально назначается интуитивно, на основании умозрительного представления об инерционных свойствах соударяемых тел. После проведения первого расчета и отладки конечно-элементной модели более подробно анализируется характер деформирования соударяемых тел за весь рассматриваемый период времени.

Процесс соударения тел принято разделять на две фазы (см. рис. 3.60). В первой фазе тела после соприкосновения продолжают сближаться, деформации растут, также растут и усилия взаимодействия между телами. Во второй фазе за счет наличия сил упругости деформации уменьшаются, становятся меньше и силы взаимодействия между телами. Наибольший интерес с точки зрения напряженно-деформированного состояния анализируемых изделий представляет момент времени, когда силы взаимодействия принимают наибольшие значения. Для рассматриваемого типа примеров такой момент настает при переходе от первой фазы удара ко второй.

Момент перехода от первой фазы ко второй устанавливается посредством рассмотрения результатов расчета, включая операцию *Зондирование*. Поэтому после первого просчета оценивается график изменения прогибов во времени и фиксируется момент наибольшей деформации балки. Этот интервал времени и назначается во втором приближении в диалоговом окне настройки расчетной части.

Все остальные опции диалогового окна настройки расчетной части (см. рис. 3.67) можно принять по умолчанию.

Поскольку в данном примере рассматривается сборка, состоящая из двух деталей – балки и падающего на нее груза, то необходимо при построении конечно-элементной модели указать условия *Соединения* этих двух деталей по плоскости контакта (рис. 3.68). Как видно из данного рисунка, детали по плоскости соприкосновения назначены *Связанными*.

Кроме того, из рис. 3.68 видно, что левый торец балки жестко закреплен.

Наряду с уже отмеченной информацией, необходимо также задать силовое воздействие одной детали на другую, что можно сделать, используя опцию *Внешние нагрузки*, щелкнув по ней правой клавишей мыши. В результате появится еще одно всплывающее меню (рис. 3.69). Одна из опций данного меню – *Исходные условия*. С помощью этой опции можно задать скорость падающего груза в начальный момент соприкосновения с балкой.

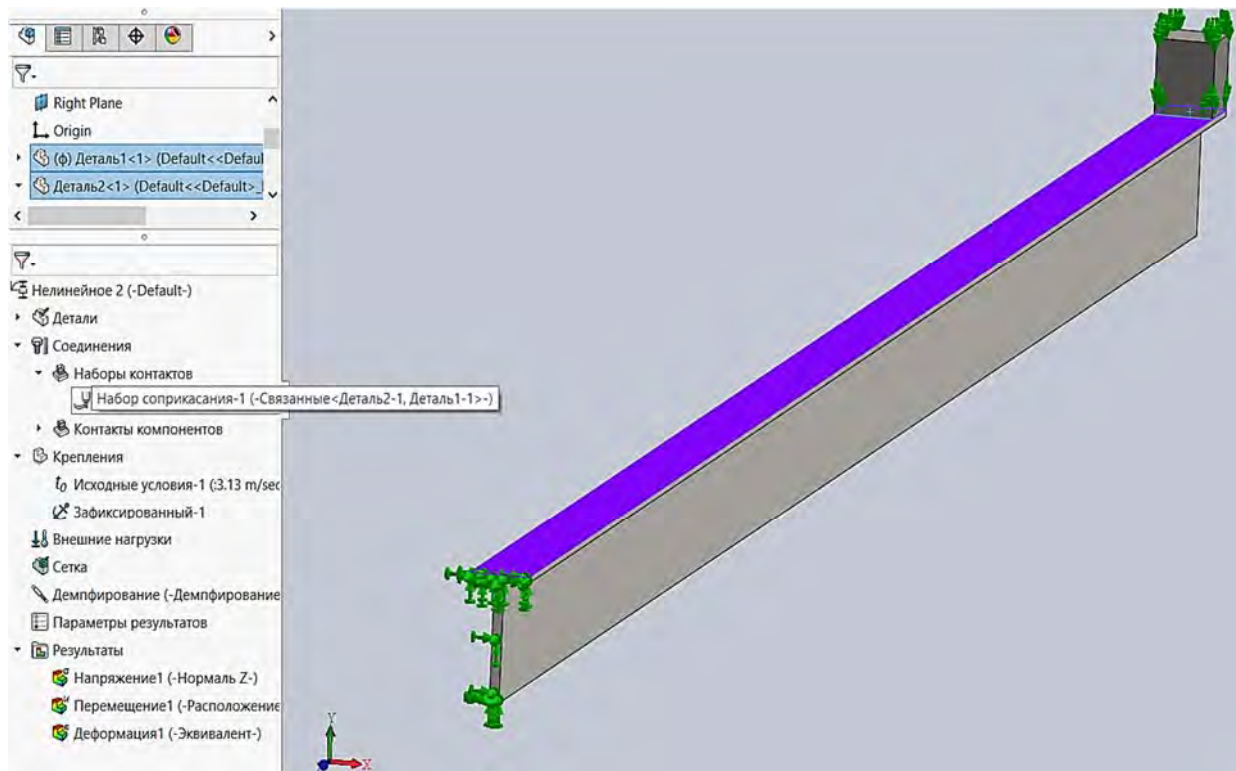


Рис. 3.68. Условия соединения в зоне контакта верхней поверхности балки и груза

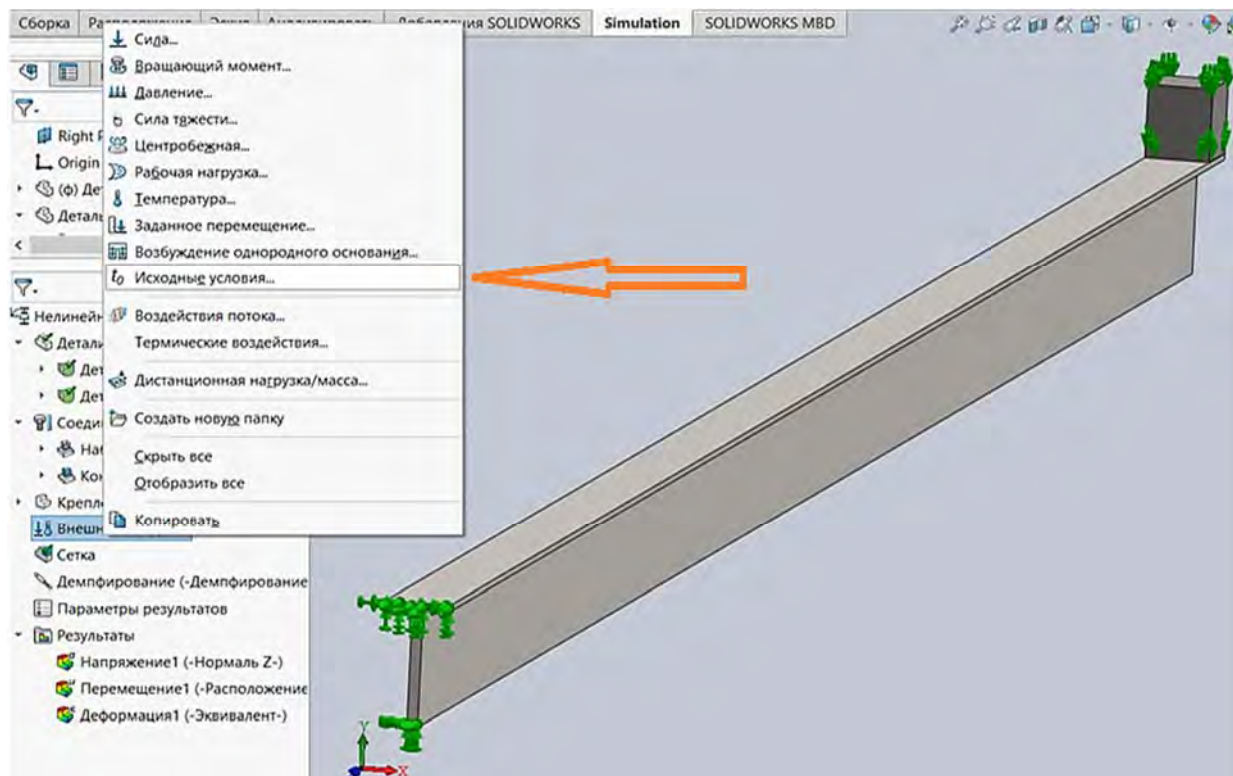


Рис. 3.69. Задание опции *Исходные условия* в момент соприкосновения груза с балкой

Значение скорости  $v = 3,13$  м/с, вычисленное ранее, указано в опции *Исходные условия* (рис. 3.70).

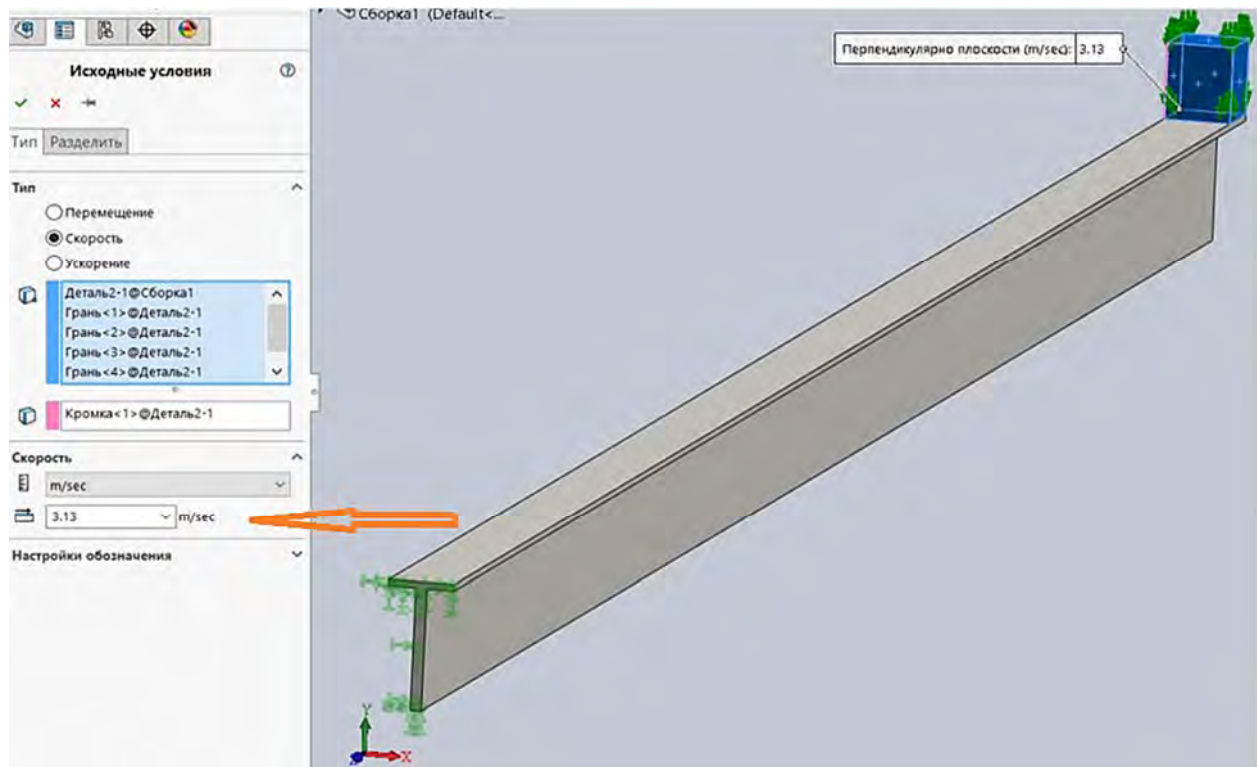


Рис. 3.70. Введение информации о скорости груза в момент соприкосновения с балкой

Далее, процедура конечно-элементного анализа рассматриваемой задачи близка к тем, которые проводились в предыдущих задачах, – построение сетки разбиения конечно-элементной модели (рис. 3.71) и проведение заключительного расчета.

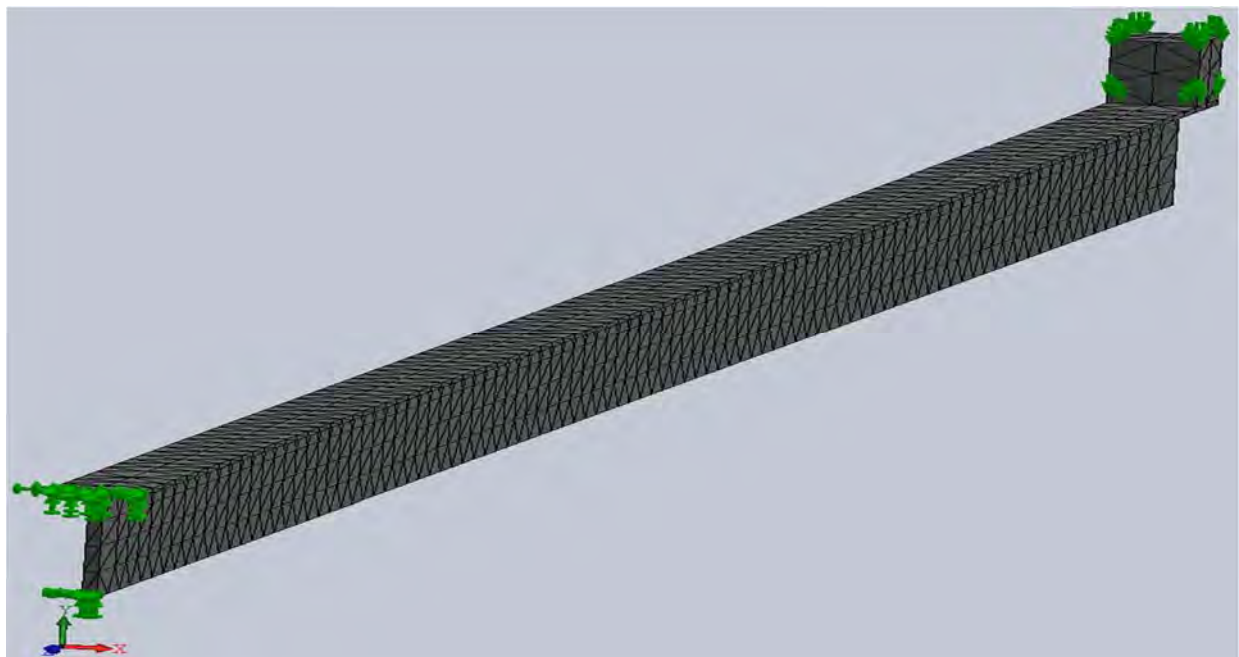


Рис. 3.71. Сетка разбиения модели на конечные элементы, условия закрепления и начальные условия в момент соприкосновения груза с балкой

На рис. 3.72 и 3.73 приведены эпюры распределения прогибов в вертикальном направлении и нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки в момент пиковых значений этих параметров, т. е. при  $t = 0,01$  с.

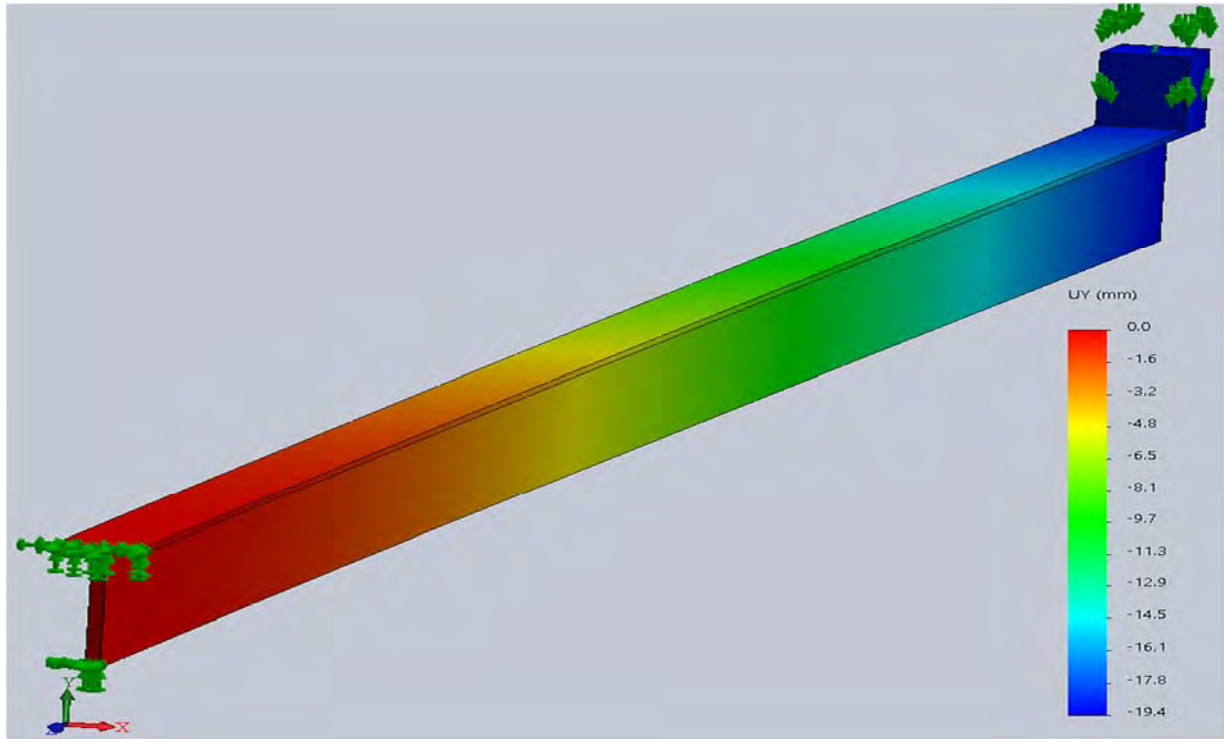


Рис. 3.72. Максимальный прогиб балки в процессе поперечного удара

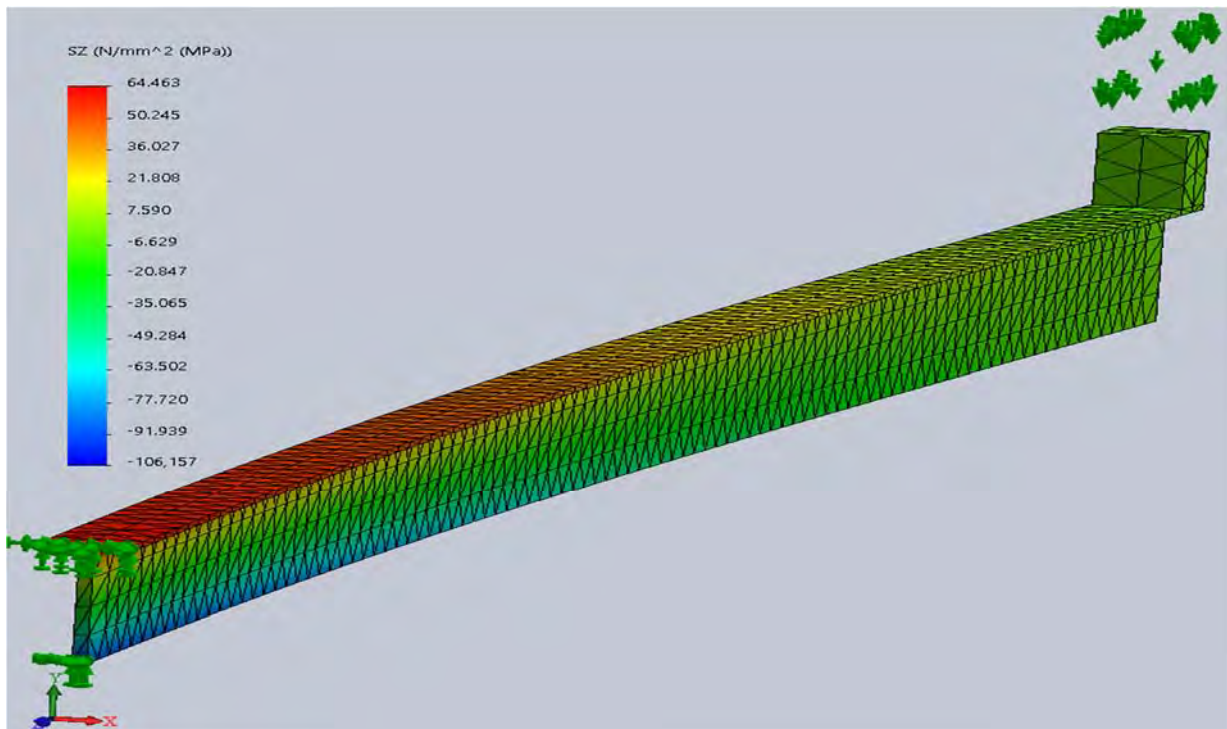


Рис. 3.73. Распределение нормальных напряжений по наружной поверхности балки в момент наибольшего деформирования

Как видно из рис. 3.73, наибольшие значения напряжений имеют место в области, прилегающей к заделке. В связи с этим напряженное состояние данной зоны было более подробно исследовано с помощью применения операции *Зондирование* (рис. 3.74).

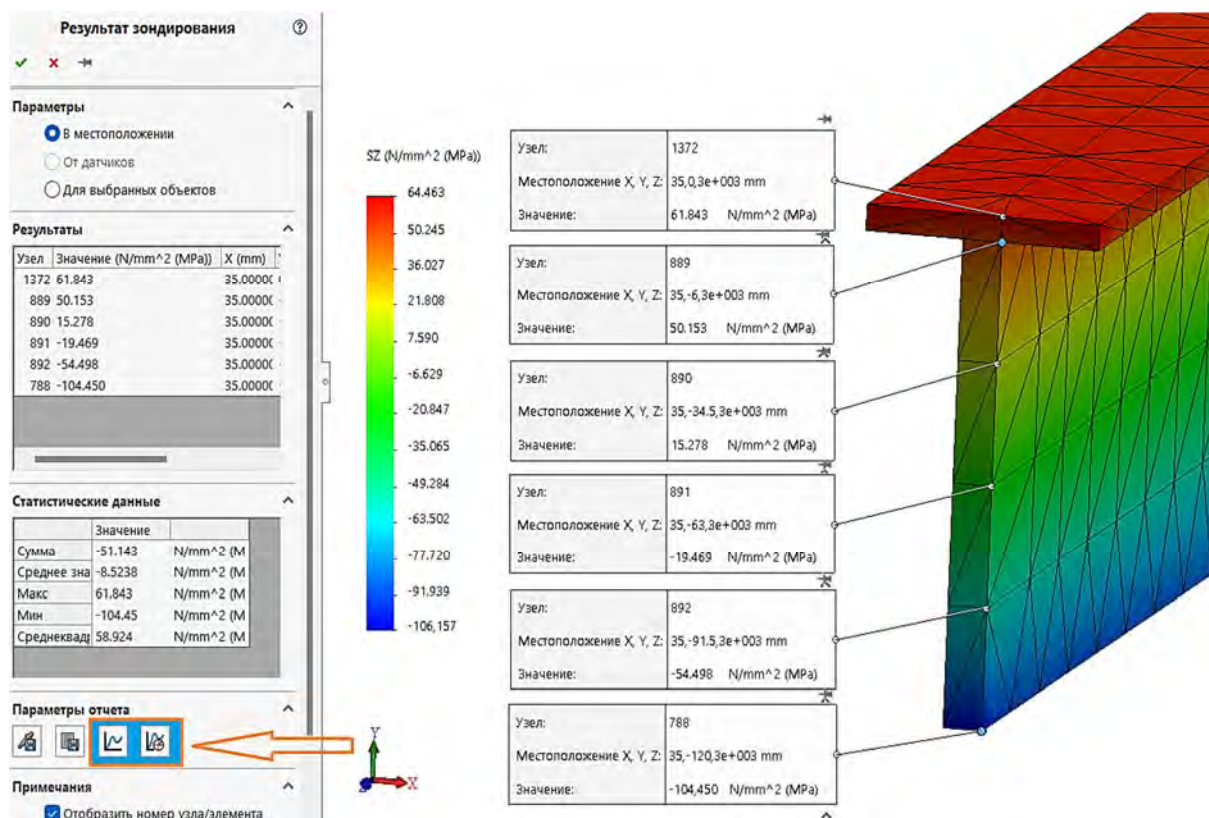


Рис. 3.74. Значения нормальных напряжений в узловых точках конечно-элементной модели в поперечном сечении балки, непосредственно прилегающем к заделке

На рис. 3.74 приведена подробная информация о шести узловых точках сечения балки, непосредственно прилегающего к заделке. Кроме того, на рис. 3.74 в левой его части находятся иконки, выделенные оранжевой рамкой с голубой заливкой. С помощью левой иконки выводится график изменения рассматриваемого параметра вдоль отмеченных узловых точек. Иконка, расположенная справа (см. рис. 3.74), позволяет построить график изменения рассматриваемого параметра во времени. Эта иконка активна только для задач, в которых используется временной фактор. В частности, используя данную опцию, был создан график (рис. 3.75) изменения прогибов части балки, расположенной непосредственно под грузом.

Как видно из приведенного графика, активная фаза взаимодействия падающего груза и балки пройдена. Следовательно, интервала времени  $t = 0,01$  с вполне достаточно для анализа напряженно-деформированного состояния балки.

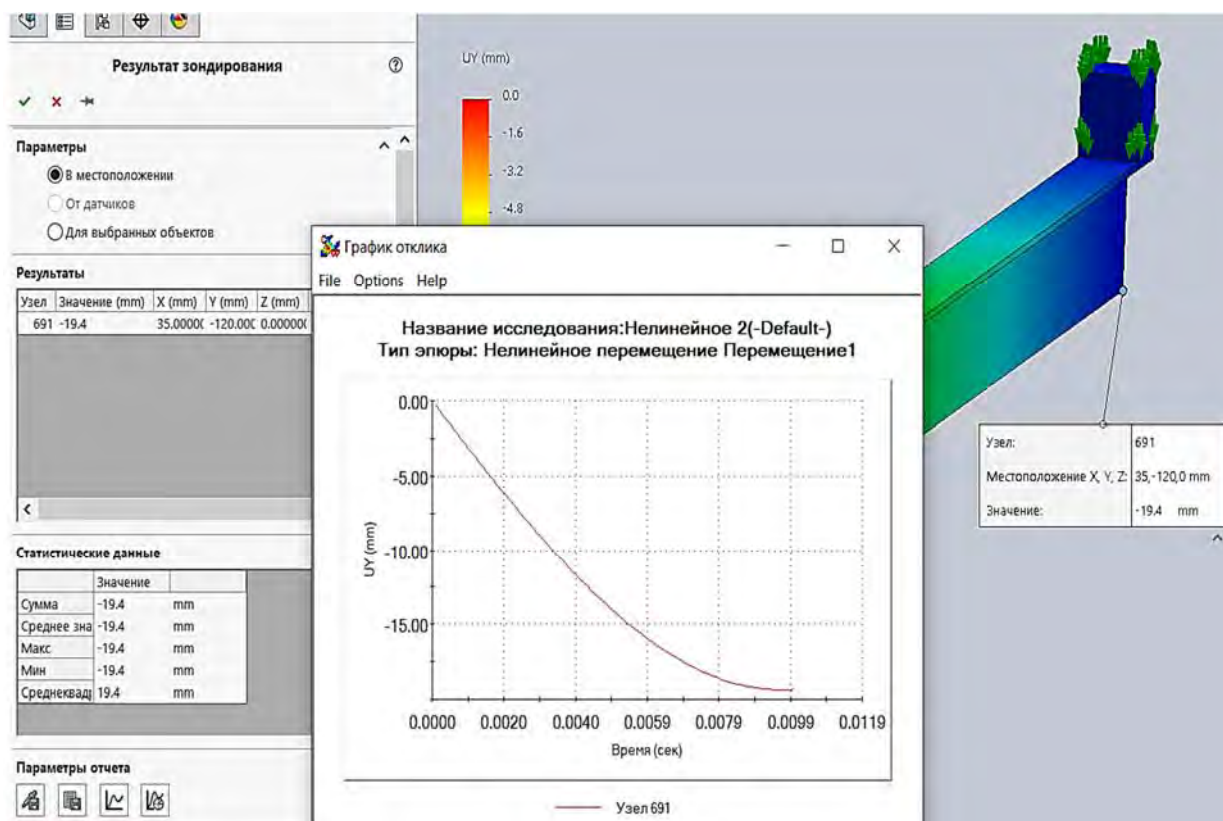


Рис. 3.75. График прогиба балки в зоне падения груза за активную фазу удара

При проведении сопоставительного анализа балки, подверженной нагружению ударом, используя подходы курса «Механика материалов» и данные табл. 3.5 и 3.10, прежде всего необходимо определить следующие геометрические характеристики:

– площадь поперечного сечения

$$A = (B - b) \cdot d + bh;$$

– координату центра тяжести поперечного сечения

$$y_s = \frac{(B - b) \frac{d^2}{2} + b \frac{h^2}{2}}{(B - b)d + bh};$$

– осевой момент инерции сечения

$$J_x = (B - b) \frac{d^3}{3} + \frac{bh^3}{3} - Ay_s^2;$$

– момент сопротивления нижнего края поперечного сечения

$$W_{x,H} = \frac{J_x}{h - y_{\epsilon}};$$

– момент сопротивления верхнего края поперечного сечения

$$W_{x,\epsilon} = \frac{J_x}{y_{\epsilon}}.$$

Учитывая, что габаритные размеры рассматриваемого поперечного сечения имеют значения  $h = 0,12$  м,  $B = 0,06$  м,  $d = 0,006$  м,  $b = 0,01$  м, то в результате получим следующие значения геометрических характеристик:

$$A = (0,06 - 0,01)0,006 + 0,01 \cdot 0,12 = 0,0015 \text{ м}^2;$$

$$y_{\epsilon} = \frac{(0,06 - 0,01) \frac{0,006^2}{2} + 0,01 \frac{0,12^2}{2}}{(0,06 - 0,01)0,006 + 0,01 \cdot 0,12} = 0,0486 \text{ м};$$

$$J_x = (0,06 - 0,01) \frac{0,006^3}{3} + \frac{0,01 \cdot 0,12^3}{3} - 0,0015 \cdot 0,0486^2 = 2221 \cdot 10^9 \text{ м}^4;$$

$$W_{x,H} = \frac{2221 \cdot 10^{-9}}{0,12 - 0,0486} = 31,09 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{x,\epsilon} = \frac{2221 \cdot 10^{-9}}{0,0486} = 45,68 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальный статический изгибающий момент при заданной схеме закрепления балки (см. рис. 3.63) в случае, когда груз неподвижно расположен на свободном краю балки, будет равен

$$M_{ст}^{\max} = G \cdot l = 20 \cdot 3 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тогда максимальные напряжения, возникающие в заделке при статическом нагружении грузом  $G$ , следующие:

$$\sigma_{ст.н}^{\max} = \frac{M_{ст}^{\max}}{W_{x,H}} = \frac{60}{31,09 \cdot 10^{-6}} = -1,93 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{ст.в}^{\max} = \frac{M_{ст}^{\max}}{W_{x,в}} = \frac{60}{45,68 \cdot 10^{-6}} = 1,31 \text{ МПа}.$$

Для консольно-закрепленной балки, нагруженной сосредоточенной силой на свободном краю, статический прогиб может быть определен с помощью выражения

$$\Delta_{ст} = \frac{G \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J_x} = \frac{20 \cdot 3^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,221 \cdot 10^{-6}} = 40,522 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 0,405 \text{ мм}.$$

Здесь следует отметить, что только для данной схемы нагружения (см. рис. 3.63) можно использовать формулу для определения  $\Delta_{ст}$ . Во всех остальных вариантах схем нагружения необходимо строить единичные и грузовые эпюры моментов при статическом нагружении, а затем, используя правило Верещагина, определять статический прогиб.

В дальнейшем, зная величину статического перемещения  $\Delta_{ст}$ , определяем динамический коэффициент

$$K_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{40,522 \cdot 10^{-5}}} = 50,69.$$

Используя значение динамического коэффициента, в последующем могут быть определены величины максимальных напряжений и динамического прогиба, применяя следующие соотношения:

$$\sigma_{\delta.н}^{\max} = \sigma_{ст.н}^{\max} \cdot K_{\delta} = -1,93 \cdot 50,69 = -97,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\delta.в}^{\max} = \sigma_{ст.в}^{\max} \cdot K_{\delta} = 1,31 \cdot 50,69 = 66,4 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\delta} = \Delta_{ст} \cdot K_{\delta} = 0,405 \cdot 50,69 = 20,53 \text{ мм}.$$

В результате проведения такого сопоставительного анализа напряженно-деформированного состояния консольной балки, подверженной поперечному удару падающим грузом, все наиболее показательные данные были сведены в табл. 3.12.

Табл. 3.12. Сопоставление результатов расчетов, полученных с помощью SolidWorks Simulation, и расчетных методов, представленных в курсе «Механика материалов»

| Метод анализа напряженно-деформированного состояния балки | Максимальное напряжение на верхних волокнах балки сечения, прилегающего к заделке, $\sigma_{\text{д,в}}^{\text{max}}$ , МПа | Максимальное напряжение на нижних волокнах балки сечения, прилегающего к заделке, $\sigma_{\text{д,н}}^{\text{max}}$ , МПа | Максимальный прогиб балки в зоне падения груза $\Delta_0$ , мм |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
|                                                           | Процент расхождения                                                                                                         |                                                                                                                            |                                                                |
|                                                           | 6,9                                                                                                                         | 6,3                                                                                                                        | 5,5                                                            |
| SolidWorks                                                | 61,8                                                                                                                        | –104,4                                                                                                                     | 19,4                                                           |
| Механика материалов                                       | 66,4                                                                                                                        | –97,83                                                                                                                     | 20,53                                                          |

Такой процент расхождения результатов расчета может объясняться рядом причин:

- использовалась достаточно грубая сетка разбиения модели на конечные элементы;
- в основу теории удара в курсе «Механика материалов» положен ряд допущений, которые в SolidWorks Simulation не применяются;
- в месте заделки балки, а также зоне падения груза может оказывать большое влияние краевой эффект, который в курсе «Механика материалов» не учитывается.

### ***Контрольные вопросы***

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Что подразумевается под термином «нагружение ударом»?
3. Как выглядит диаграмма изменения силы удара падающего груза в зависимости от времени?
4. На какие фазы условно разделяют диаграмму изменения силы удара в зависимости от времени?
5. Чем характеризуется первая фаза диаграммы изменения силы удара во времени?
6. Чем характеризуется вторая фаза диаграммы изменения силы удара во времени?
7. От каких факторов зависит продолжительность взаимодействия соударяемых тел?
8. Как осуществляется расчет напряженно-деформированного состояния анализируемого объекта при ударе в курсе «Механика материалов»?

9. От каких факторов зависит динамический коэффициент, используемый в курсе «Механика материалов», при анализе напряженно-деформированного состояния балки при ударе падающим грузом?

10. Какое допущение, сделанное в курсе «Механика материалов» при рассмотрении темы «Удар», обязательно необходимо учесть для проведения сопоставительного анализа с использованием SolidWorks Simulation?

11. Как определяется временной интервал, в пределах которого производится анализ рассматриваемого удара груза по балке с помощью средств SolidWorks Simulation?

12. Из каких соображений определяются габаритные размеры параллелепипеда, посредством использования которого имитируется падающий на балку груз в лабораторной работе?

13. Какой тип анализа компьютерной системы SolidWorks Simulation используется в лабораторной работе?

14. Какой тип контакта необходимо установить между грузом и балкой в лабораторной работе?

15. Используя какие средства, назначается силовое взаимодействие груза и балки в лабораторной работе при расчете в SolidWorks Simulation?

16. Какова последовательность действий при определении графика прогибов балки в зоне падения груза за активную фазу удара в компьютерной системе SolidWorks Simulation?

17. Какие факторы могут являться причиной существенных погрешностей, возникающих при сопоставительном анализе в лабораторной работе?

### **3.5. Лабораторная работа № 5. Проведение частотных исследований различных объектов**

**Цель работы:** ознакомление с процедурой определения собственных частот и форм колебаний различных изделий в SolidWorks Simulation.

***Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы***

Под механическими колебаниями подразумевается процесс изменения величины какого-либо параметра механической системы (например, координаты в пространстве), при этом имеет место периодическое возрастание и убывание его во времени (рис. 3.76).

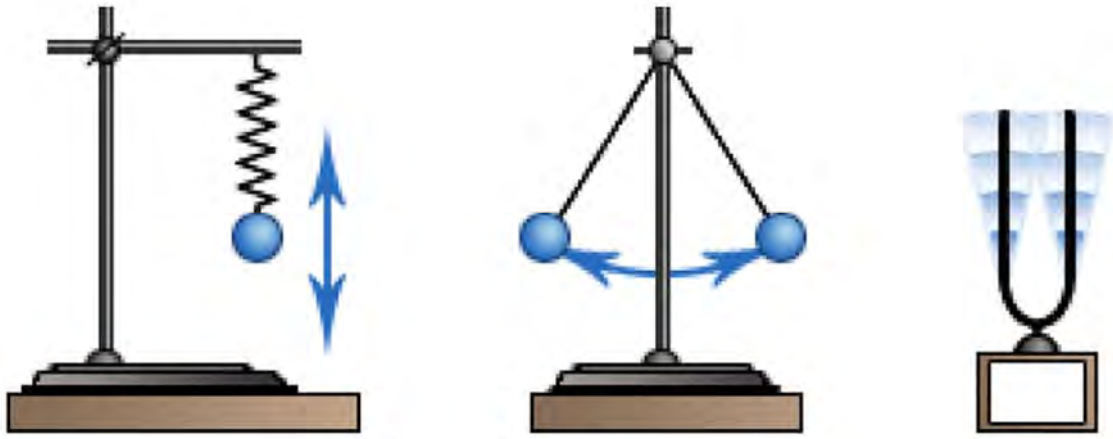


Рис. 3.76. Простейшие примеры колебательных систем

Данные колебания можно описывать некоторой периодической функцией, значение которой повторяется через определенный отрезок времени  $T$ , именуемый *периодом колебаний*, т. е.  $f(t + T) = f(t)$  при любом значении переменной  $t$ .

В свою очередь, величина, обратная периоду колебаний  $T$ , называется частотой колебаний  $\nu = 1/T$ . Частота колебаний измеряется в герцах и показывает сколько полных колебаний рассматриваемая система совершает за 1 с.

Если данное условие не выполняется, то такие функции относят к разряду непериодических.

В разделе механики твердого деформируемого тела «Теория колебаний» используется такое понятие, как «*почти периодические функции*», к которым относятся функции, удовлетворяющие следующему условию:

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leq \varepsilon \quad \text{при любом } t,$$

где  $\tau, \varepsilon$  – определенные постоянные величины.

При этом вполне очевидно, что если  $\varepsilon$  очень мало по сравнению со средним значением модуля функции  $f_1(t)$  за время  $t$ , то почти периодическая функция будет близка к периодической, в которой параметр  $\tau$  можно представить, как *почти периодом*.

Практика эксплуатации технических изделий показывает, что к наиболее распространенным периодическим колебаниям относятся гармонические колебания, совершаемые по закону синуса или косинуса. Предположим, что положение рассматриваемого объекта в пространстве определяется только одной координатой  $X$  (рис. 3.77, а) и равновесию системы соответствует значение  $X = 0$ .

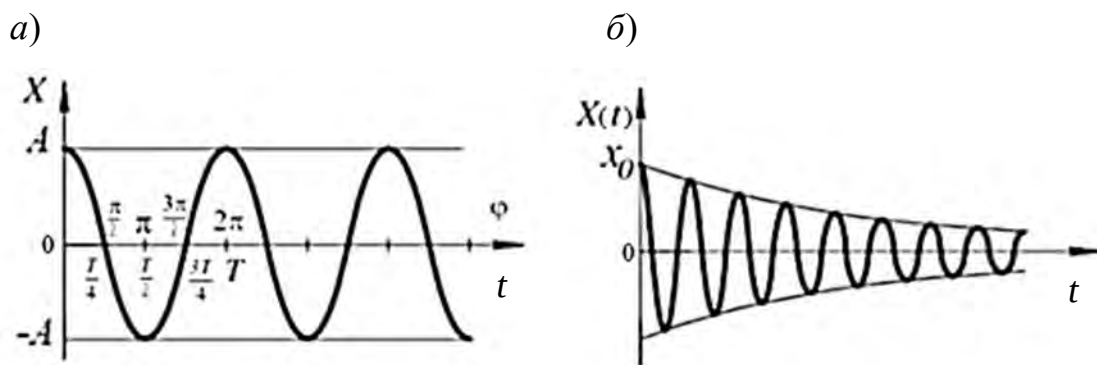


Рис. 3.77. Гармонические колебания: *a* – незатухающие; *б* – затухающие

Тогда расположение системы в пространстве в любой момент времени будет описываться выражением

$$X = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Остановимся более подробно на входящих в эту формулу параметрах. Параметр  $A$  представляет собой наибольшее отклонение от положения равновесия и называется *амплитудой* колебаний. Аргумент синуса  $\omega t + \varphi$  принято называть *фазой* колебаний, а параметр  $\varphi$  – *начальной фазой*, которой соответствует перемещение  $X_0 = A \sin(\varphi)$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

Параметр  $\omega$  называется циклической частотой, величина которой непосредственно связана с периодом колебаний  $T$  исходя из следующих соображений. Одному полному периоду колебаний отвечает приращение фазы, равное  $2\pi$  рад, т. е.  $\omega T = 2\pi$  или  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\omega = 2\pi\nu$ .

Таким образом, циклическая частота измеряется в радианах в секунду.

Колебания еще можно классифицировать, как *незатухающие* (см. рис. 3.77, *a*), *затухающие* (см. рис. 3.77, *б*) и *нарастающие*.

Затухающие колебания (см. рис. 3.77, *б*) с математической точки зрения могут быть представлены выражением

$$X(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $\delta$  – некоторая постоянная величина, характеризующая свойства рассматриваемого объекта.

Из курса высшей математики известно, что любую периодическую функцию (периодическое колебание) можно представить как сумму

гармонических колебаний путем разложения ее в ряд Фурье (рис. 3.78, кривая  $a$ ).

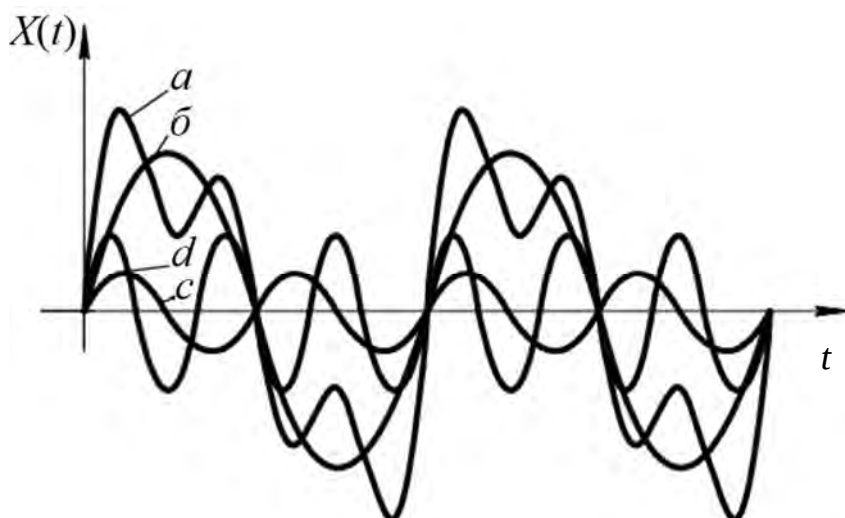


Рис. 3.78. Разложение в ряд Фурье периодического колебания [4]

В число слагаемых этой суммы входит гармоническое колебание с наименьшей частотой (см. рис. 3.78, кривая  $б$ ), которая называется *основной частотой* или *первой гармоникой*, а также *основным тоном*. Остальные частоты разложения в ряд Фурье кратны первой гармонике и называются высшими гармониками или обертонами.

При анализе колебательных процессов упругих систем важно знать, какое количество параметров определяет в данный момент времени ее расположение в пространстве. Количество таких параметров называется числом степеней свободы. На рис. 3.79 представлена колебательная система с одной степенью свободы, поскольку она устроена так, что предполагаются только вертикальные перемещения груза.

В качестве системы с двумя степенями свободы рассмотрим невесомую балку, на которой закреплены две массы (рис. 3.80).

В данном случае независимыми параметрами, описывающими положение системы в любой момент времени, являются перемещения масс  $m_1$  и  $m_2$  по отношению к положению равновесия. В действительности же реальные изделия представляют собой континуальную систему с распределенной по всему объему массой, т. е. колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы.

Поскольку анализ рассматриваемого объекта предполагается осуществлять с помощью CAD-/CAE-системы, где используется алгоритм метода конечных элементов, то в этом случае число степеней свободы рассматриваемого объекта будет соответствовать количеству степеней свободы, заложенных в разработанной конечно-элементной модели.

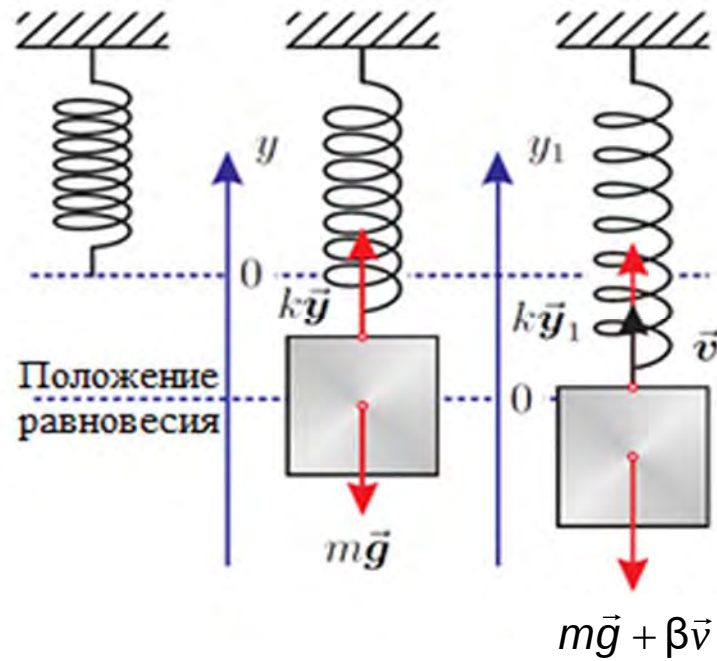


Рис. 3.79. Колебательная система с одной степенью свободы

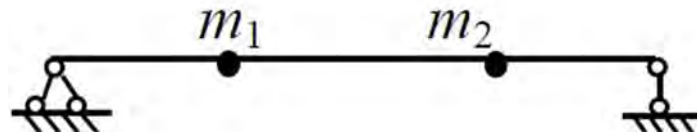


Рис. 3.80. Невесомая балка с зафиксированными на ней двумя массами

В методе конечных элементов было показано, что уравнение движения, описывающее колебательный процесс твердого деформируемого объекта при отсутствии диссипативных сил, выведенного в начальный момент из состояния равновесия, может быть описано с помощью следующего выражения:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0,$$

где  $[M]$ ,  $[K]$  – матрица масс и матрица жесткости конечно-элементной модели соответственно;  $\{\ddot{\delta}\}$ ,  $\{\delta\}$  – вектор-столбцы узловых ускорений и перемещений.

Решение данного уравнения, соответствующее гармоническим колебаниям с частотой  $\omega$ , можно представить в виде

$$\{\delta\} = \{\varphi\} \sin(\omega t),$$

где  $\{\varphi\}$  – вектор-столбец, характеризующий форму колебаний.

При подстановке этого выражения в уравнение движения приходим к следующему соотношению:

$$([K] - \omega^2 [M]) = 0.$$

Это выражение представляет собой систему однородных линейных алгебраических уравнений, которая имеет ненулевое решение только при условии, когда определитель матрицы равен нулю, т. е.

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0.$$

Данное выражение в механике твердого деформируемого тела называется *вековым* или *характеристическим уравнением*. Это уравнение для конечно-элементной модели с числом степеней свободы, равным  $n$ , имеет  $n$  положительных корней, называющихся *собственными частотами* колебаний  $\omega_n$ , и, соответственно,  $n$  *форм колебаний*  $\{\varphi_n\}$ . Каждой *собственной частоте* соответствует своя *собственная форма колебаний*, упорядоченный набор собственных частот образует спектр собственных частот. При этом прослеживается следующая тенденция: чем ниже частота колебаний, тем бóльшие амплитуды соответствуют данной форме. С другой стороны, величина амплитуды напрямую связана с величинами деформаций и напряжений. Поэтому при проведении динамического анализа ограничиваются определением нескольких низших частот и форм колебаний.

На рис. 3.81 приведены формы собственных колебаний балки, имеющей три степени свободы.

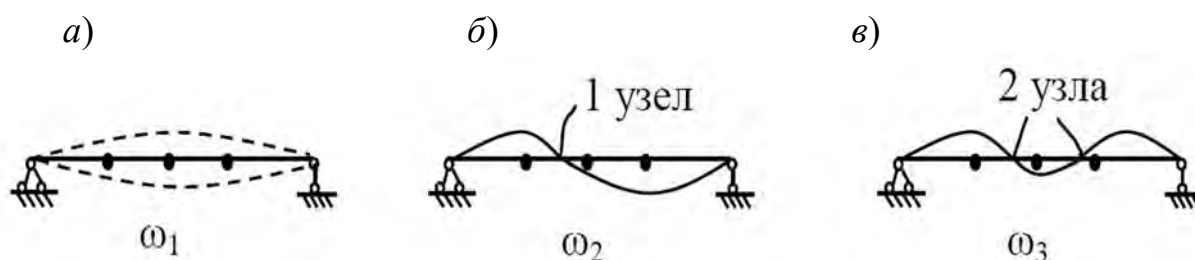


Рис. 3.81. Формы колебаний рассматриваемой балки: *а* — первая частота и форма колебаний; *б* — вторая частота и форма колебаний; *в* — третья частота и форма колебаний

Из приведенного рисунка видно, что чем выше собственная частота, тем сложнее форма колебаний. Кроме того, следует отметить, что наибольший вклад в потенциальную энергию упругого деформирования вносят

формы колебаний с наиболее низкими частотами. Поэтому в практике конечно-элементного анализа, как правило, ограничиваются тремя-пятью наиболее низкими частотами.

Механические колебания классифицируются по причине их вызвавшей. В связи с этим механические колебания делятся на следующие четыре группы: *свободные колебания*, *вынужденные колебания*, *параметрические колебания* и *автоколебания*.

*Свободные колебания* возникают в изолированной системе в результате внешнего воздействия, приводящего к начальному отклонению от положения равновесия. Затем, благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие, инициируются колебания. Таким образом, энергия, необходимая для обеспечения колебательного процесса, поступает извне в начальный момент возбуждения колебаний. Такие колебания происходят с частотой, значение которой обусловлено исключительно только свойствами самой колебательной системы. Данную частоту и принято называть *собственной частотой* колебаний. В реальных условиях свободные колебания из-за потерь энергии в системе всегда являются затухающими, вместе с тем при анализе свободных колебаний указанными потерями энергии, как правило, пренебрегают.

*Вынужденными колебаниями* называется колебательный процесс, когда на протяжении всего отрезка времени к системе приложена внешняя периодически изменяющаяся нагрузка. Характерной особенностью вынужденных колебаний является то, что они происходят с частотой возмущающей силы. Таким образом, характер колебательного процесса в данном случае определяется не только свойствами системы, но существенно зависит также от внешней нагрузки. На протяжении всего колебательного процесса осуществляется непрерывное поступление энергии извне.

Пример вынужденных колебаний представлен на рис. 3.82.

В данном примере груз зафиксирован на валу в месте расположения эксцентрика. В процессе вращения вала груз будет перемещаться в вертикальном направлении. Частота вертикальных перемещений груза будет равна частоте вращения вала.

В случае совпадения частоты вынуждающей силы с частотой собственных колебаний изделия возникает явление *резонанса*. Оно характеризуется резким возрастанием амплитуды колебаний (рис. 3.83).

Кривые 1–4 на рис. 3.83 характеризуют различные значения сил трения в колебательной системе. Кривая 1 описывает амплитуду колебаний системы в зависимости от частоты вынуждающей силы при отсутствии сил трения.

К разряду *параметрических* относятся колебания упругой системы, в процессе которых периодически изменяются некоторые параметры

объекта, такие как жесткость. Внешние нагрузки при этом не связаны непосредственно с колебательным процессом. В качестве примера таких колебаний может послужить вращающийся вал некруглого поперечного сечения (имеющего существенно различающиеся главные моменты инерции поперечного сечения) с закрепленным на нем массивным телом. Внешней нагрузкой в данном случае являются силы гравитации.

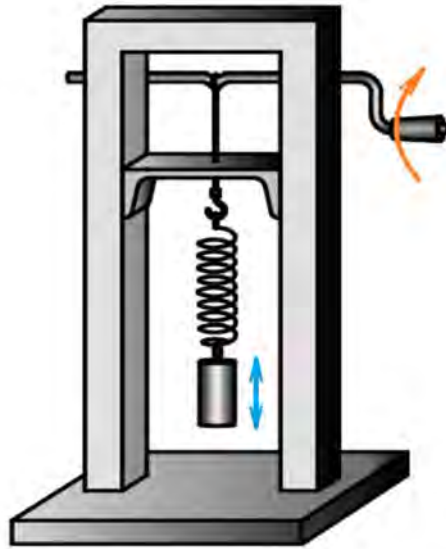


Рис. 3.82. Пример вынужденных колебаний

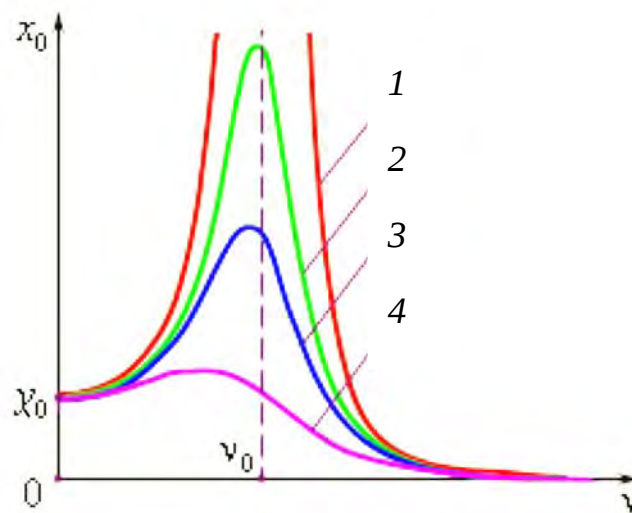


Рис. 3.83. Явление резонанса

*Автоколебаниями* называются процессы, при которых система сама регулирует потребление энергии от внешнего источника. Автоколебания являются незатухающими колебаниями и возникают при отсутствии внешних периодических воздействий. Свойства колебательного процесса определяются исключительно устройством самой колебательной системы.

Примерами автоколебательных систем являются: флаттер (колебания крыла самолета от воздействия набегающего воздушного потока), трепетание флага на ветру, механические часы (рис. 3.84).

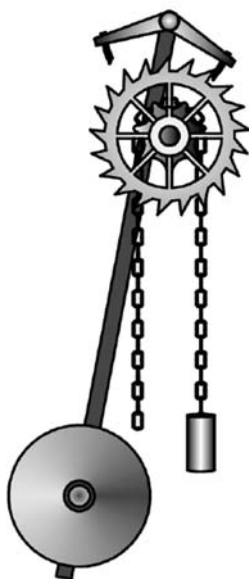


Рис. 3.84. Пример автоколебательного процесса

Наряду с отмеченными выше классификациями, существует еще и классификация по виду напряженно-деформированного состояния, испытываемого исследуемым объектом на протяжении колебательного процесса. Применительно к стержневым объектам различают продольные колебания стержней, крутильные колебания валов, поперечные колебания балок. При рассмотрении колебательного процесса реальных изделий, испытывающих сложное напряженное состояние, такого рода классификация менее уместна. Вместе с тем отдельные фрагменты объекта могут испытывать напряженно-деформированное состояние, похожее на элементы данной классификации.

### ***Исходные данные***

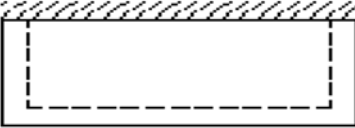
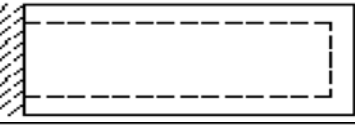
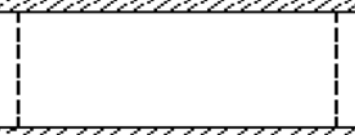
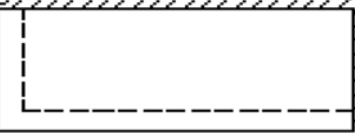
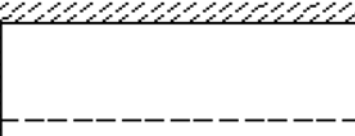
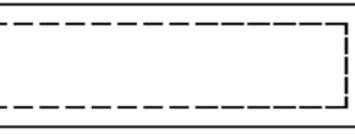
В табл. 3.13 приведены исходные данные к проведению численного анализа по определению собственных частот и форм колебаний пластин.

В табл. 3.13 используются следующие обозначения:  $a$ ,  $b$  – габаритные размеры пластинки (рис. 3.85). На рис. 3.86 приведены условные обозначения способов крепления пластинки.

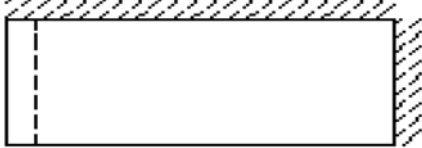
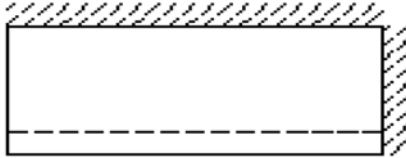
При выполнении лабораторной работы необходимо определить четыре собственных частоты и соответствующие им формы колебаний пластины. Исходные данные пластины требуется взять из табл. 3.13 в соответствии с

индивидуальным номером в журнале учебной группы. Материал пластины – простая углеродистая сталь, механические характеристики которой имеются в базе данных SolidWorks Simulation.

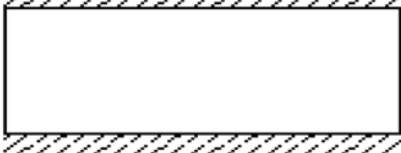
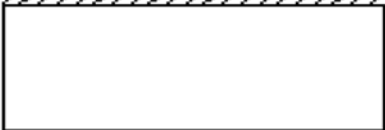
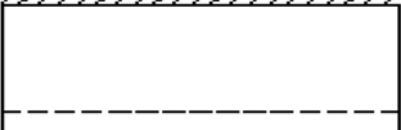
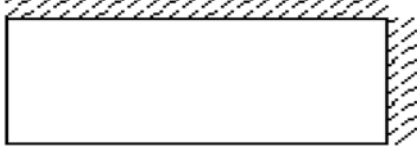
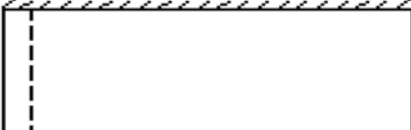
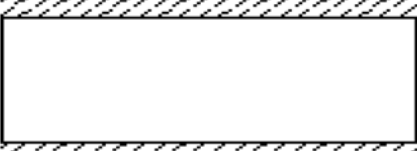
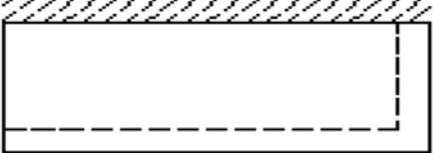
Табл. 3.13. Исходные данные

| Номер<br>схемы | Эскиз схемы закрепления пластинки                                                   | Габаритные размеры<br>пластинки |         |         |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---------|---------|
|                |                                                                                     | $h$ , мм                        | $a$ , м | $b$ , м |
| 1              | 2                                                                                   | 3                               | 4       | 5       |
| 1              |    | 10                              | 3,0     | 2,0     |
| 2              |    | 11                              | 3,1     | 2,1     |
| 3              |   | 12                              | 3,2     | 2,2     |
| 4              |  | 13                              | 3,3     | 2,3     |
| 5              |  | 14                              | 3,4     | 2,4     |
| 6              |  | 15                              | 3,5     | 2,5     |
| 7              |  | 16                              | 3,6     | 2,6     |
| 8              |  | 17                              | 3,7     | 2,7     |
| 9              |  | 18                              | 3,8     | 2,8     |

Продолжение табл. 3.13

| 1  | 2                                                                                   | 3  | 4   | 5   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-----|-----|
| 10 |    | 19 | 3,9 | 2,9 |
| 11 |    | 10 | 3,0 | 2,0 |
| 12 |    | 11 | 3,1 | 2,1 |
| 13 |    | 12 | 3,2 | 2,2 |
| 14 |   | 13 | 3,3 | 2,3 |
| 15 |  | 14 | 3,4 | 2,4 |
| 16 |  | 15 | 3,5 | 2,5 |
| 17 |  | 16 | 3,6 | 2,6 |
| 18 |  | 17 | 3,7 | 2,7 |
| 19 |  | 18 | 3,8 | 2,8 |
| 20 |  | 19 | 3,9 | 2,9 |

Окончание табл. 3.13

| 1  | 2                                                                                   | 3  | 4   | 5   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-----|-----|
| 21 |    | 10 | 3,0 | 2,0 |
| 22 |    | 11 | 3,1 | 2,1 |
| 23 |    | 12 | 3,2 | 2,2 |
| 24 |    | 13 | 3,3 | 2,3 |
| 25 |  | 14 | 3,4 | 2,4 |
| 26 |  | 15 | 3,5 | 2,5 |
| 27 |  | 16 | 3,6 | 2,6 |
| 28 |  | 17 | 3,7 | 2,7 |
| 29 |  | 18 | 3,8 | 2,8 |
| 30 |  | 19 | 3,9 | 2,9 |

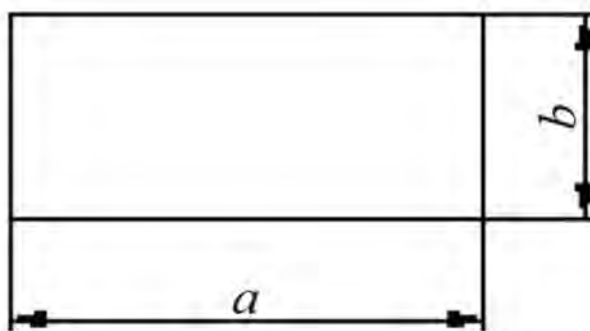


Рис. 3.85. Обозначения габаритных размеров пластинки

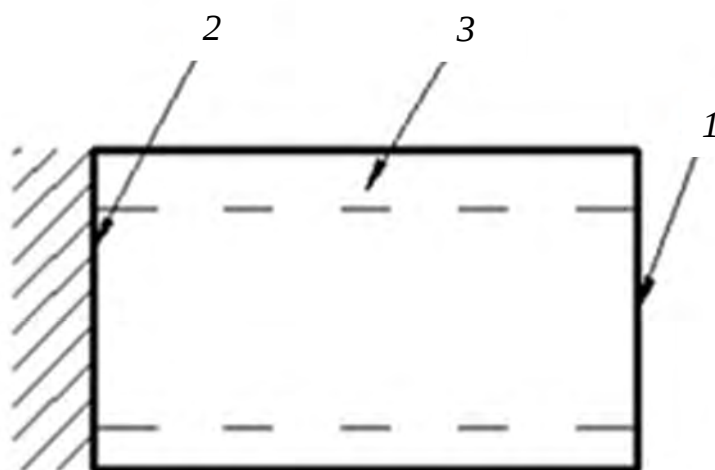


Рис. 3.86. Условные обозначения способов крепления пластинки: 1 – свободный от закрепления край; 2 – жестко защемленный край; 3 – свободно опертый край

**Внимание!** При задании условий закрепления пластины для случаев, когда не используется способ фиксации *жестко защемленный край* (см. табл. 3.13, схемы 8, 9, 16–19), необходимо предусмотреть ограничение перемещений в плоскости пластины.

### ***Пример выполнения лабораторной работы***

Для проведения анализа в SolidWorks Simulation после создания твердотельной модели рассматриваемого объекта необходимо запустить новое исследование *Частота* (рис. 3.87).

После выполнения этого действия в соответствии с процедурой метода конечных элементов необходимо: задать условия закрепления в пространстве исследуемого объекта; механические свойства материала, из которого он изготовлен; создать сетку разбиения изделия на конечные элементы; если учитывается внешнее нагружение, привести сведения о величине и характере нагрузки. На рис. 3.87 показаны следующие условия

закрепления: длинная сторона жестко закреплена, а остальные стороны свободно оперты (см. табл. 3.13, схема 1).

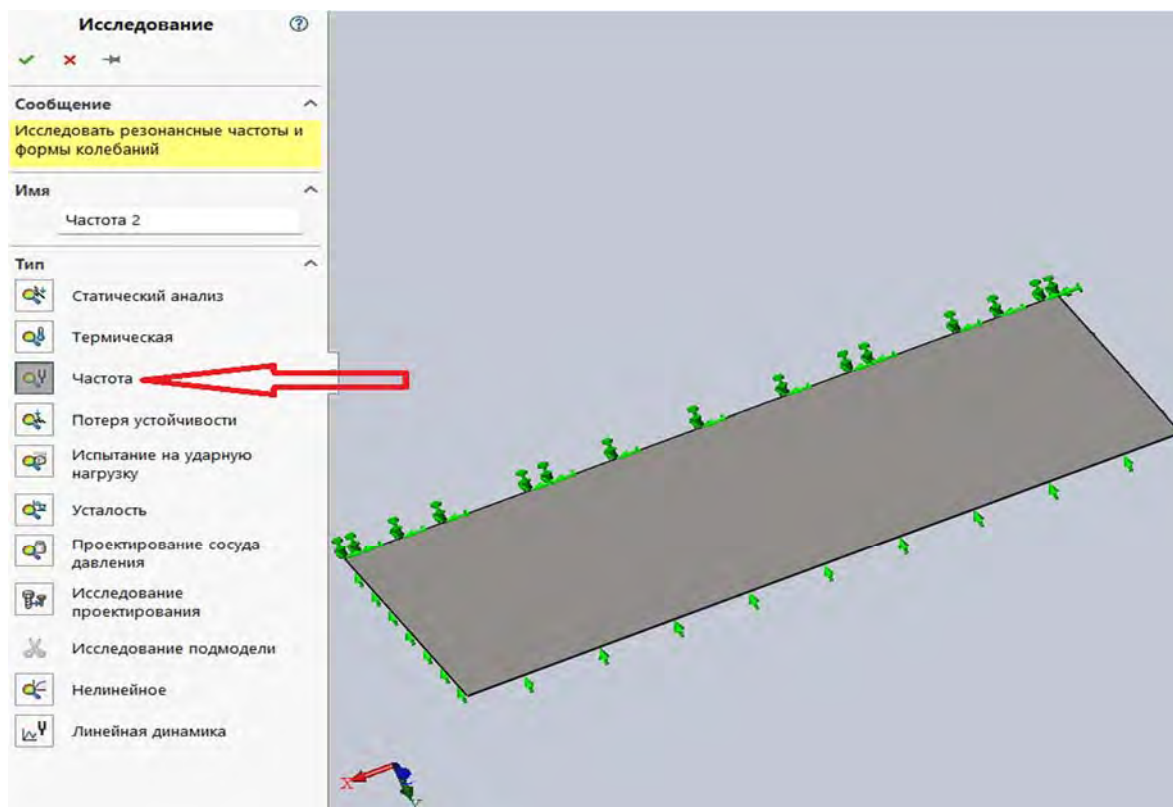


Рис. 3.87. Запуск программы *Частота* SolidWorks Simulation

Для определения собственных частот анализируемого объекта не обязательно задавать внешнюю нагрузку. Вместе с тем в случаях, когда внешнюю нагрузку необходимо учитывать после ее задания, в разделе *Свойства* (рис. 3.88) и подразделе *решающая программа* выбрать программу *Direct sparse* либо установить параметр *автоматический выбор решающей программы* (см. рис. 3.88). Кроме того, в подразделе *параметры* (см. рис. 3.88) следует указать, какое количество собственных частот предполагается определить.

В рассматриваемом примере определяются первые четыре частоты.

После выполнения этой процедуры запускается разрешающая программа *Выполнить* (рис. 3.89).

В результате выполнения данного расчета была сформирована база данных по определению четырех частот и форм колебаний (рис. 3.90).

На рис. 3.91–3.94 приведены формы и частоты соответствующих колебаний.

Как видно из рис. 3.91, первая собственная частота равна 9,7473 Гц, а форма колебаний представлена эпюрой РЕЗАМП (результатирующая амплитуда колебаний).

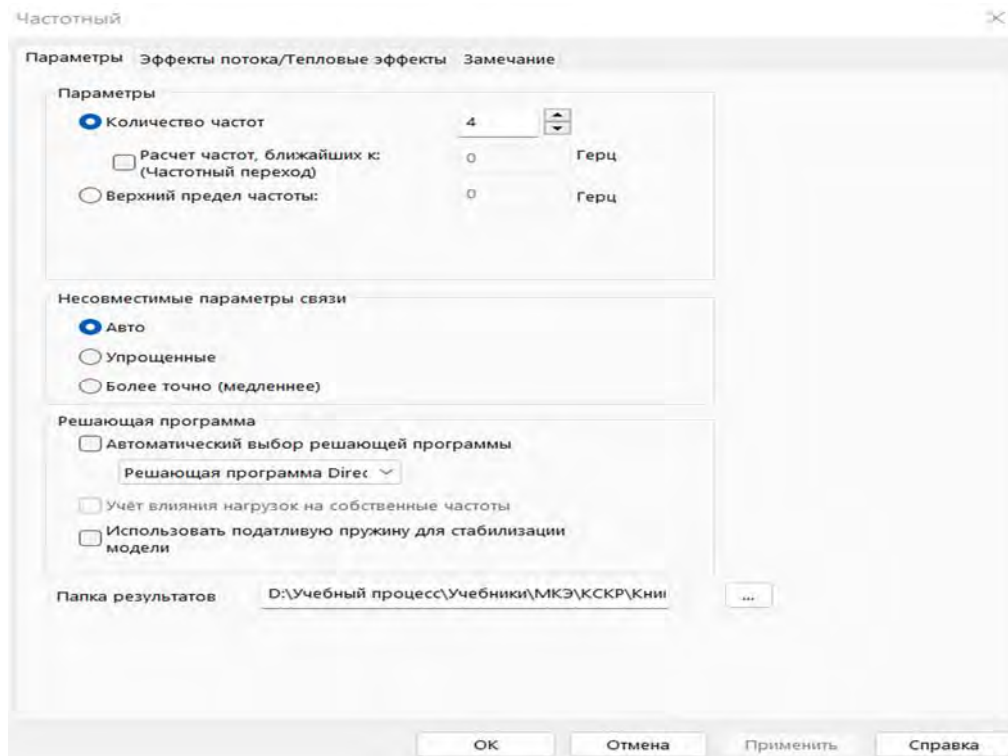


Рис. 3.88. Задание свойств частотного анализа

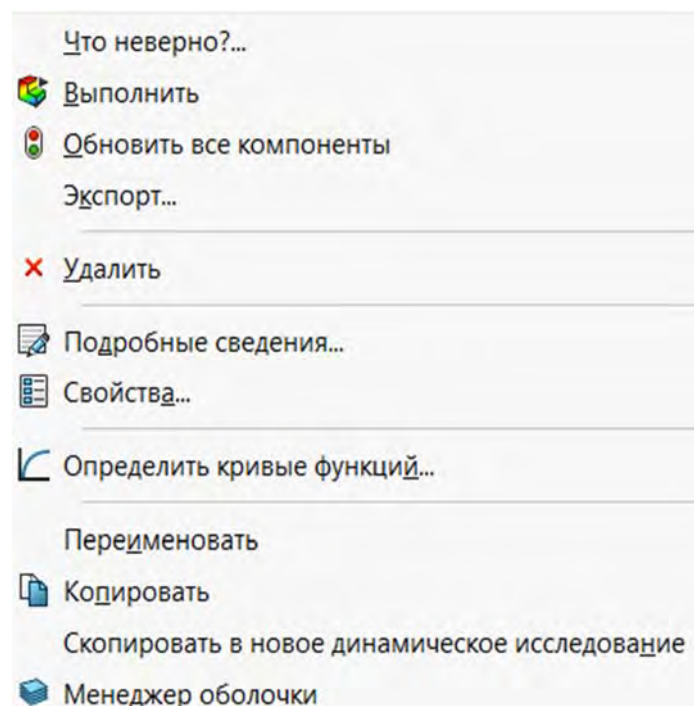


Рис. 3.89. Запуск разрешающей программы поиска собственных частот и соответствующих им форм собственных колебаний

На рис. 3.92–3.94 представлены частоты и формы колебаний трех последующих гармоник.

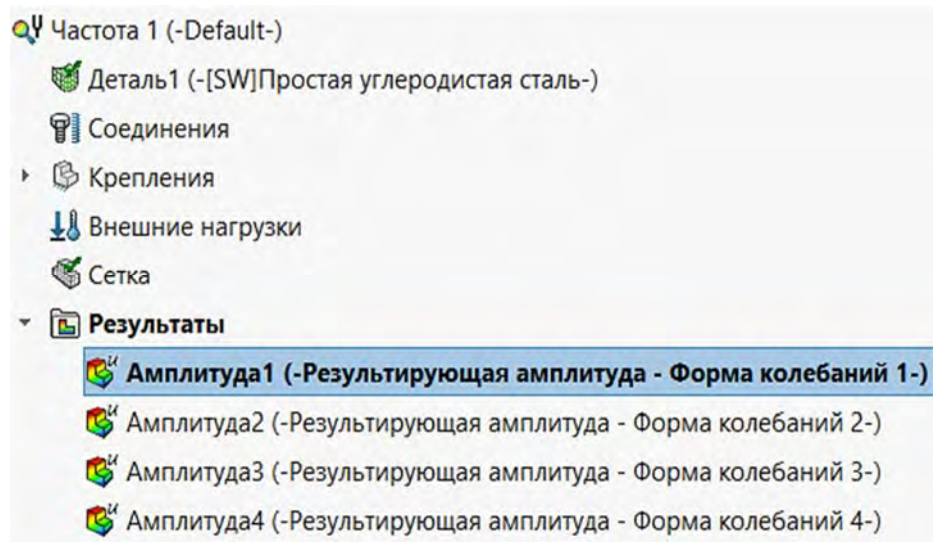


Рис. 3.90. Четыре частоты и соответствующие им формы колебаний, занесенные в базу данных SolidWorks Simulation

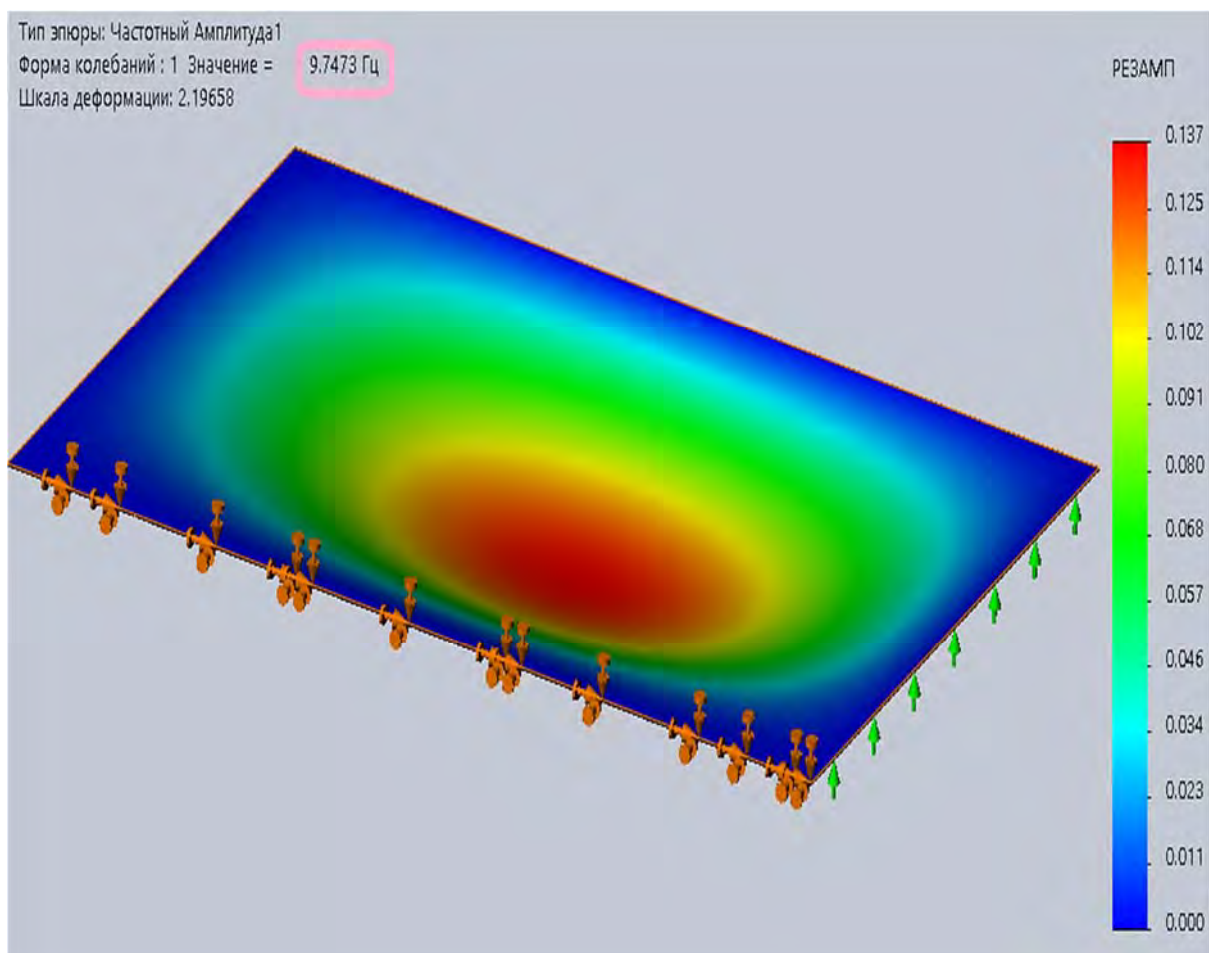


Рис. 3.91. Первая собственная частота и эюра формы собственных колебаний

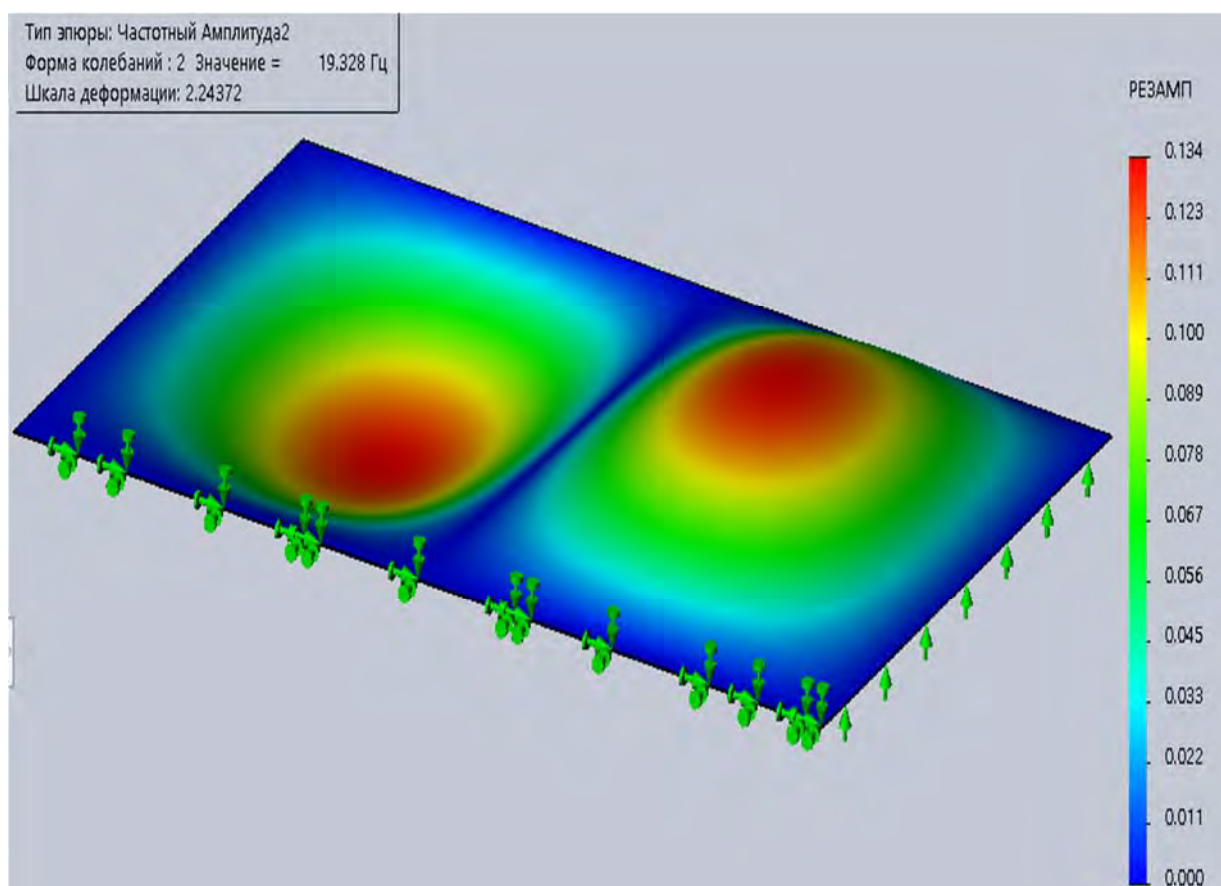


Рис. 3.92. Вторая собственная частота и форма колебаний пластинки

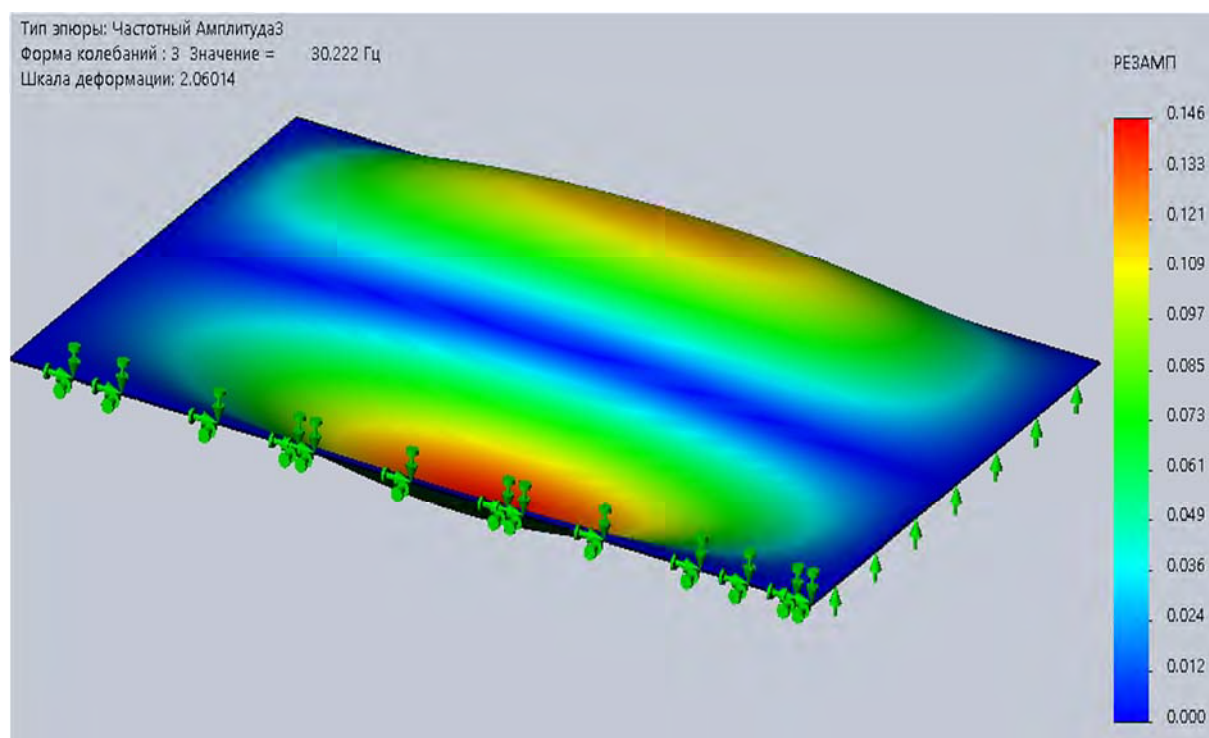


Рис. 3.93. Третья собственная частота и форма колебаний пластинки

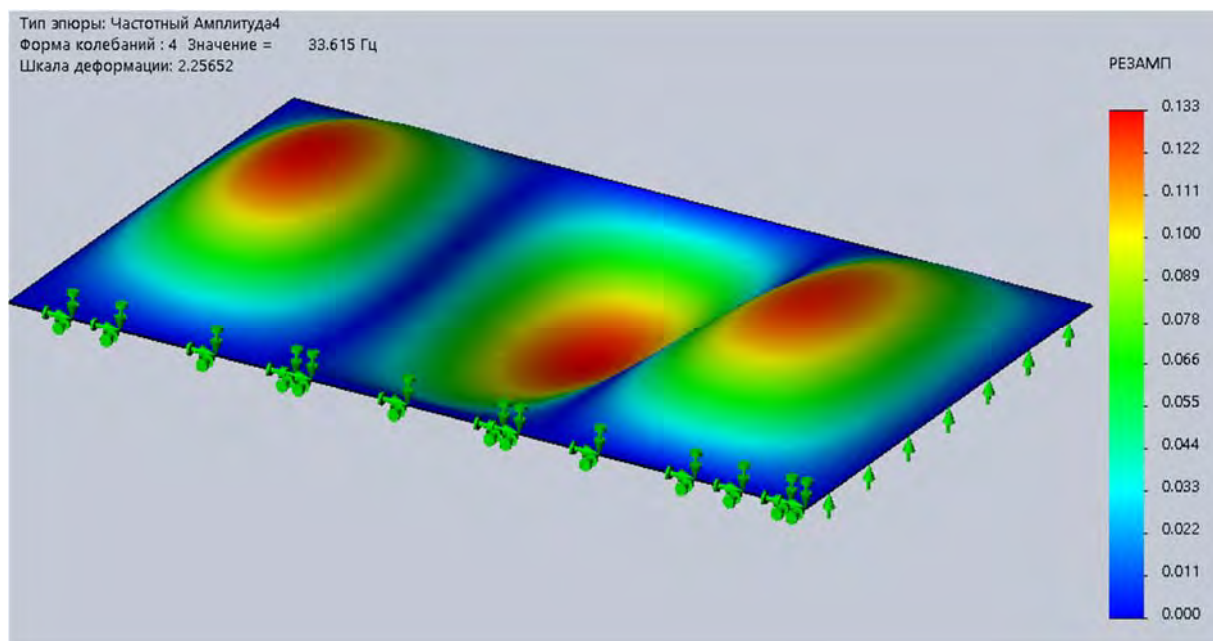


Рис. 3.94. Четвертая собственная частота и форма колебаний пластинки

### ***Контрольные вопросы***

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Что подразумевается под термином «механические колебания»?
3. Приведите примеры простейших механических колебаний.
4. Какой параметр называется *периодом колебаний*?
5. Какой параметр называется *частотой колебаний*?
6. В каких единицах измеряется частота колебаний?
7. Разъясните понятие «*почти периодические колебания*».
8. Какие колебания называются *гармоническими*?
9. Что подразумевается под термином «*амплитуда колебаний*»?
10. Поясните термин «*фаза колебаний*».
11. Что подразумевается под терминами «*основной тон*», «*первая гармоника*»?
12. Разъясните термины «*обертон*» и «*высшие гармоники*».
13. Что называется *колебательной системой с одной степенью свободы*? Приведите пример такой системы.
14. Что называется *числом степеней свободы* колебательной системы?
15. Как определяется количество степеней свободы системы, представленной в виде конечно-элементной модели?
16. Поясните термин «*континуальная система*».
17. Какое выражение называется *вековым* или *характеристическим уравнением*?

18. Какой параметр колебательного процесса называется *собственная частота колебаний*?

19. Какой параметр колебательного процесса называется *собственная форма колебаний*?

20. Какое количество собственных частот и форм колебаний может иметь конечно-элементная модель?

21. Какие колебания относятся к *свободным колебаниям*? Приведите пример.

22. Какие колебания относятся к *вынужденным колебаниям*? Приведите пример.

23. Какие колебания относятся к *параметрическим колебаниям*? Приведите пример.

24. Какие колебания относятся к *автоколебаниям*? Приведите пример.

25. Поясните явление *резонанс*.

26. Какие частоты из спектра собственных частот наиболее неблагоприятны с позиций прочности?

### **3.6. Лабораторная работа № 6. Анализ изделий с позиций усталостного разрушения**

**Цель работы:** ознакомление с процедурой проведения имитационного моделирования работоспособности изделий с позиций усталостной прочности.

#### ***Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы***

Практика эксплуатации изделий, подверженных воздействию циклически изменяющихся во времени нагрузок, показала, что данные объекты могут разрушаться через определенный промежуток времени даже и при напряжениях значительно меньших предела прочности без заметных остаточных деформаций. Первоначально возникло предположение, что металл изделия по истечении некоторого времени начинает, как бы *уставать* и разрушаться при нагрузках меньше предельных. Последующие исследования в этой области показали неизменность механических свойств металла в зависимости от временного фактора эксплуатации, но термин *усталость материала* исторически закрепился.

Механизм усталостного разрушения может быть пояснен следующим образом: реальный материал изделия не является идеально однородным и изотропным, поскольку на микроуровне он состоит из множества кристаллов (зерен). По этой причине в результате нагружения внутренние усилия распределяются неравномерно по плоскости сечения (рис. 3.95).

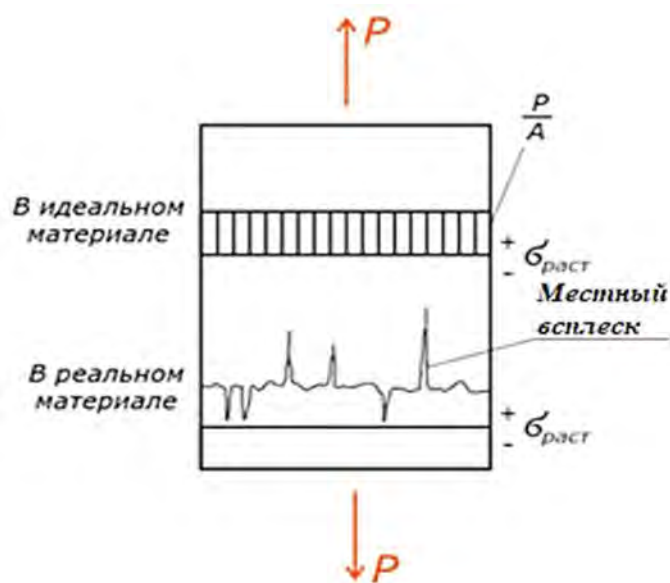


Рис. 3.95. Распределение внутренних усилий в стальной полосе в идеальном и реальном материалах

Местные всплески внутренних усилий (см. рис. 3.95) приводят к деформации и разрушению некоторых зерен, в области расположения которых зарождается микротрещина. После снятия нагрузки в изделии фиксируются остаточные напряжения, которые при взаимодействии с внутренними усилиями от последующего нагружения способствуют дальнейшему развитию микротрещин.

В дальнейшем по мере накопления количества циклов нагружения микротрещина продолжает разрастаться, захватывая все новые и новые объемы, постепенно превращаясь в магистральную макротрещину. Так происходит до тех пор, пока несущая площадь поперечного сечения становится меньше некоторого предельного значения и в результате происходит спонтанное разрушение.

Циклический процесс развития микротрещины сопровождается пластическим деформированием материала, расположенного в области вершины трещины, поэтому существенных остаточных деформаций при разрушении не наблюдается.

В процессе циклического нагружения трещина многократно раскрывается и схлопывается, при этом две поверхности ее трутся друг о друга. Данные поверхности в результате становятся более гладкими, иногда

полированными к моменту разрушения. Это обстоятельство является причиной наличия на поверхности разрушения двух зон – одна гладкая, а вторая мелкозернистая. Первую из них принято называть *зоной усталостного разрушения*, а вторую – *зоной долома*. Наличие этих двух зон в месте разрушения объекта однозначно указывает на причину – *усталостное разрушение*.

Таким образом, окончательно под *усталостью материала* подразумевается разрушение изделия в процессе постепенного накопления повреждений, обуславливающих появление усталостной трещины при многократном циклическом нагружении.

*Выносливостью* называется способность материала сопротивляться воздействию циклически изменяющихся нагрузок, не разрушаясь на протяжении определенного промежутка времени.

Анализ способности материала объекта сопротивляться усталостному разрушению в процессе циклического нагружения имеет очень большое значение, поскольку такие ответственные изделия, как оси железнодорожных вагонов, поршневые пальцы и многие другие детали машин, могут выходить из строя по причине усталостного разрушения. Для проведения такого анализа важно знать, каким образом изменялось нагружение изделия на протяжении одного цикла или периода  $T$  (рис. 3.96).

Циклы нагружения, а следовательно, и циклы напряжений могут иметь различную форму (рис. 3.97), но это, как показывают экспериментальные данные, практически не сказывается на усталостной прочности объекта исследований.

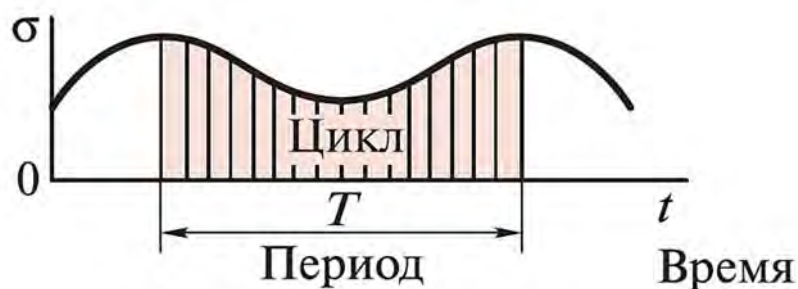


Рис. 3.96. Иллюстрация понятий «цикл нагружения» (цикл напряжений) и «период»  $T$



Рис. 3.97. Возможные формы циклов нагружения

Для анализа циклов напряжений (рис. 3.98) используются следующие характерные параметры:

- $\sigma_{\max}$  – наибольшие напряжения за цикл нагружения;
- $\sigma_{\min}$  – наименьшие напряжения за цикл нагружения;
- $\sigma_a$  – амплитуда цикла,  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ ;
- $\sigma_m$  – среднее напряжение за цикл,  $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ ;
- $T$  – период цикла (промежуток времени между двумя одинаковыми состояниями цикла);
- $r$  – коэффициент асимметрии цикла,  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ .

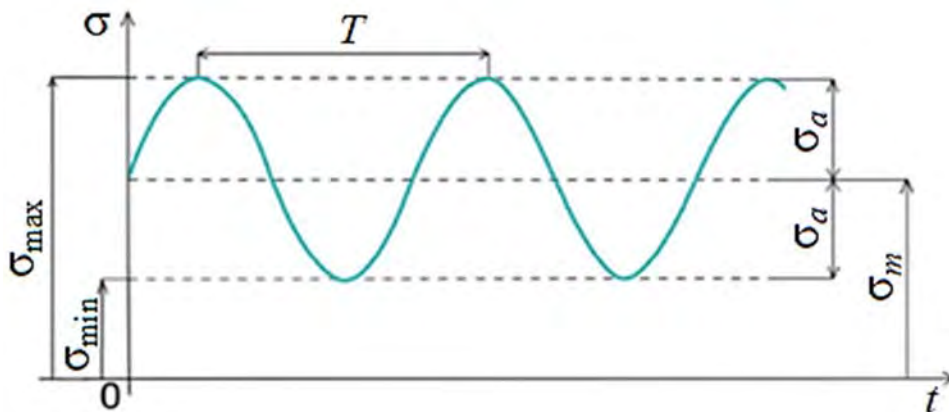


Рис. 3.98. Характерные параметры циклов напряжений

Циклы колебаний, имеющие одинаковые значения коэффициента асимметрии  $r$ , называются *подобными*.

Циклы подразделяются на *симметричные* (рис. 3.99), *пульсационные* или *отнулевые* (рис. 3.100) и *асимметричные* (см. рис. 3.98).

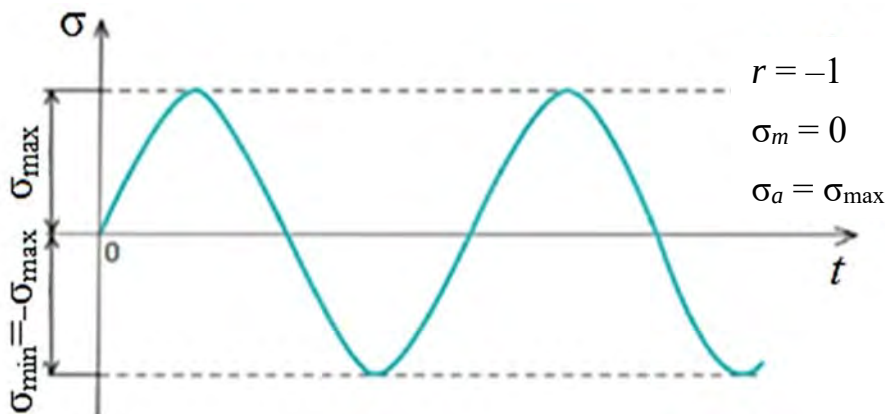


Рис. 3.99. Симметричный цикл нагружения

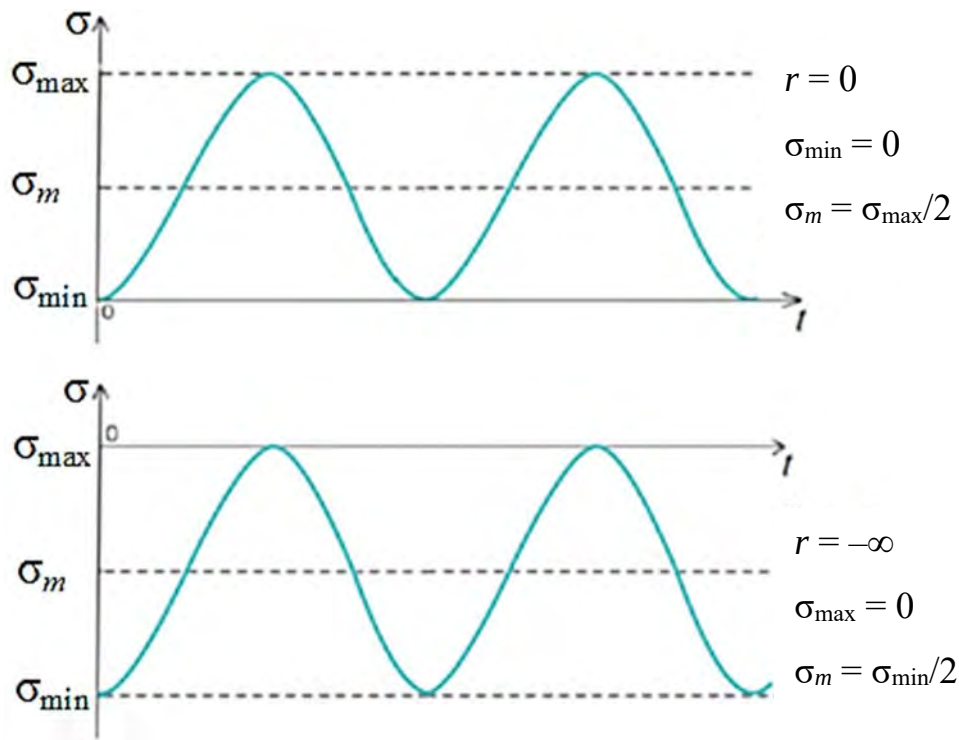


Рис. 3.100. Пульсационные или отнулевые циклы

Для расчетов на прочность при действии повторно-переменных нагрузок необходимо знать *предел выносливости (усталости) материала*. Здесь следует отметить, что *пределом выносливости (усталости) материала* называется наибольшая величина периодически меняющегося напряжения, которому может сопротивляться материал без разрушения неограниченно долго. *Предел выносливости материала* обозначается  $\sigma_r$ , где индекс  $r$  является коэффициентом асимметрии цикла. Так, например, предел выносливости образца при симметричном цикле нагружения обозначается  $\sigma_{-1}$ . Испытания на усталость проводят при растяжении-сжатии, изгибе и кручении; при симметричных и асимметричных циклах напряжений или деформаций; при наличии или отсутствии концентраторов напряжений и агрессивных сред; при комнатной, повышенной или пониженной температурах; во много- или малоцикловой упругой и упругопластической областях. Испытания проводятся на специальных машинах и образцах, имеющих стандартную форму и размеры. Для проведения испытаний используют 6...12 одинаковых образцов. Наиболее простым и распространенным является испытание образцов при симметричном цикле нагружения. Простейшим примером является вращающийся вал, испытывающий в центральной части чистый изгиб под действием постоянной нагрузки (рис. 3.101).

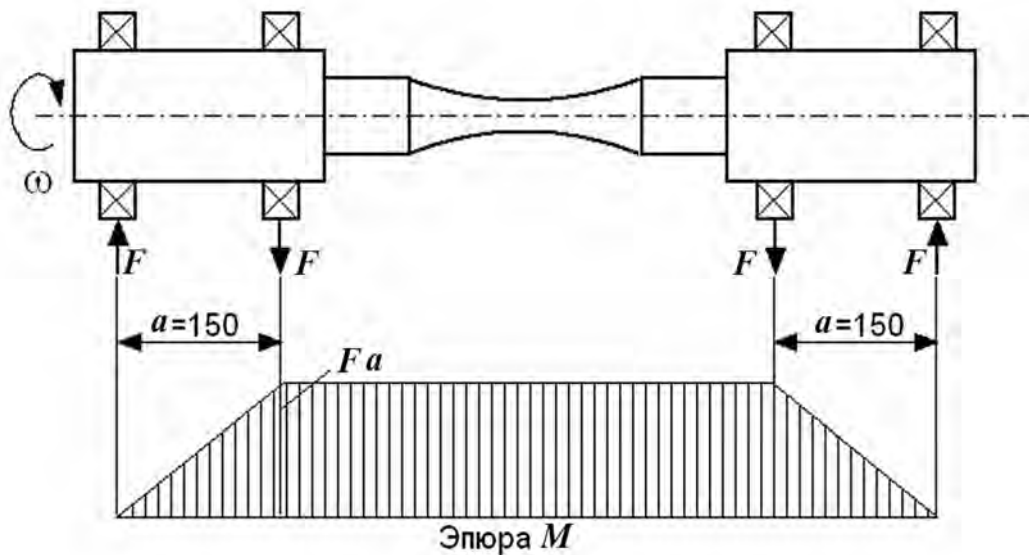


Рис. 3.101. Схема нагружения образца и эпюра изгибающих моментов

В начальный момент времени верхние слои образца сжаты. При повороте образца на  $180^\circ$  эти слои оказываются в растянутой области. Таким образом, при вращении образца материал будет испытывать попеременные напряжения, изменяющиеся по наружному диаметру от  $\sigma_{\min}$  до  $\sigma_{\max}$ . Для каждого образца испытания осуществляются при различных по величине постоянных нагрузках  $F$ , при этом фиксируется количество циклов  $n$ , которые образец выдержал до разрушения. Вполне очевидно, что чем больше действующие в образце напряжения, тем меньше циклов нагружения выдержит образец до разрушения. По результатам проведенных испытаний строится диаграмма усталости в координатах  $\sigma_{\max}-n$  (рис. 3.102). Полученную зависимость принято называть *кривой Веллера*. Характерной особенностью данной кривой является то, что она имеет горизонтальную асимптоту. Эта асимптота находится на расстоянии от оси абсцисс, равном пределу выносливости (пределу усталости)  $\sigma_{-1}$  (см. рис. 3.102).

Часто данную зависимость еще представляют в полулогарифмической системе координат (рис. 3.103) [12].

При проведении усталостных испытаний используется такое понятие, как «*базовое число циклов*» (см. рис. 3.102). Экспериментально было установлено, что, например, стальной образец, выдержав  $10^7$  циклов, может выдержать неограниченно много циклов нагружения. Поэтому для стальных образцов после прохождения  $10^7$  циклов опыты прекращают. Наибольшее напряжение, которое выдержал образец на протяжении  $N = 10^7$  циклов, принимается за предел выносливости стального материала  $\sigma_{-1}$ . Следует иметь в виду, что у различных материалов, например у

алюминия, медных сплавов, сварных соединений и т. д., значения *базового* числа циклов существенно отличаются друг от друга.

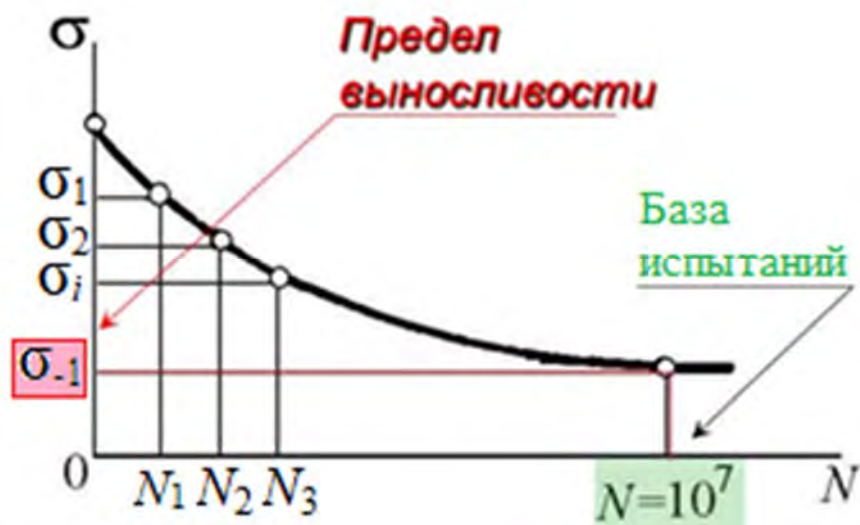


Рис. 3.102. Определение усталостной кривой (кривой Веллера)

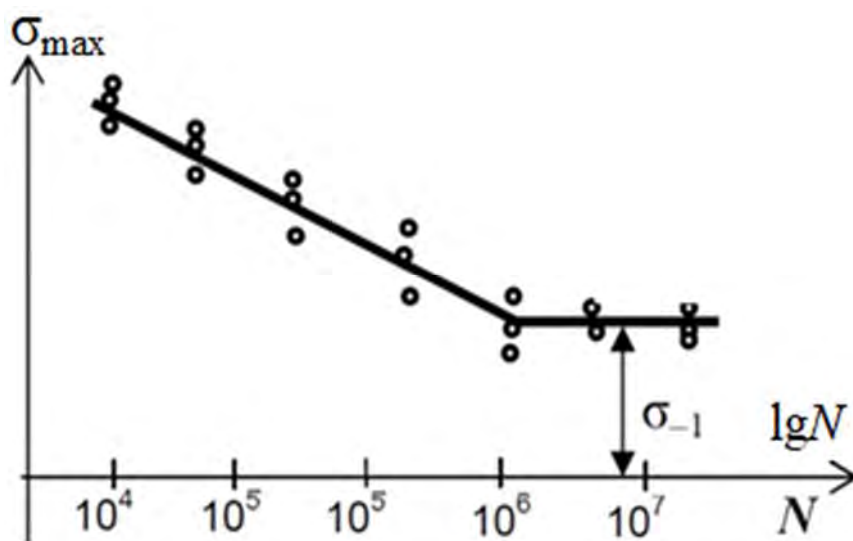


Рис. 3.103. Кривая усталости в полулогарифмической системе координат

Выше был рассмотрен только один вид усталостных испытаний. На практике испытания на усталость проводят: при растяжении-сжатии; изгибе и кручении; при симметричных и асимметричных циклах нагружений; наличии или отсутствии концентраторов напряжений и агрессивных сред; при комнатной, повышенной или пониженной температурах; во много- или малоцикловой упругой и упругопластической областях. К сказанному можно добавить, что наиболее неблагоприятным с точки зрения усталостной прочности при прочих равных условиях является симметричный цикл нагружения  $r = -1$ .

Построение усталостной кривой является весьма длительным и затратным процессом, поэтому, как правило, определение предела выносливости осуществляется при симметричном цикле нагружения, как наиболее опасном, и реже при отнулевом цикле.

В результате многочисленных экспериментов были установлены приблизительные соотношения между пределами усталости при изгибе  $\sigma_{-1}^u$ , растяжении-сжатии  $\sigma_{-1}^0$ , кручении  $\tau_{-1}$ . Для стали  $\sigma_{-1}^0 = 0,65 \sigma_{-1}^u$ ; чугуна  $\sigma_{-1}^0 = 0,7 \sigma_{-1}^u$ , сталей и легких сплавов  $\tau_{-1} = 0,55 \sigma_{-1}^u$ , чугуна  $\tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1}^u$ . В свою очередь, пределы усталости стали при кручении и изгибе могут быть выражены через предел прочности  $\sigma_B$  следующим образом:  $\sigma_{-1}^u = 0,4 \sigma_B$ ;  $\tau_{-1} = 0,22 \sigma_B$ .

На усталостную прочность деталей машин оказывает влияние множество факторов, среди которых наиболее существенными являются концентрация напряжений, состояние поверхности изделия, масштабный фактор и наличие агрессивной среды.

Примером наличия концентрации напряжений может послужить растянутая пластина, на оси симметрии которой сделано круглое отверстие [12] (рис. 3.104).

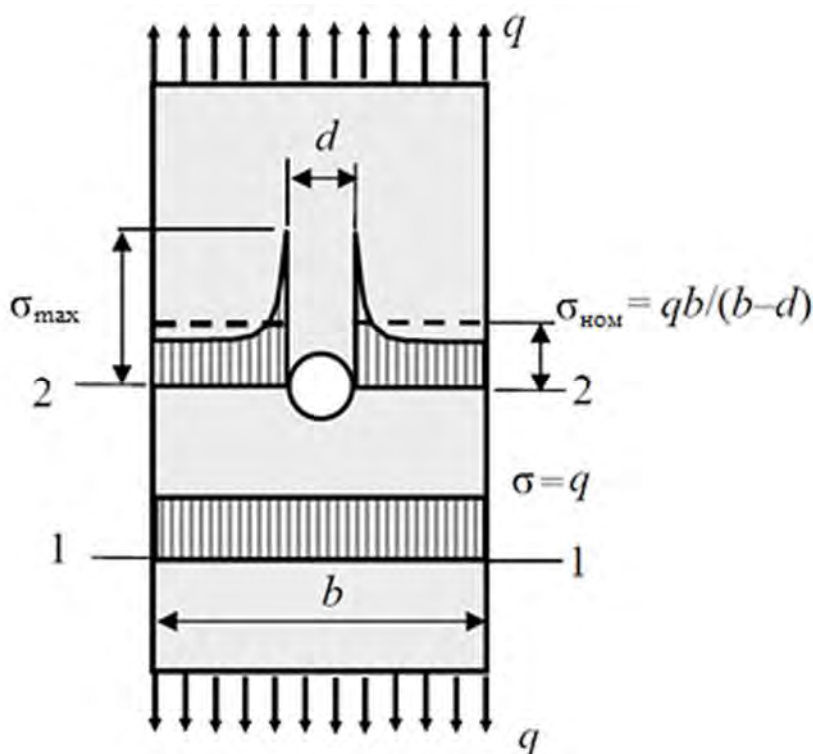


Рис. 3.104. Явление концентрации напряжений вблизи отверстия

Как видно из приведенного рисунка, напряжения в зоне отверстия  $\sigma_{\max}$  значительно превышают номинальные напряжения  $\sigma_{\text{ном}}$ . Это явление назы-

вается концентрацией напряжений и оно характеризуется *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений*, вычисляемым по формуле

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ном}}$$

Значение теоретических коэффициентов концентрации напряжений  $\alpha_{\sigma}$  для различных случаев концентраторов можно найти в соответствующей справочной литературе. Кроме того, концентрация напряжений еще оценивается с помощью *эффективного коэффициента концентрации напряжений*

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}},$$

где  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{-1k}$  – предел выносливости образца без концентратора напряжений и образца с концентратором напряжений соответственно.

Значение эффективного коэффициента концентрации напряжений может быть найдено по следующей эмпирической формуле:

$$K_{\sigma} = 1 + m(\alpha_{\sigma} - 1),$$

где  $m$  – коэффициент чувствительности материала к местным напряжениям; для конструкционных сталей  $m = 0,6 \dots 0,8$ .

Влияние качества поверхности на усталостную прочность учитывается *коэффициентом влияния шероховатости поверхности*

$$K_F = \frac{\sigma_{-1}^F}{\sigma_{-1}},$$

где  $\sigma_{-1}^F$ ,  $\sigma_{-1}$  – пределы выносливости образцов с шероховатой и полированной поверхностями соответственно.

В результате экспериментальных исследований было установлено, что с увеличением габаритных размеров изделий (при прочих равных условиях) предел выносливости уменьшается. Объясняется это обстоятельство тем, что с ростом размеров возрастает и количество дефектов в анализируемом объекте. Влияние данного фактора учитывается *масштабным коэффициентом*

$$K_d = \frac{\sigma_{-1}^d}{\sigma_{-1}},$$

где  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{-1}^d$  – пределы усталости стандартного образца диаметром 6...10 мм и образца диаметром  $d$ , сопоставимым с поперечными размерами рассматриваемого объекта.

Расчет по определению усталостной прочности состоит в том, что фактический коэффициент запаса прочности рассматриваемого объекта  $n_r$  должен быть больше допускаемого коэффициента запаса прочности  $[n]$ :

$$n_r \geq [n].$$

Одним из подходов определения фактического коэффициента запаса прочности является расчет с использованием *диаграммы предельных амплитуд* и следующего аналитического выражения:

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{K_F K_d} + \psi \sigma_m},$$

где

$$\psi = \frac{\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0}{0,5\sigma_0}.$$

### ***Исходные данные***

В рамках освоения материала данной темы каждому из учащихся необходимо выполнить индивидуальную лабораторную работу, посвященную анализу усталостной прочности ступенчатого вала. Исходные данные к лабораторной работе приведены в табл. 3.14 и рис. 3.105. Здесь следует иметь в виду, что индивидуальные исходные данные определяются в соответствии с порядковым номером в журнале учебной группы.

При выполнении лабораторной работы материалом ступенчатого вала следует считать *простую углеродистую сталь*. Сведения об усталостных характеристиках стали имеются в базе данных SolidWorks Simulation. Данные усталостного анализа определить для цикла с коэффициентом асимметрии  $r = -1$  и количеством циклов  $n = 500000$ .

Табл. 3.14. Исходные данные к анализу ступенчатого вала при кручении на усталостную прочность

| Поряд-<br>ковый<br>номер в<br>журнале<br>учебной<br>группы | Номер<br>расчетной<br>схемы в<br>соответст-<br>вии<br>с рис. 3.105 | Значение<br>крутящих<br>моментов, Н·м |       |       | Длина участка, м |      |      |      | Диаметр<br>ступени, мм |     |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------|-------|------------------|------|------|------|------------------------|-----|
|                                                            |                                                                    | $M_1$                                 | $M_2$ | $M_3$ | $a$              | $b$  | $c$  | $e$  | $D$                    | $d$ |
| 1                                                          | 1                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,05             | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 15                     | 10  |
| 2                                                          | 2                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,08             | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 16                     | 11  |
| 3                                                          | 3                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,06             | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 17                     | 12  |
| 4                                                          | 4                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,09             | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 18                     | 13  |
| 5                                                          | 5                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,04             | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 19                     | 14  |
| 6                                                          | 6                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,07             | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 15                     | 10  |
| 7                                                          | 7                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,05             | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 16                     | 11  |
| 8                                                          | 8                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,08             | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 17                     | 12  |
| 9                                                          | 9                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,06             | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 18                     | 13  |
| 10                                                         | 10                                                                 | 5                                     | 10    | 15    | 0,09             | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 19                     | 14  |
| 11                                                         | 1                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,04             | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 15                     | 10  |
| 12                                                         | 2                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,07             | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 16                     | 11  |
| 13                                                         | 3                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,05             | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 17                     | 12  |
| 14                                                         | 4                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,08             | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 18                     | 13  |
| 15                                                         | 5                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,06             | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 19                     | 14  |
| 16                                                         | 6                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,09             | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 15                     | 10  |
| 17                                                         | 7                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,04             | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 16                     | 11  |
| 18                                                         | 8                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,07             | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 17                     | 12  |
| 19                                                         | 9                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,05             | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 18                     | 13  |
| 20                                                         | 10                                                                 | 6                                     | 11    | 16    | 0,08             | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 19                     | 14  |
| 21                                                         | 1                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,06             | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 15                     | 10  |
| 22                                                         | 2                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,09             | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 16                     | 11  |
| 23                                                         | 3                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,04             | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 17                     | 12  |
| 24                                                         | 4                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,07             | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 18                     | 13  |
| 25                                                         | 5                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,05             | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 19                     | 14  |
| 26                                                         | 6                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,08             | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 15                     | 10  |
| 27                                                         | 7                                                                  | 7                                     | 12    | 17    | 0,06             | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 16                     | 11  |
| 28                                                         | 8                                                                  | 5                                     | 10    | 15    | 0,09             | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 17                     | 12  |
| 29                                                         | 9                                                                  | 6                                     | 11    | 16    | 0,04             | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 18                     | 13  |
| 30                                                         | 10                                                                 | 7                                     | 12    | 17    | 0,07             | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 19                     | 14  |

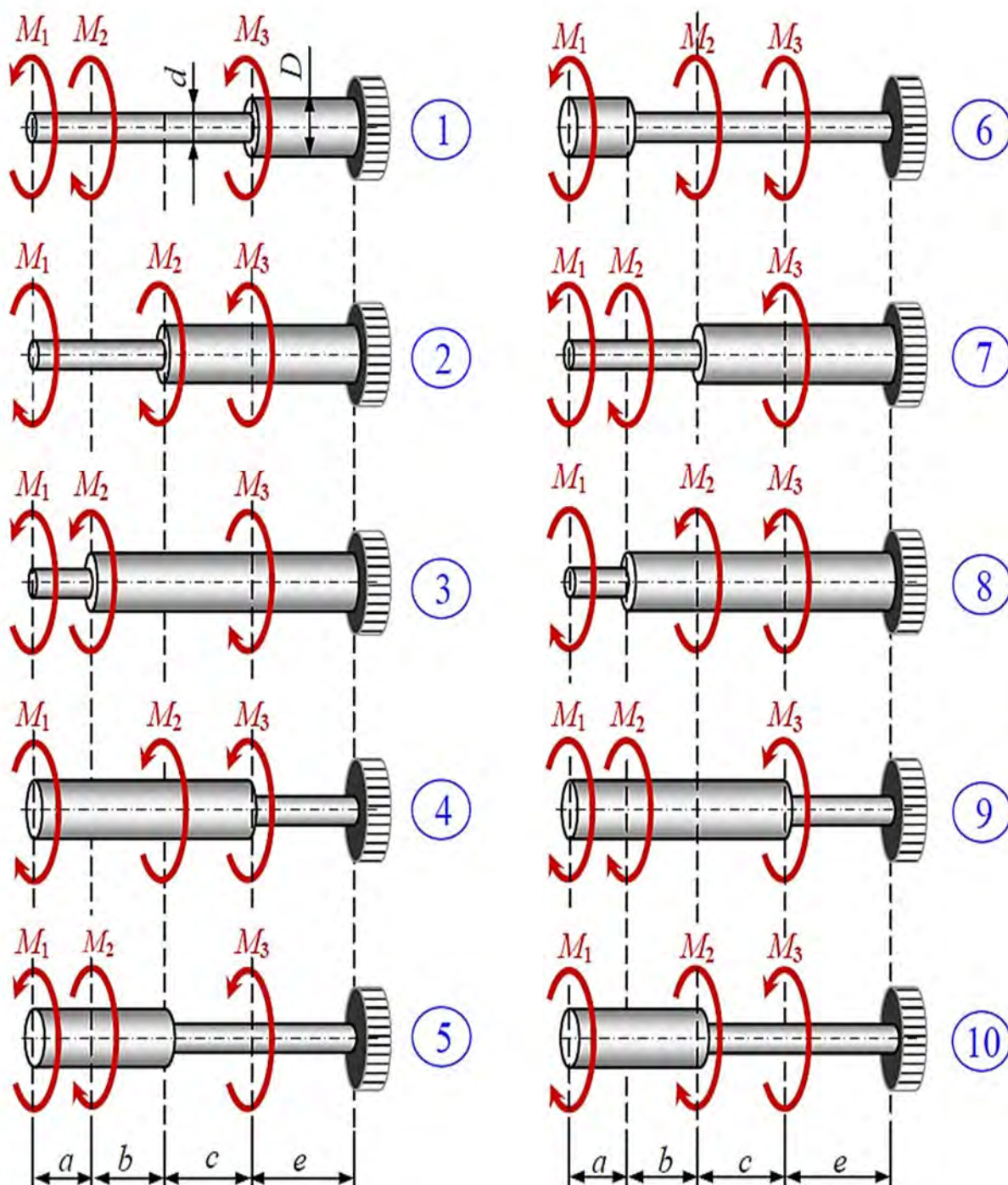


Рис. 3.105. Расчетные схемы ступенчатых валов при кручении

### **Пример выполнения лабораторной работы**

Рассмотрим пример анализа усталостной прочности ступенчатого вала, подверженного воздействию скручивающих моментов. Предположим, расчетная схема исследуемого вала соответствует варианту 10 и исходным данным:  $M_1 = 7 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $M_2 = 12 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $M_3 = 17 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $a = 0,06 \text{ м}$ ,  $b = 0,07 \text{ м}$ ,  $c = 0,08 \text{ м}$ ,  $e = 0,09 \text{ м}$ ,  $D = 16 \text{ мм}$ ,  $d = 11 \text{ мм}$ .

Процедура проведения усталостного анализа рассматриваемого объекта предполагает последовательное создание 3D-модели (рис. 3.106), построение конечно-элементной модели (рис. 3.107) и проведение статического анализа от нагрузок, обуславливающих возникновение максимальных напряжений  $\sigma_{\max}$  за цикл нагружения (рис. 3.108).

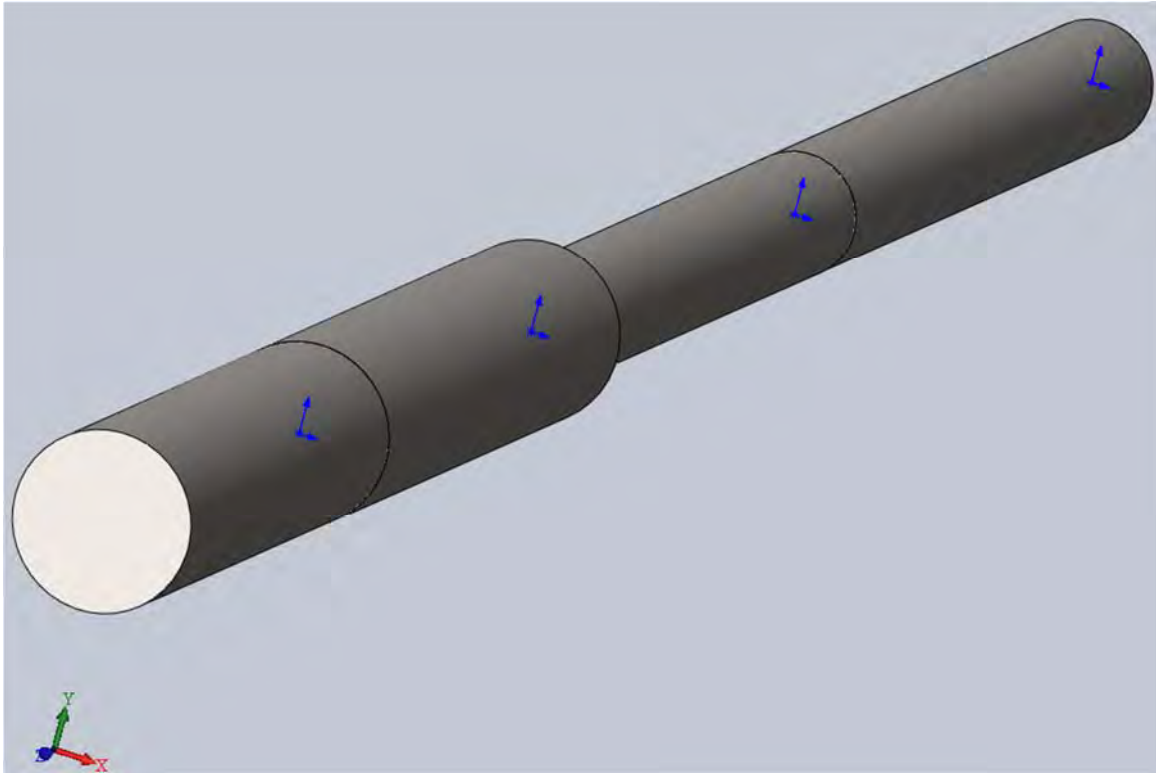


Рис. 3.106. 3D-модель ступенчатого вала

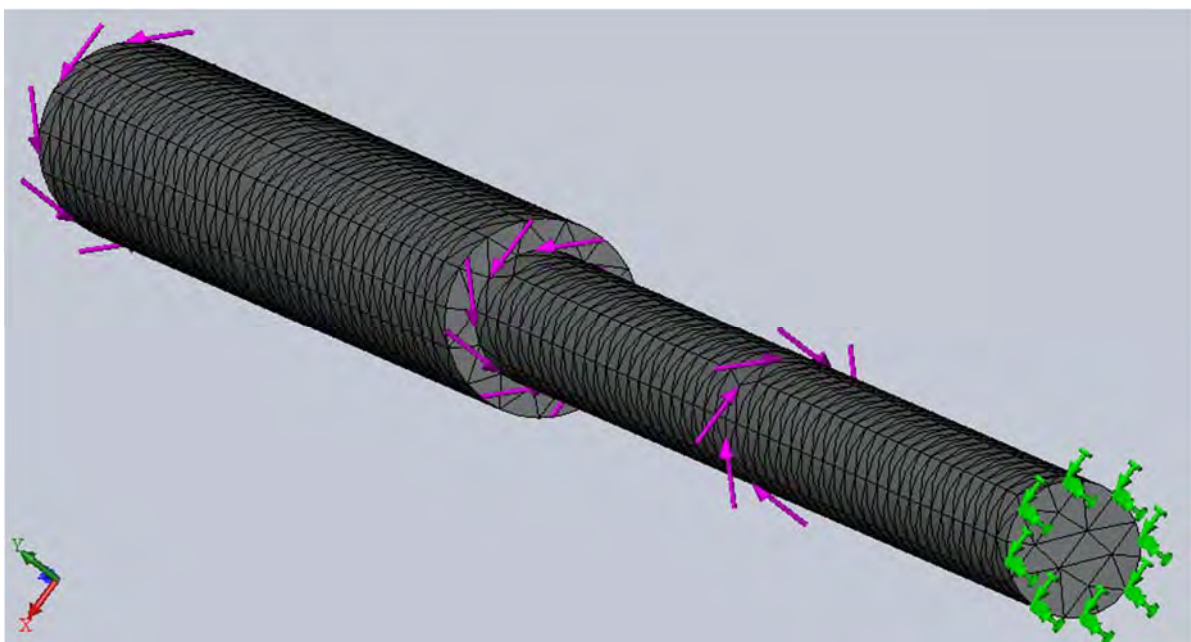


Рис. 3.107. Конечно-элементная модель статического анализа ступенчатого вала

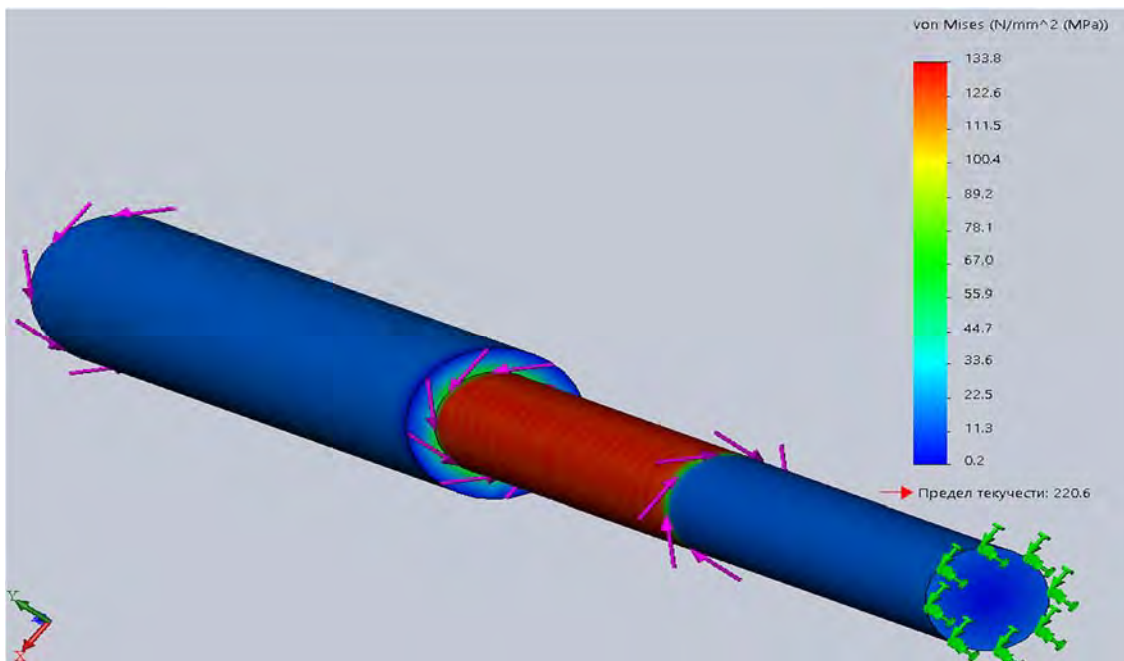


Рис. 3.108. Результат статического анализа ступенчатого вала

Здесь следует отметить, что для проведения последующего усталостного испытания в качестве выходного параметра статического анализа необходимо представить результаты в виде одного из трех интегральных показателей – эпюры напряжений Von Mises (см. рис. 3.108), эпюры 1-го главного напряжения, интенсивности напряжений INT.

Следующим шагом выполнения усталостного анализа является непосредственно запуск программы усталостных испытаний (рис. 3.109).

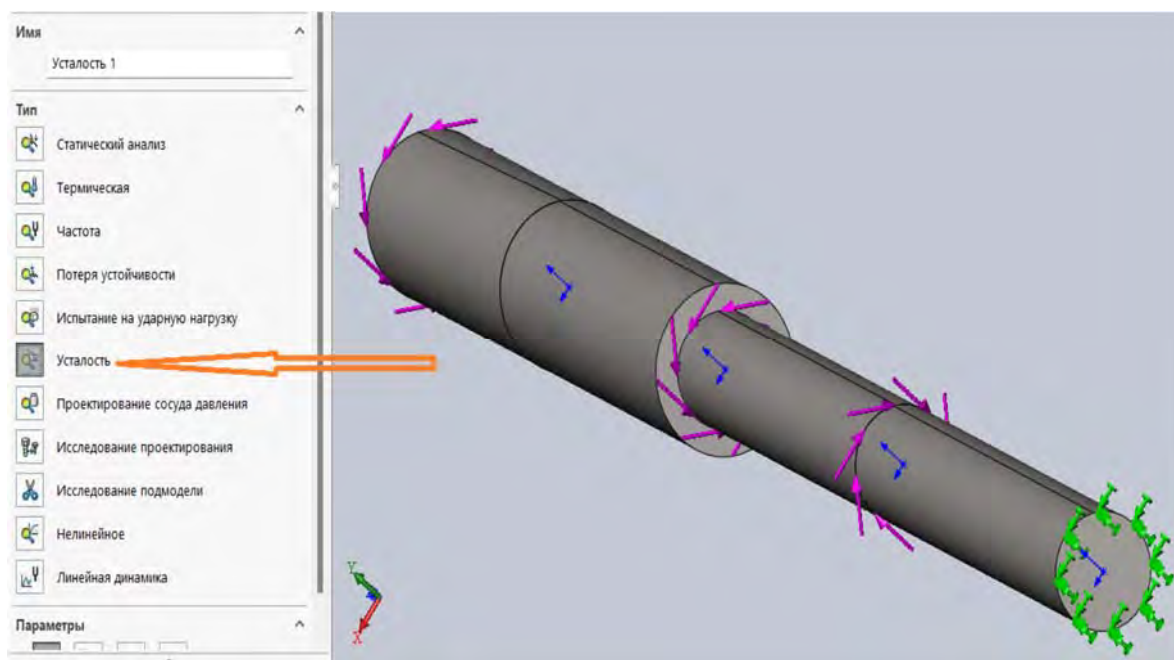


Рис. 3.109. Запуск программы усталостных испытаний

После запуска исследования Simulation *Усталость* на экране монитора появится дерево исследования, представленное на рис. 3.110.

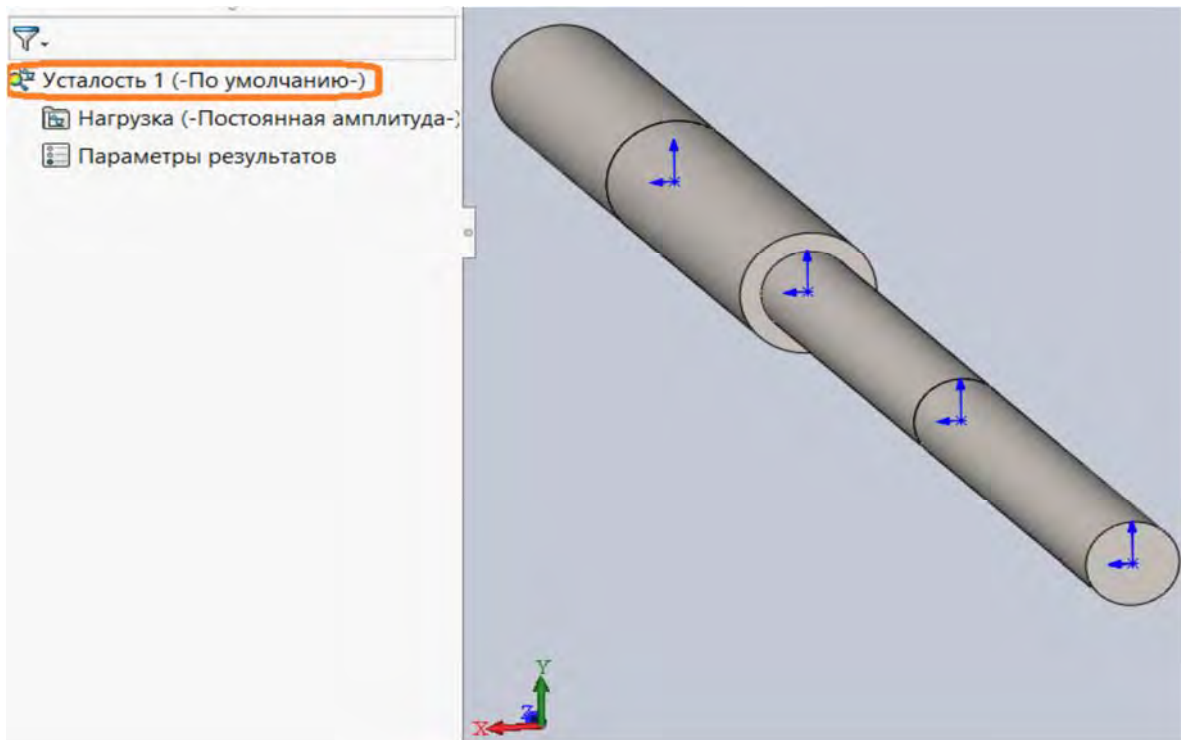


Рис. 3.110. Дерево исследования программы Simulation *Усталость*

В результате щелчка правой клавишей мыши по позиции *Усталость 1* будет вызвано меню, содержащее пункты, показанные на рис. 3.111.

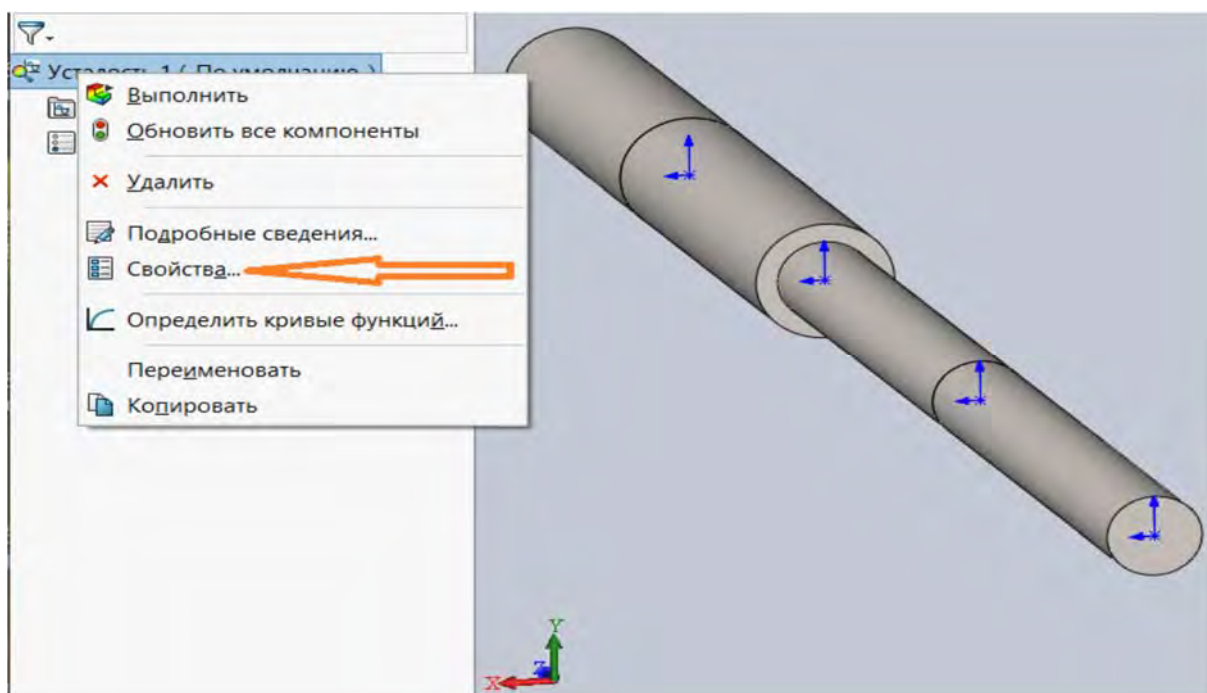


Рис. 3.111. Пункты всплывающего меню *Усталость 1*

Далее, щелкнув левой клавишей мыши (см. рис. 3.111) по разделу *Свойства*, вызовем еще одно меню (рис. 3.112), с помощью которого определяются свойства проводимого исследования.

Параметры    Замечание

Постоянная взаимосвязь событий амплитуд

☒ Случайная взаимосвязь

☐ Без взаимосвязи

Вычисление альт. напряжения, используя

☐ Интенсивность напряжения (P1-P3)

☒ Эквивалентное напряжение (von Mises)

☐ Макс. абсолютное главное (P1)

Грань оболочки

☒ Сверху

☐ Снизу

Коррекция среднего напряжения

☒ Нет

☐ Гудмен

☐ Гербер

☐ Содерберг

Коэффициент местной концентрации напряжений (Kf)

1

☐ Неограниченный срок службы

1000000000000

циклы

Папка результатов

D:\Учебный процесс\Учебники\МКЭ\КСКР\Книг

...

OK    Отмена    Применить    Справка

Рис. 3.112. Меню свойств исследования *Усталость 1*

В диалоговом окне выбираем свойства, отмеченные на рис. 3.112.

Посредством щелчка правой клавишей мыши по разделу дерева исследований (PropertyManager) *Нагрузка* (см. рис. 3.110) будет вызвано меню (рис. 3.113), в котором необходимо указать следующую информацию:

- количество циклов нагружения изделия;
- значение коэффициента асимметрии цикла нагружения изделия;
- присоединяемый к усталостному исследованию статический анализ.

Как видно из рис. 3.113, рассматриваемое изделие анализируется при воздействии  $n = 10000$  циклов нагружения при коэффициенте асимметрии цикла  $r = -1$  с присоединением к усталостным испытаниям *Статического анализа 1*.

Рассматриваемое изделие представляет собой сборку, состоящую из четырех деталей, и, как видно из дерева исследований (рис. 3.114), механические свойства материала еще не заданы.

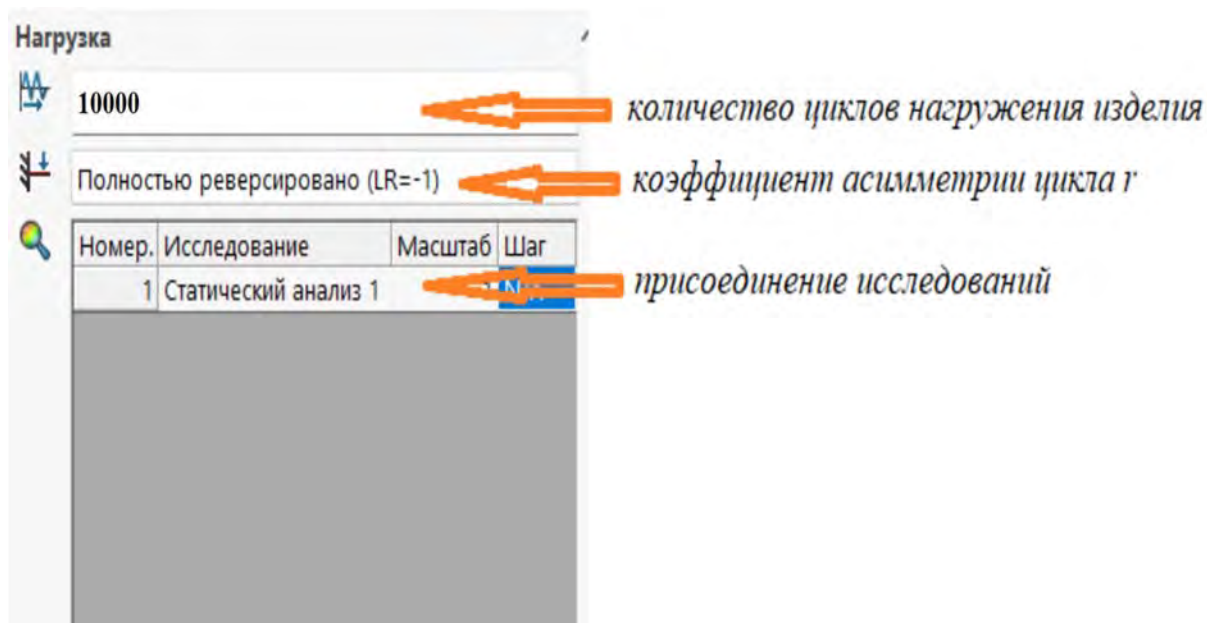


Рис. 3.113. Необходимая информация для проведения усталостных исследований

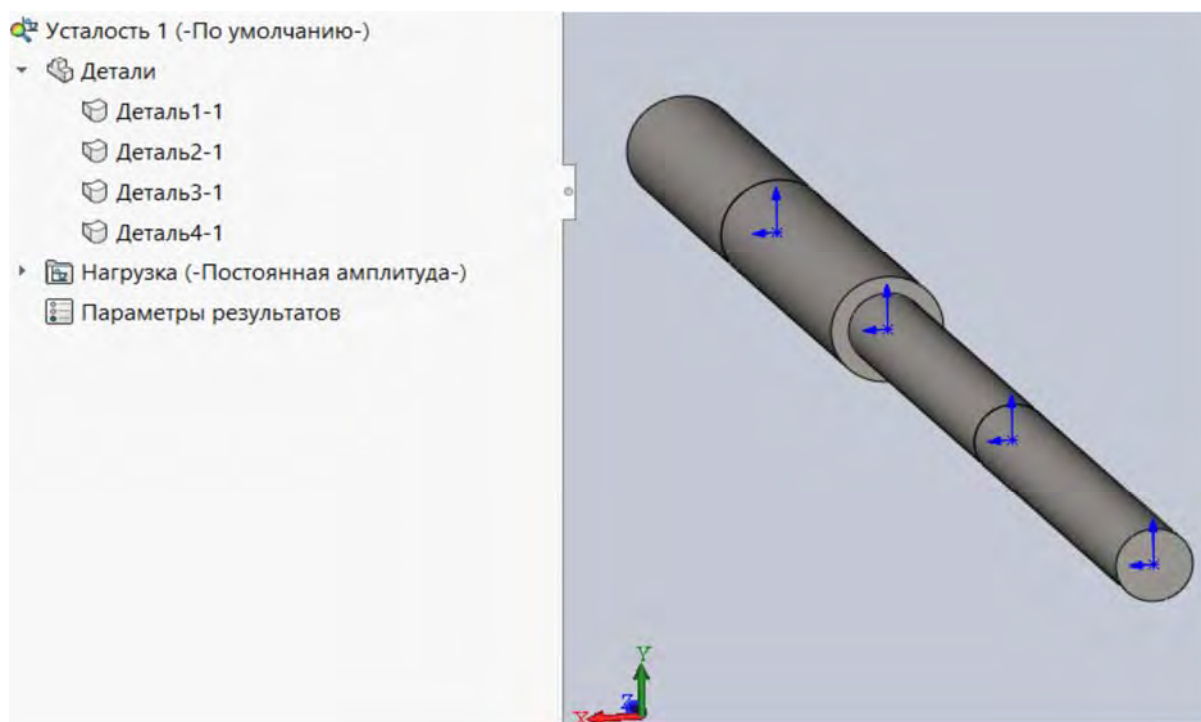


Рис. 3.114. Дерево исследований сборки для проведения усталостного анализа

Для усталостного анализа изделия необходимы данные об усталостных испытаниях образцов, изготовленных из материала изделия, т. е. сведения о кривой Веллера (кривой SN). Данная информация может быть внесена в базу данных проводимого анализа следующим образом. Щелкнув правой клавишей мыши по дереву исследований (рис. 3.115) и затем *Применить данные усталости ко всем деталям*, перейдем непосредственно к формированию данных для построения кривой SN (рис. 3.116).

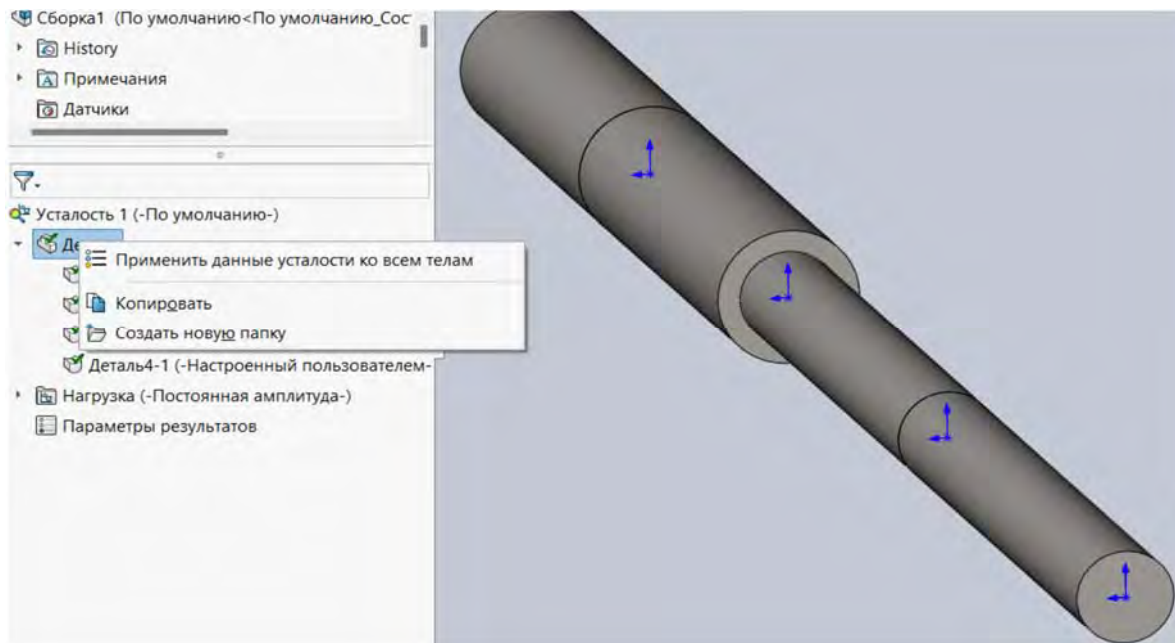


Рис. 3.115. Последовательность действий для ввода данных об усталостной кривой

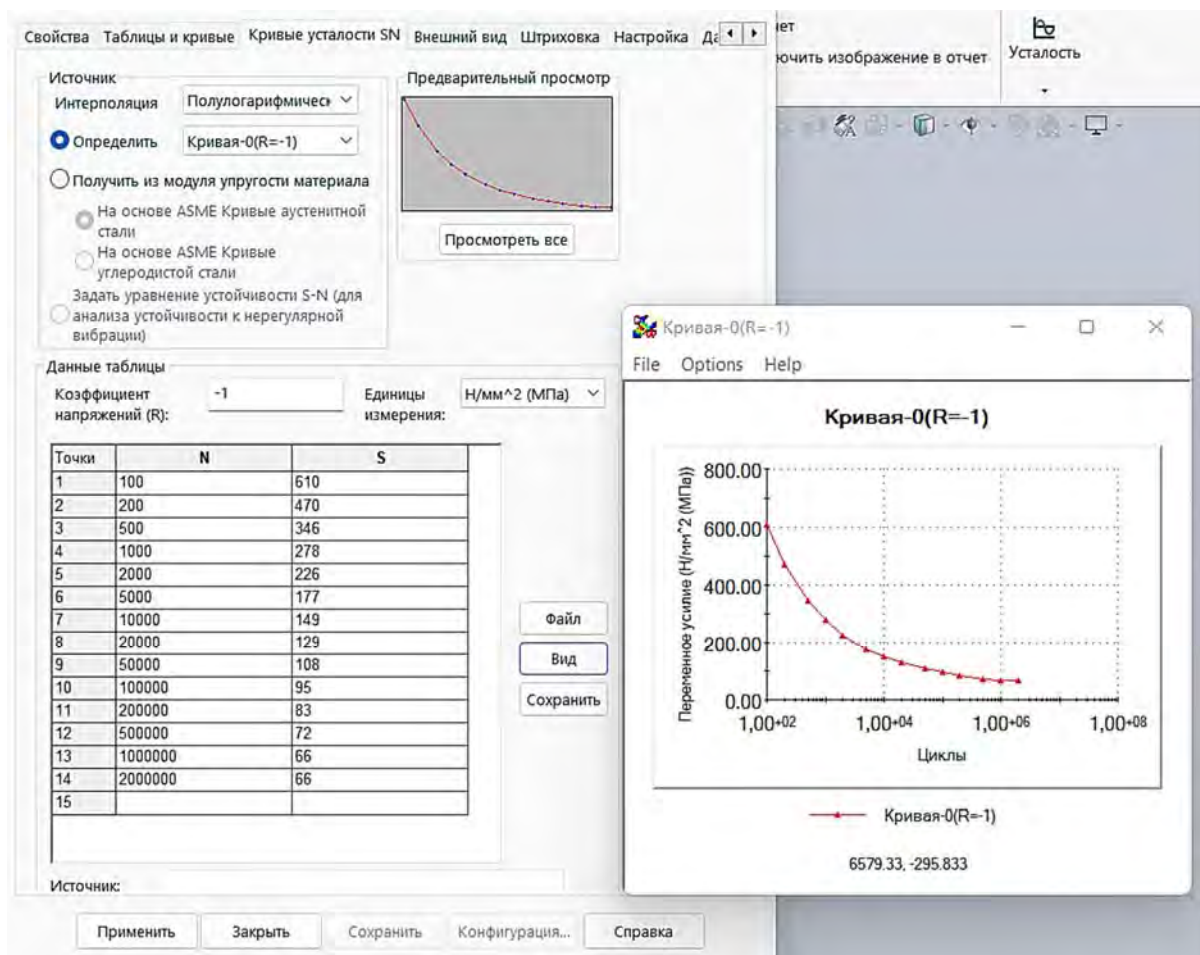


Рис. 3.116. Формирование кривой SN (кривой Веллера)

После выполнения этих действий дерево исследований уже будет выглядеть, как показано на рис. 3.117.

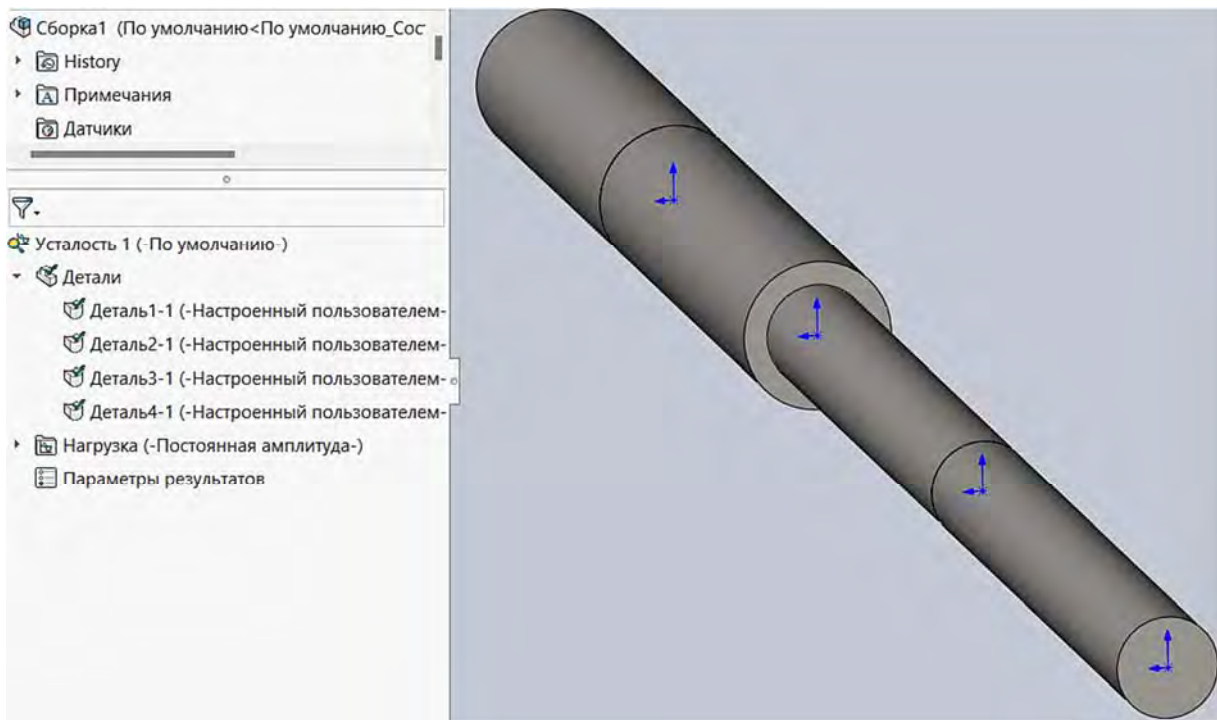


Рис. 3.117. Вид дерева исследований после ввода данных усталостных испытаний образцов

Теперь можно непосредственно перейти к исследованию усталостной прочности рассматриваемого изделия.

После команды *Выполнить* дерево исследований примет вид, приведенный на рис. 3.118.

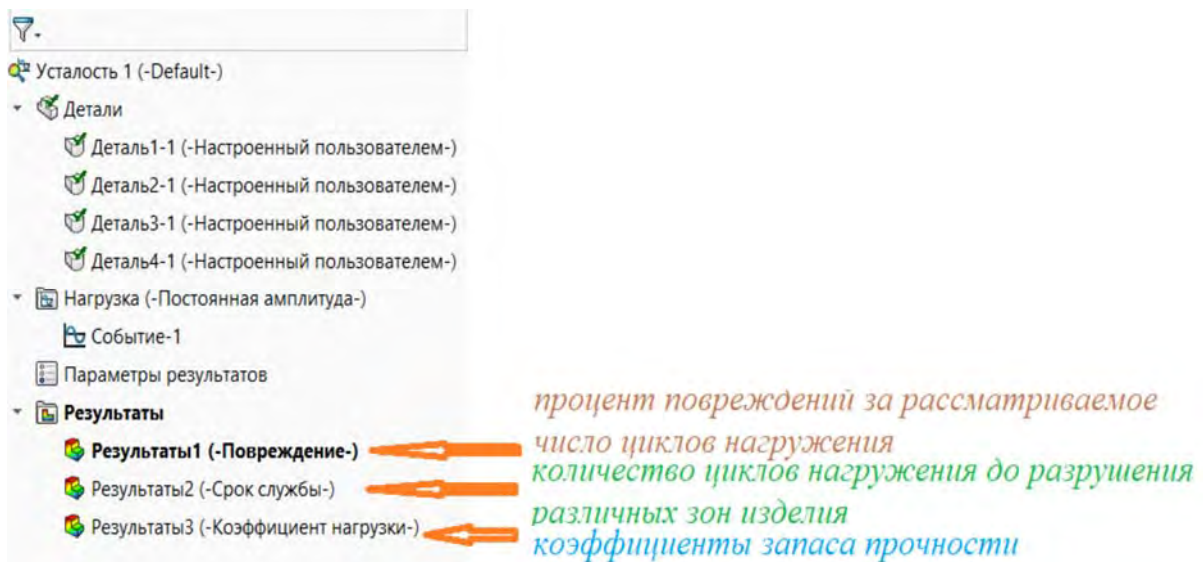


Рис. 3.118. Вид дерева исследований после проведения анализа на усталость

Как видно (см. рис. 3.118), дерево исследований уже содержит результаты проведенного анализа. В частности, *Результаты 1* включают в

себя эпюру процентов повреждений различных зон анализируемого изделия (рис. 3.119) за рассматриваемое число циклов нагружения.

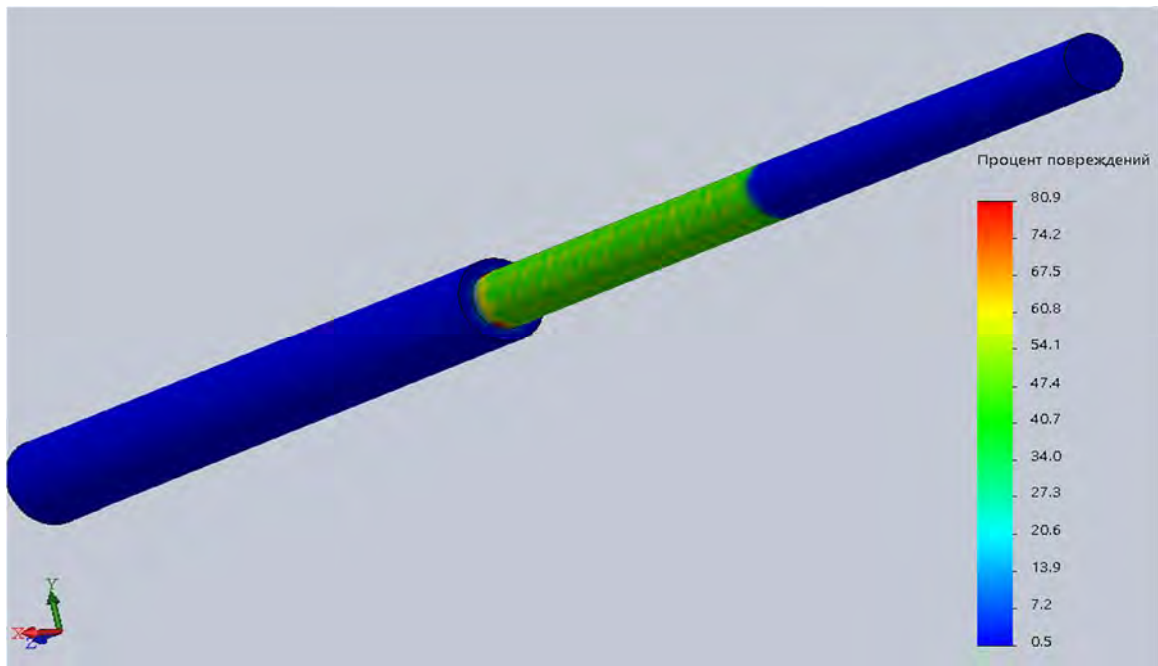


Рис. 3.119. Эпюра процентов повреждений за рассматриваемое число циклов нагружения

Посредством использования раздела *Результаты 2* была получена эпюра (рис. 3.120), отображающая число циклов нагружения до разрушения различных зон изделия.

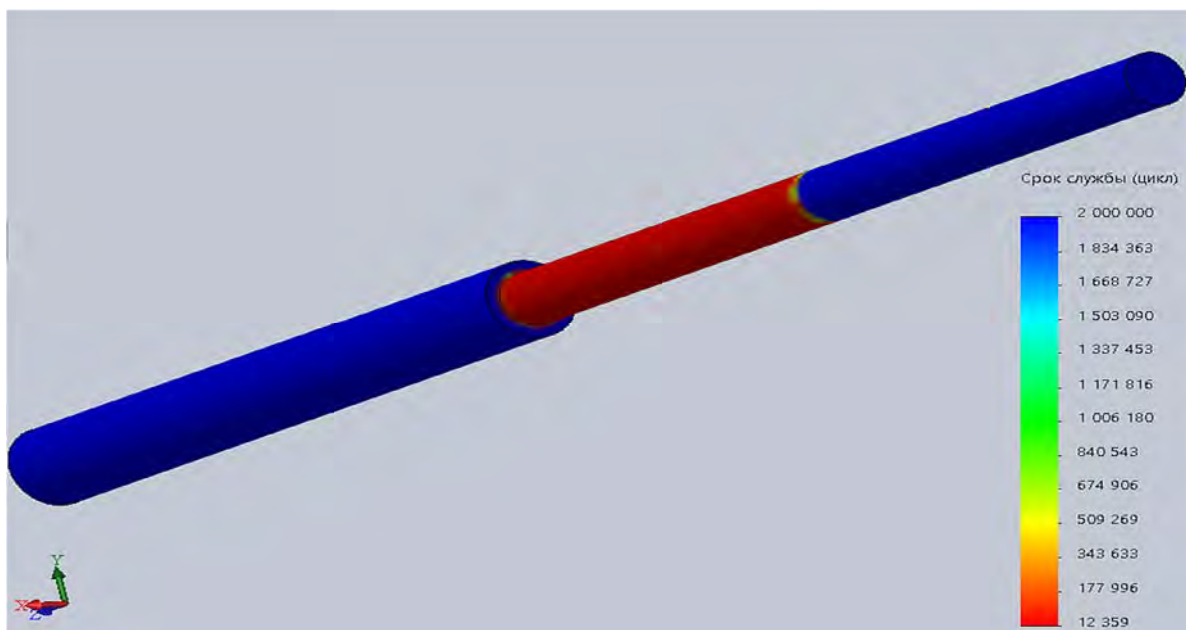


Рис. 3.120. Эпюра числа циклов нагружений до разрушения различных областей рассматриваемого изделия

Далее (рис. 3.121) представлена эпюра коэффициентов запаса прочности различных зон изделия по заданной нагрузке. Эта информация содержится в разделе *Результаты 3*.

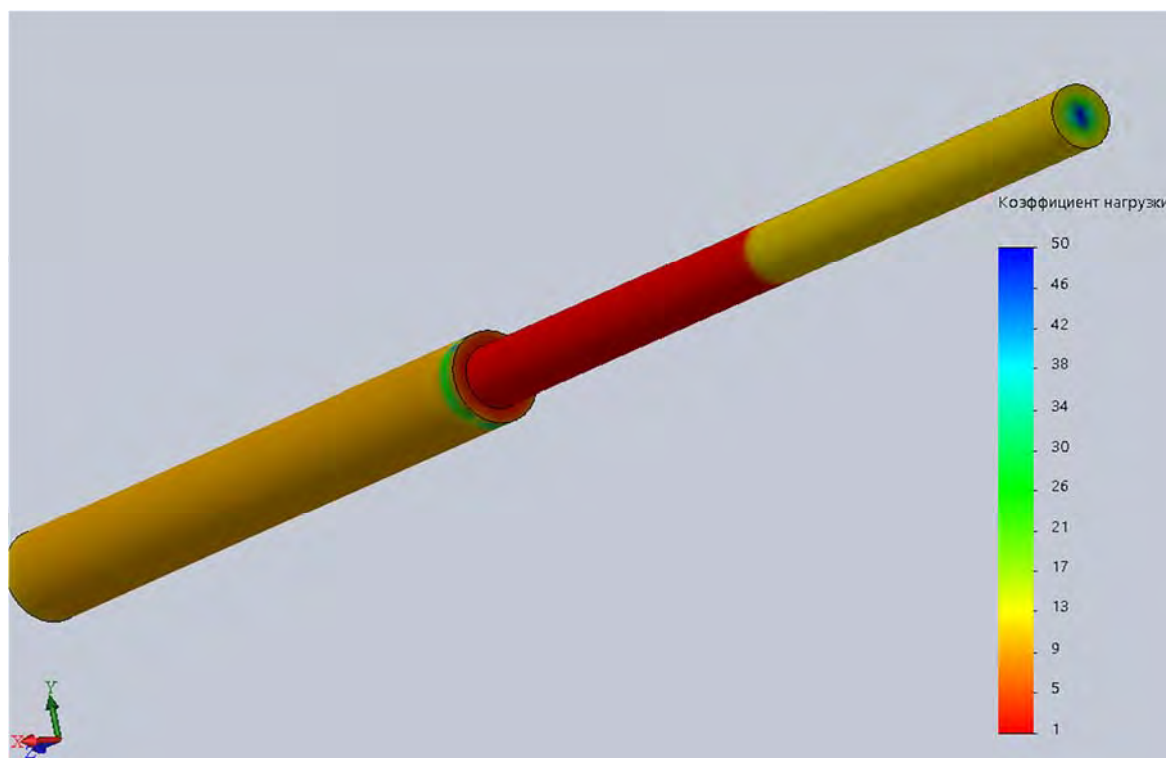


Рис. 3.121. Эпюра коэффициентов запаса прочности

### ***Контрольные вопросы***

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Что подразумевается под термином «усталость материалов»?
3. Поясните механизм усталостного разрушения.
4. По каким характерным особенностям зоны разрушения можно судить о том, что причиной является *усталостное* разрушение?
5. Что подразумевается под термином «выносливость»?
6. Что называется *периодом* и *циклом* нагружения?
7. Перечислите параметры, характеризующие цикл нагружения.
8. Какой параметр цикла нагружения называется *коэффициентом асимметрии*? Приведите формулу, описывающую его.
9. Приведите формулу, с помощью которой определяется *амплитуда цикла нагружения*.
10. Приведите формулу, с помощью которой определяется *среднее напряжение за цикл*.
11. Какие циклы нагружения называются *подобными*?
12. Какой цикл нагружения называется *симметричным*?

13. Какие циклы нагружения называются *асимметричными*?
14. Какие циклы нагружения называются *пульсационными* или *отнулевыми*?
15. Поясните термин «*предел выносливости материала*».
16. Как обозначается *предел выносливости материала*?
17. Что подразумевается под *усталостной кривой* или *кривой Веллера*? Как она выглядит?
18. Поясните термин «*базовое число циклов*».
19. Какой цикл нагружения является наиболее опасным с точки зрения усталостной прочности?
20. Какие факторы оказывают наибольшее влияние на усталостную прочность изделия?
21. Приведите формулу, с помощью которой определяется *теоретический коэффициент концентрации напряжений*.
22. Приведите формулу, с помощью которой определяется *эффективный коэффициент концентрации напряжений*.
23. Приведите формулу, с помощью которой определяется *коэффициент влияния шероховатости поверхности*.
24. Какой формулой определяется *масштабный коэффициент*?
25. Какой анализ должен предшествовать в процедуре SolidWorks Simulation определению непосредственно параметров усталостной прочности?
26. Какие параметры статического анализа могут быть использованы для проведения последующего *усталостного испытания*?
27. Какие сведения о механических свойствах материала изделия обязательно необходимы для проведения имитационного моделирования изделия на усталостную прочность?
28. Какую информацию необходимо указать для проведения усталостных испытаний?
29. Какая информация может быть представлена в виде эпюр по результатам усталостных испытаний?

### 3.7. Лабораторная работа № 7. Оптимизация конструктивных форм изделий в SolidWorks Simulation

**Цель работы:** ознакомление с процедурой оптимального проектирования в оболочке SolidWorks Simulation.

**Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы**

Вполне очевидно, что целью инженерной деятельности является создание изделия, которое, удовлетворяя эксплуатационным требованиям, является технологичным с позиций изготовления и экономным с точки зрения расхода материала, т. е. имеет оптимальную форму и типоразмеры. Исходя из сказанного, можно заключить, что под термином «*оптимизация*» подразумевается последовательность действий по определению наиболее благоприятного варианта с позиции *цели* проектирования при выполнении некоторых обязательных требований. Последнее обстоятельство предполагает либо проведение широкого спектра экспериментальных исследований, что затратно с материальной точки зрения и осуществляется на протяжении значительного промежутка времени, либо использование расчетных подходов, базирующихся на алгоритмах оптимального проектирования. Рассмотрение такого рода проблем с математической точки зрения относится к задачам *нелинейного программирования*.

Задачу *нелинейного программирования* можно укрупненно сформулировать так: требуется минимизировать *целевую функцию*  $f(x)$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ . Компоненты  $N$ -мерного вектора являются действительными числами, которые называются *переменными проектирования* и изменяются (варьируются) в следующих интервалах:

$$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

где  $x_i^{(L)}$ ,  $x_i^{(U)}$  – нижний и верхний пределы варьирования соответственно.

Способы оптимизационного проектирования конструкций и различных изделий можно условно разделить на *структурную оптимизацию*, *параметрическую оптимизацию*, *топологическую оптимизацию*.

Под *структурной оптимизацией* подразумевается построение конструкций из уже известной линейки стандартных элементов и выбор наилучшего их сочетания по определенным критериям. В данном случае следует иметь в виду, что компоновочная схема сопряжения этих элементов в

новую конструкцию обладает некоторым новым набором свойств, отличающихся от свойств отдельных элементов.

При *параметрической оптимизации* для уже существующей формы изделия выбираются параметры (возможно и геометрические), варьируя которыми в определенном диапазоне определяется оптимальный вариант, например минимум материалоемкости при соблюдении требований прочности и жесткости.

Целью *топологической оптимизации* является определение оптимальной формы и типоразмеров изделия, обеспечивающих выполнение установленных требований. Алгоритм топологической оптимизации состоит в том, что изначально (огрубленно) задается область проектирования, где фиксируются зоны, форма и размеры которых являются неизменными исходя из конструкторско-технологических соображений (места соединения деталей в сборку, крепления и т. д.). В последующем, поскольку алгоритм топологической оптимизации предполагает использование метода конечных элементов, создается сетка элементов. Эта сетка в процессе поиска оптимального варианта определенным образом должна модифицироваться. Такое переразбиение сетки элементов осуществляется различными способами и их выбор зависит от программных средств, которыми располагает разработчик. Здесь следует отметить, что в программном обеспечении SolidWorks Simulation возможности топологической оптимизации появились только начиная с 2018 г. В настоящее время существует несколько технологий топологической оптимизации, в программном комплексе SolidWorks Simulation реализован алгоритм SIMP-метода.

Поскольку процедура данной топологической оптимизации предполагает использование алгоритма метода конечных элементов, то всем элементам, входящим в область проектирования, назначается фиксированная относительная плотность  $x_i = 1$  или  $0$  в зависимости от уровня напряженно-деформированного состояния в данном месте анализируемого изделия.

Взаимосвязь между модулем упругости и относительной плотностью описывается выражением

$$E(x_i) = E_{\min} + (x_i)^p (E_0 - E_{\min}),$$

где  $E_0$  – модуль упругости материала;  $x_i$  – относительная плотность  $i$ -го элемента;  $p$  – фактор отбраковки.

Для устойчивости процесса вычисления  $E_{\min}$  принимается за  $E/1000$ .

Здесь следует отметить, что проведение *топологической оптимизации* предъявляет повышенные требования к используемой компьютерной технике (оперативная память, быстродействие) и характеризуется существенным увеличением проведения процесса оптимизации.

Одним из различий между *топологической* и *параметрической оптимизацией* является то, что *параметрическая оптимизация* предполагает описание формы (или изменяемых ее участков) тела через некоторые параметры. Далее эти параметры используются при построении геометрической модели объекта, после чего для нее выполняются необходимые расчеты. С позиций инженерной практики *параметрическая оптимизация* более естественна. В данном случае поиск осуществляется в ограниченном пространстве, границы для параметров могут быть назначены исходя из практического опыта эксплуатации изделия. Здесь следует отметить, что в механике твердого деформируемого тела, да и в инженерной деятельности, задача оптимизации традиционно формулируется в основном следующим образом: необходимо минимизировать массу при ограничениях на максимальные напряжения (их компоненты или комбинации), деформации, перемещения, минимальные собственные частоты или минимальные нагрузки потери устойчивости и т. д. Иными словами, нужно получить максимально легкое изделие, удовлетворяющее заданным требованиям.

К настоящему моменту разработано большое разнообразие методов оптимизации. Современные системы моделирования (CAD/CAE) располагают набором эффективных поисковых методов, интегрированных непосредственно в них, и могут быть использованы для поиска оптимального варианта разрабатываемой модели. К таким методам относятся следующие.

1. *Метод полного перебора* с последующим построением поверхности отклика и фиксацией лучшего варианта.
2. *Метод оптимизации по координатным спуском.*
3. *Метод автоматизированного формирования D-оптимальных планов эксперимента.*
4. *Метод многокритериальной оптимизации на основе Парето-оптимальности.*

Этот список можно продолжать достаточно долго. Здесь следует отметить, что приведенные методы являются интеллектуальной собственностью авторов и защищены соответствующим образом. Кроме того, в справочной информации к используемым (CAD/CAE) системам, как правило, не приводится подробное описание применяемых алгоритмов.

Остановимся более подробно на методе полного перебора вариантов. Сущность метода состоит в последовательном расчете всех возможных вариантов сочетания рассматриваемых параметров объекта в задаваемых интервалах их варьирования. В этом методе, кроме интервалов варьирования, необходимо задать информацию о шаге изменения искомых параметров. Предположим, что целевая функция зависит от двух переменных

$Y = f(X1, X2)$ . На рис. 3.122 приведена последовательность перебора различных вариантов сочетания управляемых параметров [16].

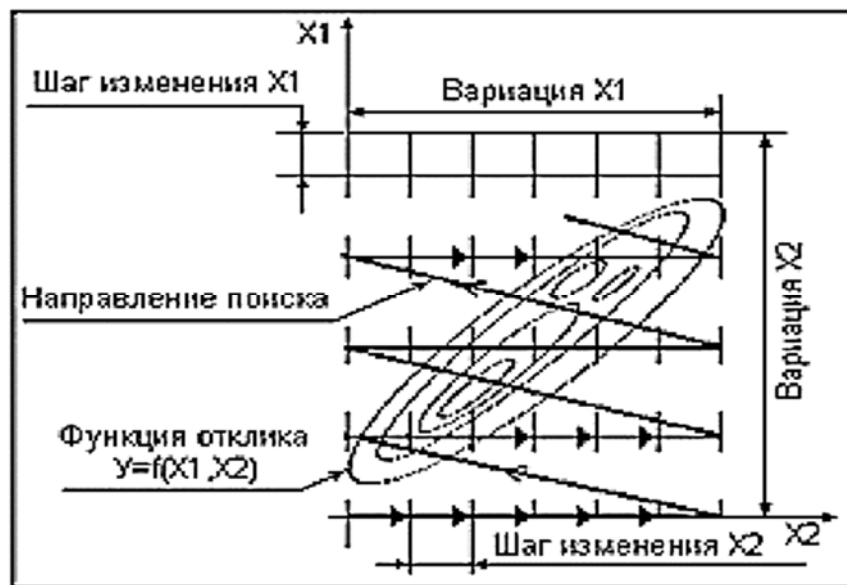


Рис. 3.122. Последовательность перебора различных вариантов сочетания управляемых параметров

Как видно из приведенной схемы перебора вариантов сочетания управляемых параметров, число циклов расчета значений функции  $Y = f(X1, X2)$  будет равно произведению  $(n_{X1} + 1) \cdot (n_{X2} + 1)$ , где  $n_{X1}, n_{X2}$  – количество шагов, осуществляемых по направлению каждого из варьируемых параметров. Здесь следует отметить, что метод полного перебора управляемых параметров удобно использовать при решении задачи оптимизации для сравнительно небольшого числа переменных – шестьдесят и крупным шагом. В противном случае затраты машинного времени могут становиться непреодолимо велики.

Современные CAD-/CAE-системы позволяют проектировщику в процессе формирования модели изделия оценить его свойства (массогабаритные параметры, прочность, частотные характеристики и т. д.) не выходя за рамки среды проектирования, решая, в том числе и задачу нахождения оптимальных параметров. Одной из таких систем является среда 3D-моделирования SolidWorks, характерной особенностью которой является наличие множества инструментов, одним из которых является модуль SolidWorks Simulation.

Для того чтобы приступить к выполнению задачи оптимизации, необходимо выполнить следующие условия:

1) сформулировать задачу анализа проектируемого изделия, на базе которой проводится последующая оптимизация. Также следует иметь в

виду, что оптимизация может проводиться по комплексным условиям, отражающим свойства исследуемого изделия по результатам решения различных типов задач из допустимого списка (рис. 3.123);

2) сформулировать цель оптимизации (минимизация веса, объема, создание равнопрочного изделия и т. д.);

3) определить переменные проектирования, для которых устанавливаются граничные значения (по умолчанию автоматически программа принимает исходное значение за среднее и граничные значения назначаются в интервале 0,5...1,5 от исходного значения);

4) установить ограничения на одну или несколько характеристик изделия, при этом ограничения могут касаться различных типов задач;

5) указать вариант итерационного процесса, обеспечивающий минимизацию промежуточных расчетов (рис. 3.124).

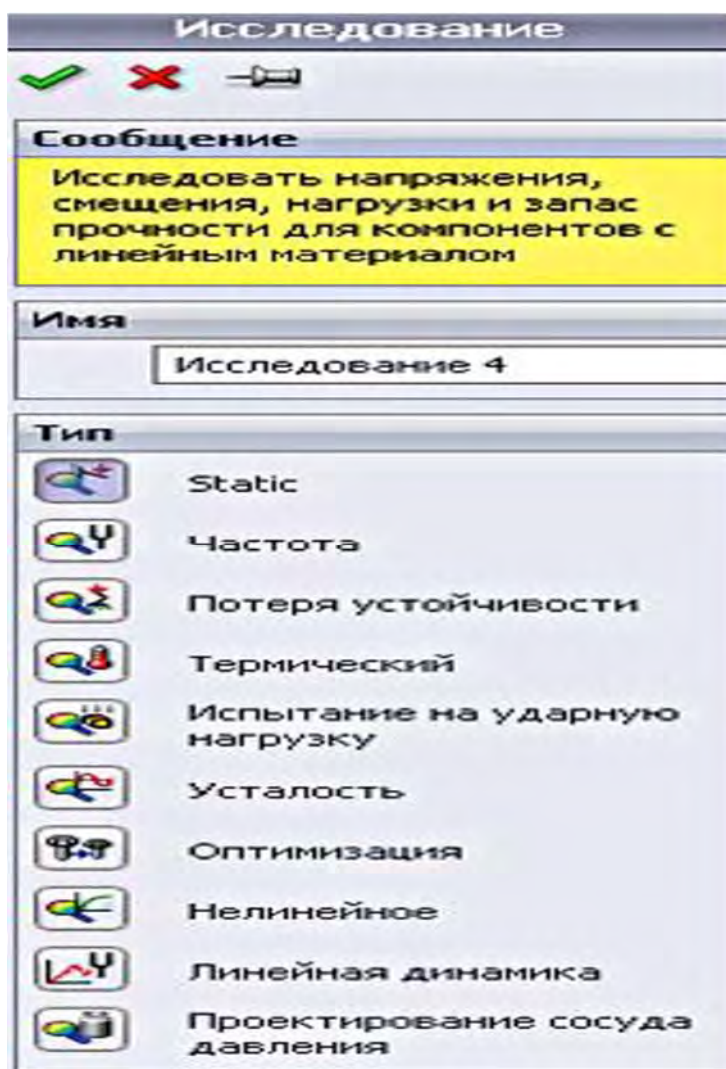


Рис. 3.123. Типы задач SolidWorks Simulation, по которым может осуществляться последующая оптимизация

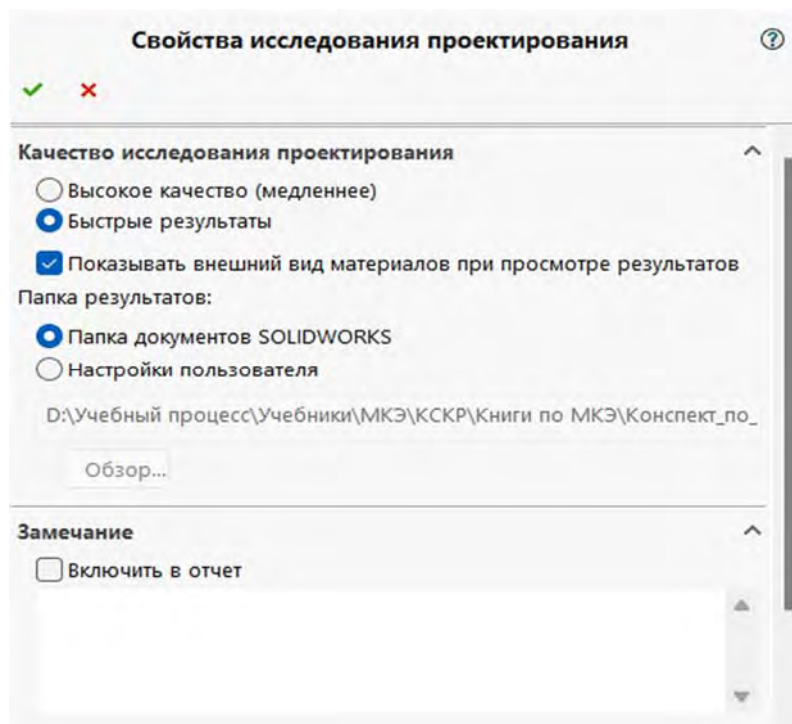


Рис. 3.124. Выбор варианта итерационного процесса и качества исследования проектирования

### ***Исходные данные***

В лабораторной работе, в соответствии с одной из схем нагружения и закрепления балок (табл. 3.15), формой поперечного сечения (табл. 3.16), исходными данными (табл. 3.17), а также последними тремя цифрами номера зачетной книжки, необходимо:

- построить твердотельную модель данного объекта с учетом специфики условий нагружения и закрепления изделия, а также проведения последующего процесса оптимизации;
- провести препроцессорную подготовку конечно-элементной модели объекта анализа для проведения статического исследования;
- осуществить расчет данной модели, при необходимости провести корректировку модели;
- выполнить постпроцессорное исследование результатов расчета;
- перейти к исследованию проектирования (процессу оптимизации) и выполнить все необходимые для этого действия (определить целевую функцию, параметры варьирования, ограничения и свойства итерационного процесса оптимизации);
- запустить процесс оптимизации и в последующем проанализировать полученные данные;
- установить процент снижения металлоемкости;

– провести анализ напряженно-деформированного состояния вновь спроектированного объекта, т. е. провести действия, аналогичные рассмотренному далее примеру.

Табл. 3.15. Схемы нагружения и закрепления балок

| Номер<br>схемы | Схема нагружения балки | Номер<br>схемы | Схема нагружения балки |
|----------------|------------------------|----------------|------------------------|
| 0              |                        | 5              |                        |
| 1              |                        | 6              |                        |
| 2              |                        | 7              |                        |
| 3              |                        | 8              |                        |
| 4              |                        | 9              |                        |

Табл. 3.16. Форма поперечного сечения балки

| Номер<br>схемы | Форма поперечного сечения                                    | Номер<br>схемы | Форма поперечного сечения                                           |
|----------------|--------------------------------------------------------------|----------------|---------------------------------------------------------------------|
| 0              | <p>Прямоугольник с центральным отверстием</p>                | 5              | <p>Прямоугольник с центральным отверстием в форме ромба</p>         |
| 1              | <p>Симметричный двутавр, составленный из прямоугольников</p> | 6              | <p>Прямоугольник с центральным отверстием в форме шестигранника</p> |
| 2              | <p>Симметричный тавр, составленный из прямоугольников</p>    | 7              | <p>Прямоугольник с центральным отверстием в форме эллипса</p>       |
| 3              | <p>Прямоугольник</p>                                         | 8              | <p>Прямоугольник с центральным отверстием в форме эллипса</p>       |
| 4              | <p>Полый прямоугольник</p>                                   | 9              | <p>Квадрат с центральным отверстием</p>                             |

Табл. 3.17. Исходные данные, используемые при проведении процесса оптимизации балки, подверженной статическому изгибу

| Номер строки | Расчетная схема балки (см. табл. 3.15) | $l$ , м  | $a$ , м  | $b$ , м  | $F$ , кН | $M$ , кН·м | $q$ , кН/м | Номер схемы поперечного сечения по табл. 3.16 и его размеры                 |
|--------------|----------------------------------------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 0            | 0                                      | 3,0      | 2,0      | 1        | 3,9      | 5,9        | 1,1        | <b>№ 0</b><br>$h = 0,13$ м; $b = 0,08$ м; $d = 0,06$ м                      |
| 1            | 1                                      | 2,1      | 1,1      | 1        | 3        | 5,0        | 2          | <b>№ 1</b><br>$H = 0,1$ м; $B = 0,05$ м;<br>$h = 0,09$ м; $b = 0,02$ м      |
| 2            | 2                                      | 2,2      | 1,2      | 1        | 3,1      | 5,1        | 1,9        | <b>№ 2</b><br>$h = 0,12$ м; $B = 0,06$ м;<br>$d = 0,006$ м; $b = 0,01$ м    |
| 3            | 3                                      | 2,3      | 1,3      | 1        | 3,2      | 5,2        | 1,8        | <b>№ 3</b><br>$h = 0,11$ м; $b = 0,055$ м                                   |
| 4            | 4                                      | 2,4      | 1,4      | 1        | 3,3      | 5,3        | 1,7        | <b>№ 4</b><br>$h = 0,12$ м; $b = 0,06$ м;<br>$h_1 = 0,11$ м; $b_1 = 0,05$ м |
| 5            | 5                                      | 2,5      | 1,5      | 1        | 3,4      | 5,4        | 1,6        | <b>№ 5</b><br>$h = 0,11$ м; $B = 0,05$ м;<br>$a = 0,012$ м; $b = 0,02$ м    |
| 6            | 6                                      | 2,6      | 1,6      | 1        | 3,5      | 5,5        | 1,5        | <b>№ 6</b><br>$h = 0,11$ м; $B = 0,05$ м; $a = 0,02$ м                      |
| 7            | 7                                      | 2,7      | 1,7      | 1        | 3,6      | 5,6        | 1,4        | <b>№ 7</b><br>$h = 0,11$ м; $B = 0,05$ м;<br>$a = 0,02$ м; $b = 0,012$ м    |
| 8            | 8                                      | 2,8      | 1,8      | 1        | 3,7      | 5,7        | 1,3        | <b>№ 8</b><br>$h = 0,11$ м; $B = 0,05$ м;<br>$a = 0,02$ м; $b = 0,03$ м     |
| 9            | 9                                      | 2,9      | 1,9      | 1        | 3,8      | 5,8        | 1,2        | <b>№ 9</b><br>$a = 0,11$ м; $d = 0,08$ м                                    |
|              | <b>a</b>                               | <b>a</b> | <b>a</b> | <b>a</b> | <b>b</b> | <b>b</b>   | <b>b</b>   | <b>б</b>                                                                    |

### **Пример выполнения лабораторной работы**

Процесс проведения параметрической оптимизации проследим на следующем примере. Для балки с поперечным сечением в виде симметричного тавра, составленного из прямоугольников (рис. 3.125) и имеющего следующие габаритные размеры:  $h = 0,12$  м,  $B = 0,06$  м,  $d = 0,006$  м,  $b = 0,01$  м, необходимо определить оптимальные значения высот  $h$  для различных по длине сечений. Балка закреплена и нагружена, как показано на схеме (рис. 3.126), при этом  $l = 2$  м,  $a = b = 1$  м,  $F = 4$  кН.

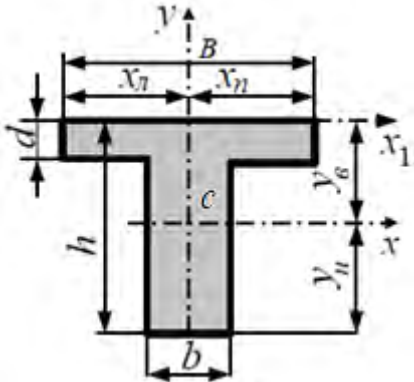
|                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Симметричный тавр, составленный из прямоугольников</p>  | <p>Моменты сопротивления <math>W_x</math> и <math>W_y</math></p> $A = (B - b) \cdot d + b \cdot h;$ $y_6 = \frac{(B - b) \frac{d^2}{2} + b \frac{h^2}{2}}{(B - b)d + bh};$ $J_x = (B - b) \frac{d^3}{3} + \frac{bh^3}{3} - Ay_6^2;$ $W_{x,н} = \frac{J_x}{h - y_6}; \quad W_{x,6} = \frac{J_x}{y_6}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Рис. 3.125. Вид поперечного сечения и выражения для определения его геометрических характеристик

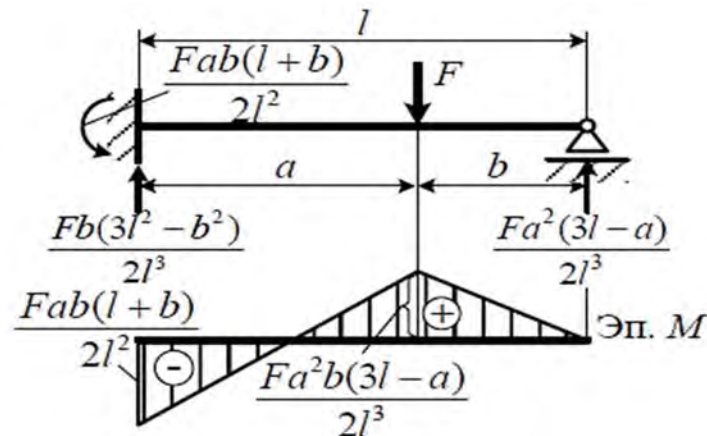


Рис. 3.126. Схема нагружения балки и эпюра изгибающих моментов, возникающих в ней

Исходя из анализа схемы нагружения (см. рис. 3.126), рассматриваемую балку при формировании 3D-модели можно представить в виде сборки, состоящей из сплошной по длине «стенки» и двух одинаковых «полок» (рис. 3.127).

Целью рассматриваемого процесса оптимизации являлось стремление минимизировать массу стальной балки, подверженной воздействию заданной нагрузки (см. рис. 3.126). В связи с этим, используя инструмент SolidWorks, были определены весовые характеристики рассматриваемого изделия (рис. 3.128) на начальном этапе проектирования. В результате было установлено, что масса данного объекта составляет 23,4 кг.

Как уже отмечалось ранее, для осуществления процесса параметрической оптимизации первоначально должна быть сформулирована цель оптимизации и определен тип анализа (см. рис. 3.123), на базе которого

будет осуществляться данная оптимизация. Поскольку целью является снижение расхода металла на изготовление проектируемого изделия при условии обеспечения прочности, в качестве базового был выбран статический анализ (см. рис. 3.123).

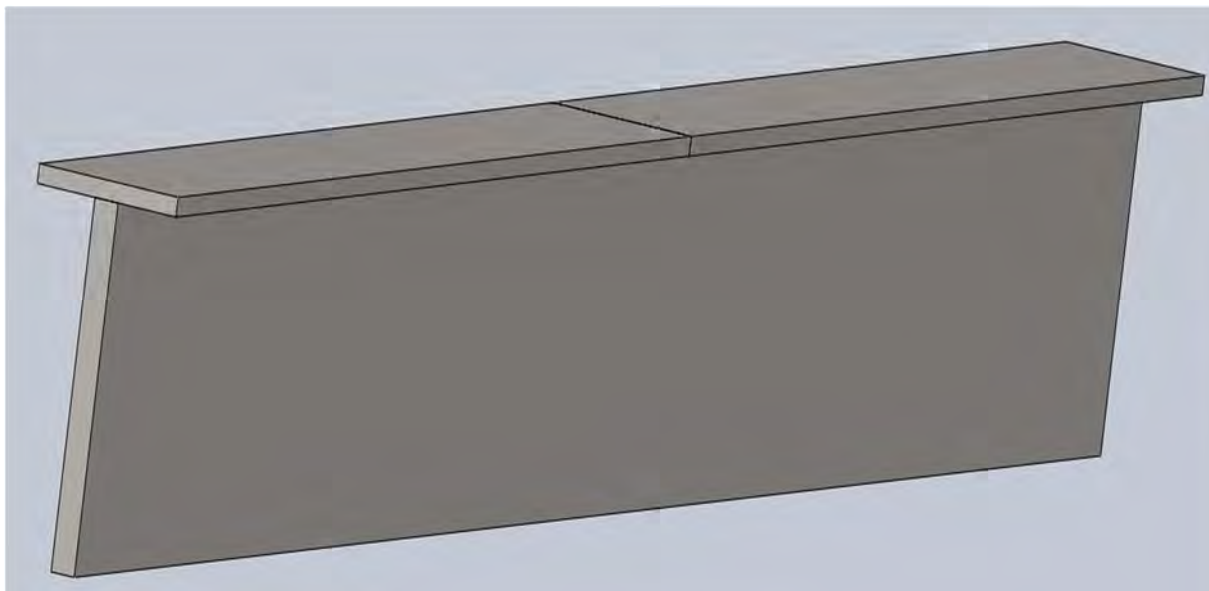


Рис. 3.127. Внешний вид сборки 3D-модели исследуемого объекта

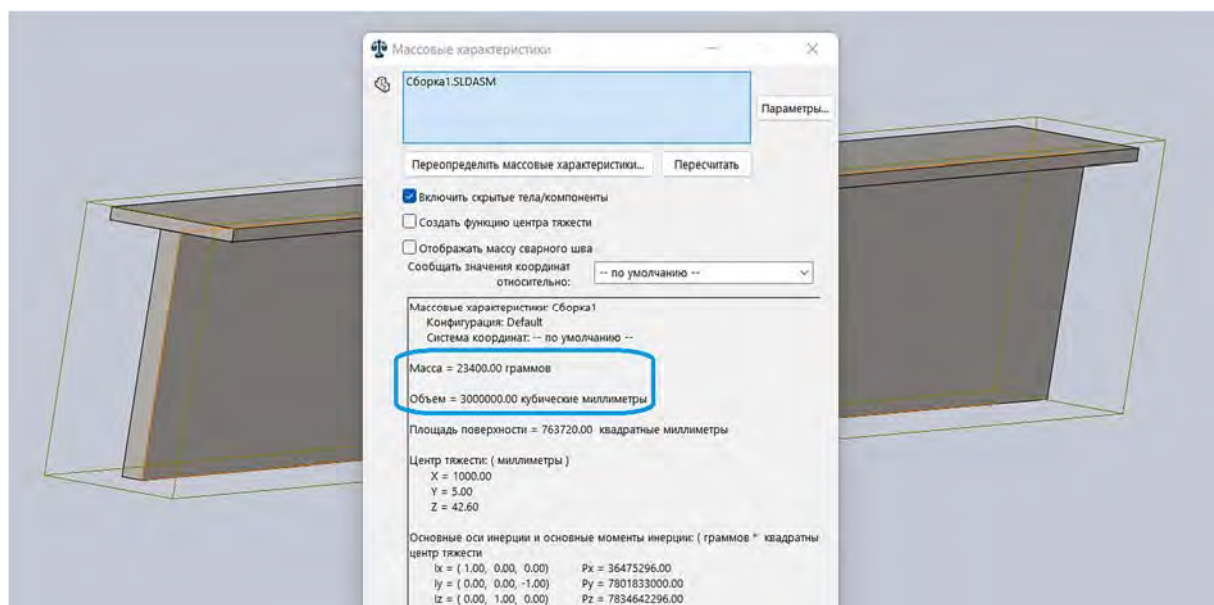


Рис. 3.128. Массовые характеристики балки до начала процесса оптимизации

В связи с этим в SolidWorks Simulation была разработана конечно-элементная модель анализируемого изделия и выполнены соответствующие расчеты. На рис. 3.129 представлены результаты данного анализа и показана эпюра распределения нормальных напряжений SX, действующих перпендикулярно плоскости поперечного сечения. Как видно, данная эпюра

напряжений достаточно хорошо согласуется с эпюрой изгибающих моментов (см. рис. 3.126), полученной с помощью средств курса «Механика материалов». Кроме того, из данных эпюры становится очевидным то, что не весь материал балки по длине используется одинаково эффективно. Одним из параметров, по которому можно достигнуть минимизации металлоемкости, может стать высота «стенки». По этому параметру и будет осуществляться оптимизация.

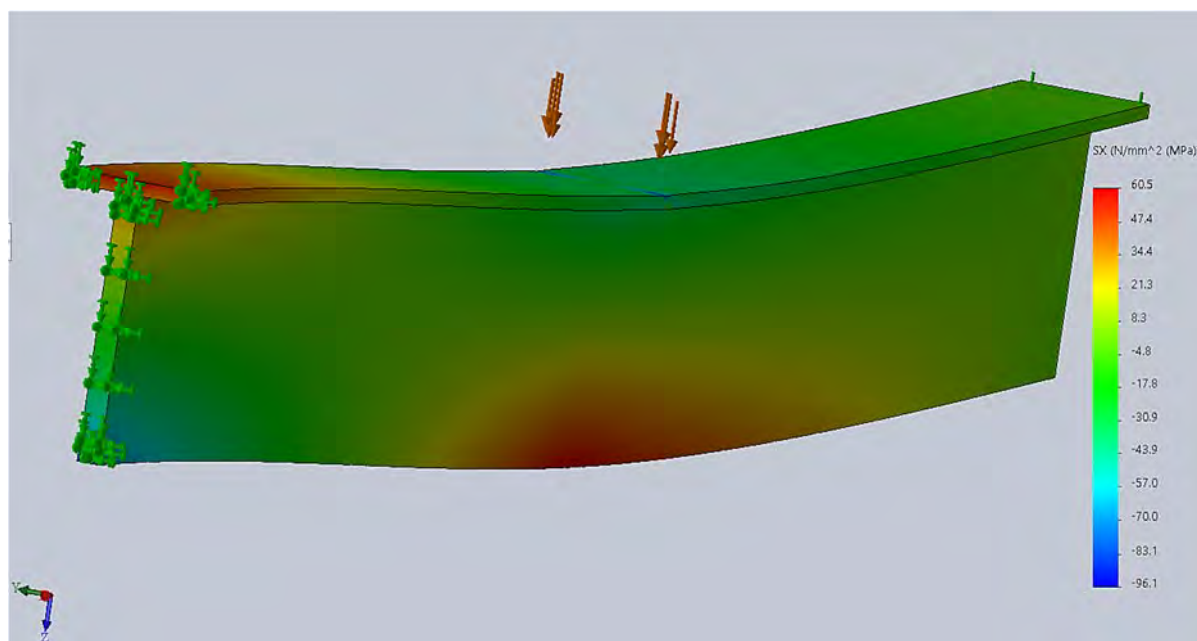


Рис. 3.129. Эпюра распределения нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном поперечному сечению балки

Для проведения в дальнейшем оптимизации переходим к новому исследованию (рис. 3.130).

В результате на экране монитора появится другая заставка с дополнительными опциями (рис. 3.131).

Настройка процесса оптимизации начинается с того, что первоначально устанавливаются параметры *Исследования проектирования* (см. рис. 3.131). Для этого по отмеченной иконке необходимо щелкнуть левой клавишей мыши. В результате появится меню (рис. 3.132), с помощью которого можно выбрать итерационный процесс проведения оптимизации.

Следующей информацией, которую необходимо ввести для проведения процесса оптимизации, является указание варьируемых параметров расчетной модели, а также верхней и нижней границ их изменения. Для этого в разделе *Переменные* необходимо добавить все варьируемые параметры, они должны быть заранее подготовлены при формировании 3D-модели (рис. 3.133).

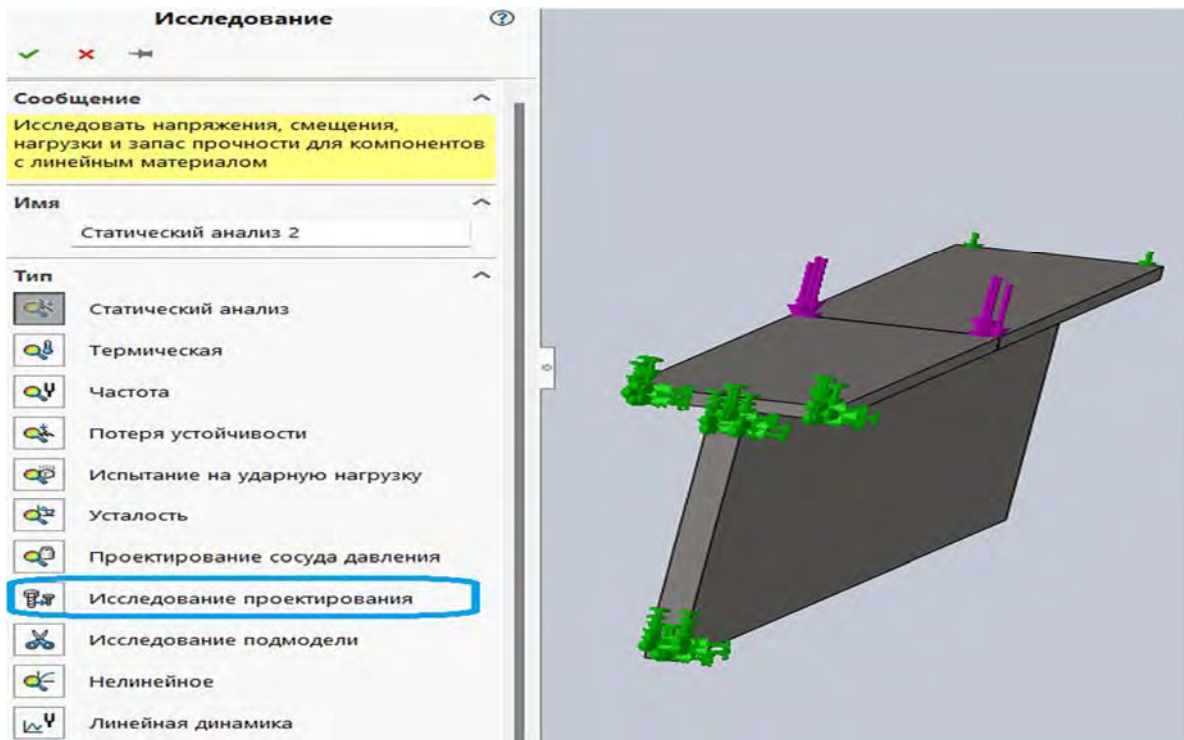


Рис. 3.130. Переход к новому исследованию – *Исследованию проектирования*

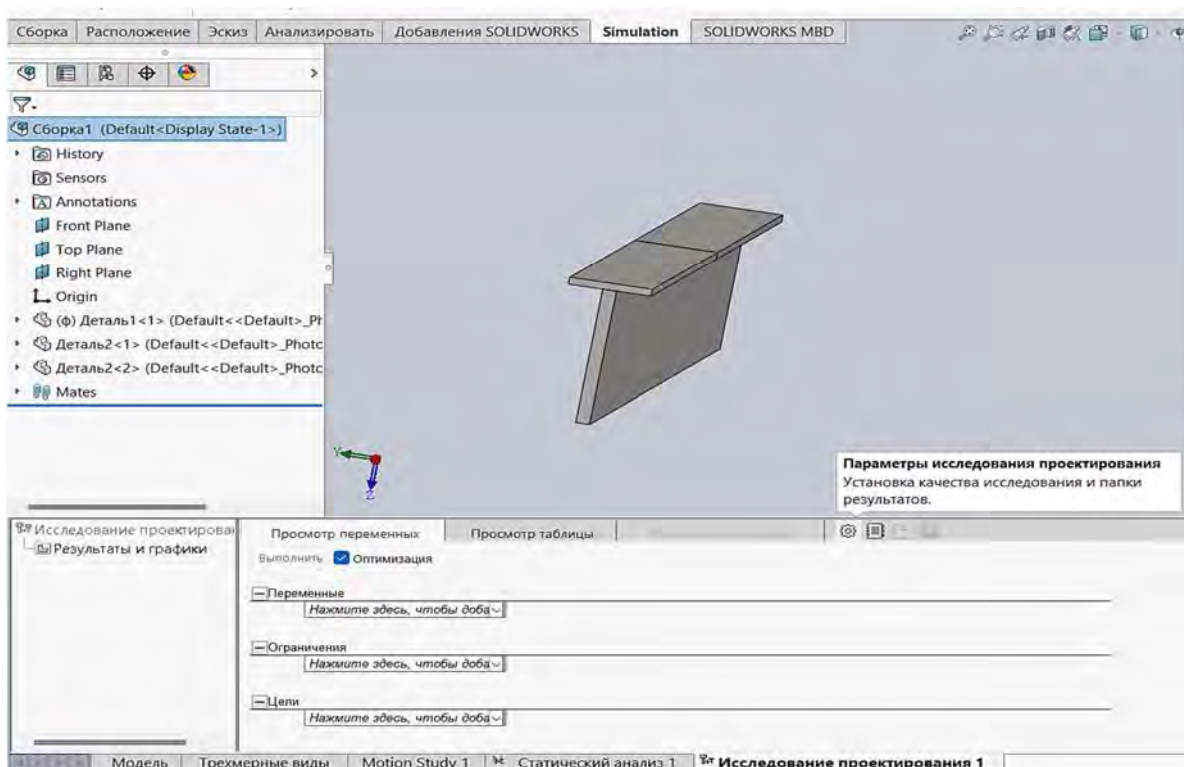


Рис. 3.131. Внешний вид экрана при проведении *Исследования проектирования*

В результате появится таблица с первоначальными значениями варьируемых параметров (рис. 3.134). Как видно из таблицы, этих параметров пять и они характеризуют высоту стенки тавра на расстоянии в 500 мм между соответствующими сечениями.

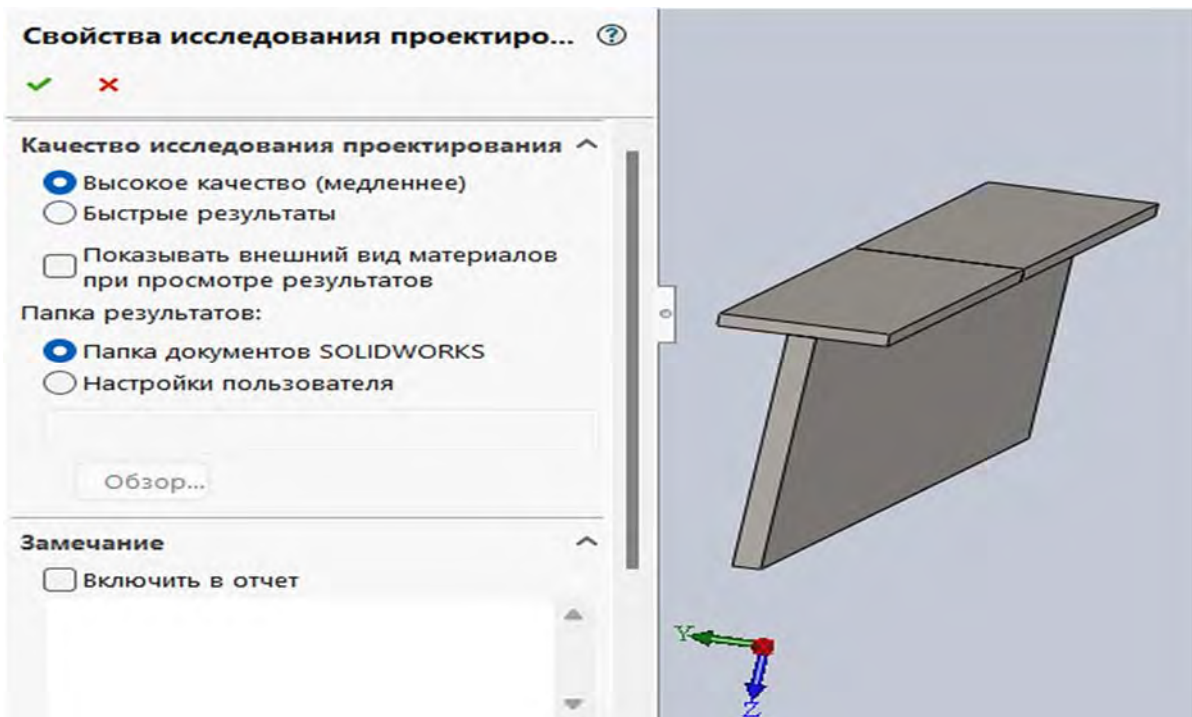
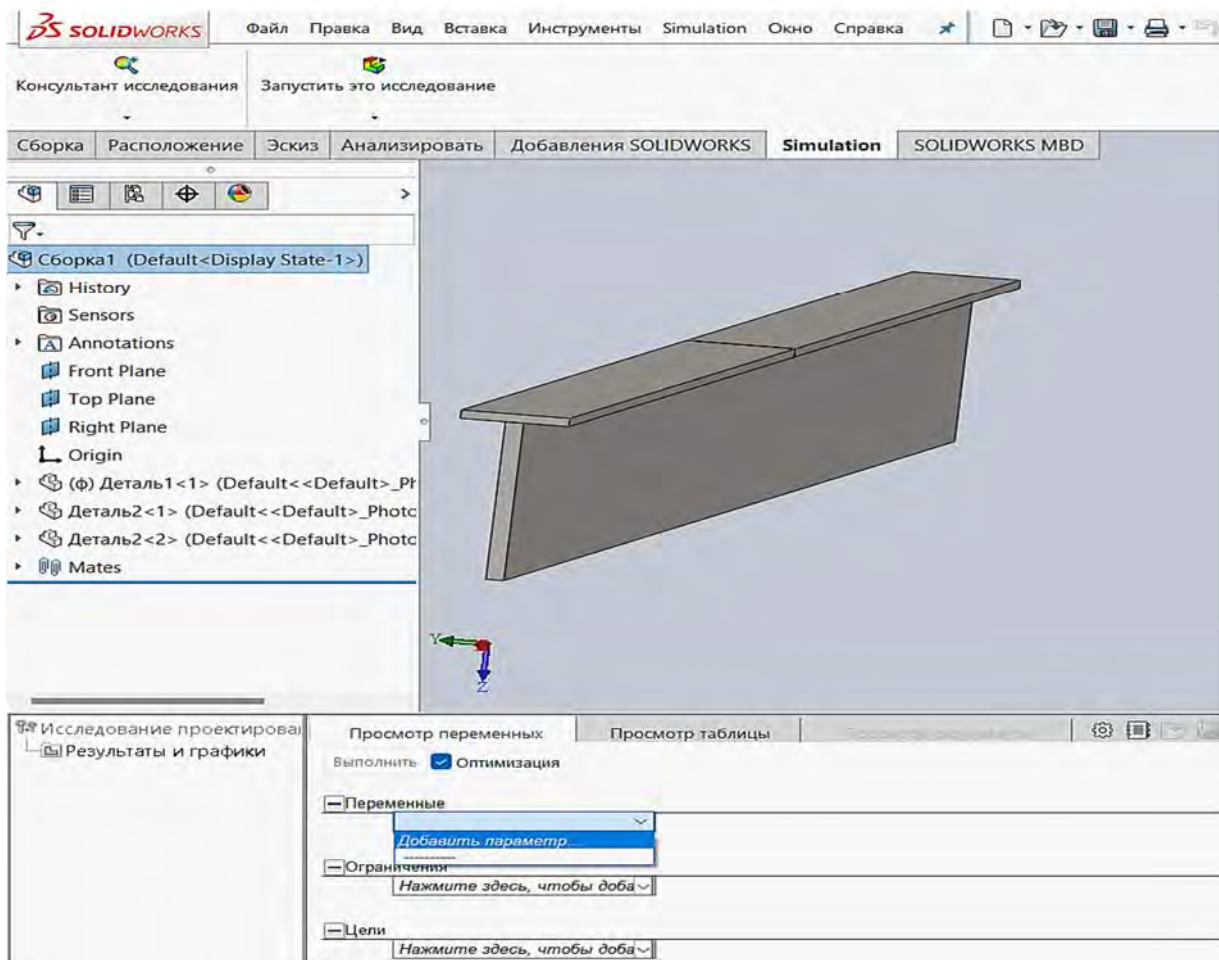
Рис. 3.132. Меню выбора свойств *Исследования проектирования*

Рис. 3.133. Введение варьируемых параметров в алгоритм оптимизации

Настройки

| Имя | Категория     | Значение | Единицы | Заметка | Связанный |
|-----|---------------|----------|---------|---------|-----------|
| p1  | Размер модели | 114      | mm      |         | *         |
| p2  | Размер модели | 114      | mm      |         | *         |
| p3  | Размер модели | 114      | mm      |         | *         |
| p4  | Размер модели | 114      | mm      |         | *         |
| p5  | Размер модели | 114      | mm      |         | *         |
|     | Размер модели | 0        |         |         |           |

Ссылки

Размер модели: D9@Эскиз1@Деталь1.Part

Выберите размер модели, который необходимо связать с этим параметром.

OK Отмена Применить Справка

Рис. 3.134. Первоначальные значения варьируемых параметров перед оптимизацией

После введения этих данных появится новая таблица (рис. 3.135), в которой по умолчанию предлагается установить границы варьирования в пределах 0,5...1,5 от первоначального значения и шаг варьирования.

Просмотр переменных | Просмотр таблицы | Просмотр результатов

Выполнить ☒ Оптимизация

Всего активных сценариев: 243

Переменные

|                               |                   |           |             |           |
|-------------------------------|-------------------|-----------|-------------|-----------|
| p1                            | Диапазон при шаге | Мин: 57мм | Макс: 171мм | Шаг: 57мм |
| p2                            | Диапазон при шаге | Мин: 57мм | Макс: 171мм | Шаг: 57мм |
| p3                            | Диапазон при шаге | Мин: 57мм | Макс: 171мм | Шаг: 57мм |
| p4                            | Диапазон при шаге | Мин: 57мм | Макс: 171мм | Шаг: 57мм |
| p5                            | Диапазон при шаге | Мин: 57мм | Макс: 171мм | Шаг: 57мм |
| Нажмите здесь, чтобы добавить |                   |           |             |           |

ерные виды | Motion Study 1 | Статический анализ 1 | Исследование проектирования 1

Рис. 3.135. Границы и шаг варьирования при оптимизации

Следует иметь в виду, что приведенные границы и шаг варьирования могут назначаться пользователем программного продукта по своему усмотрению.

После ввода переменных необходимо представить информацию об ограничениях (рис. 3.136), при этом появится новое меню (рис. 3.137) о типе используемого датчика, количестве данных и свойстве.

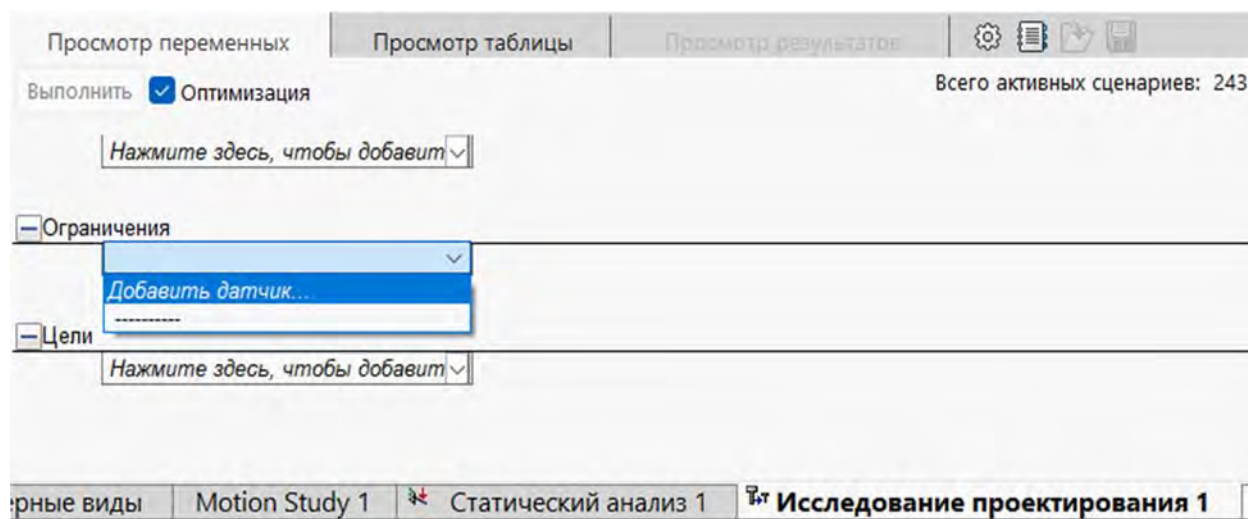


Рис. 3.136. Порядок ввода ограничений

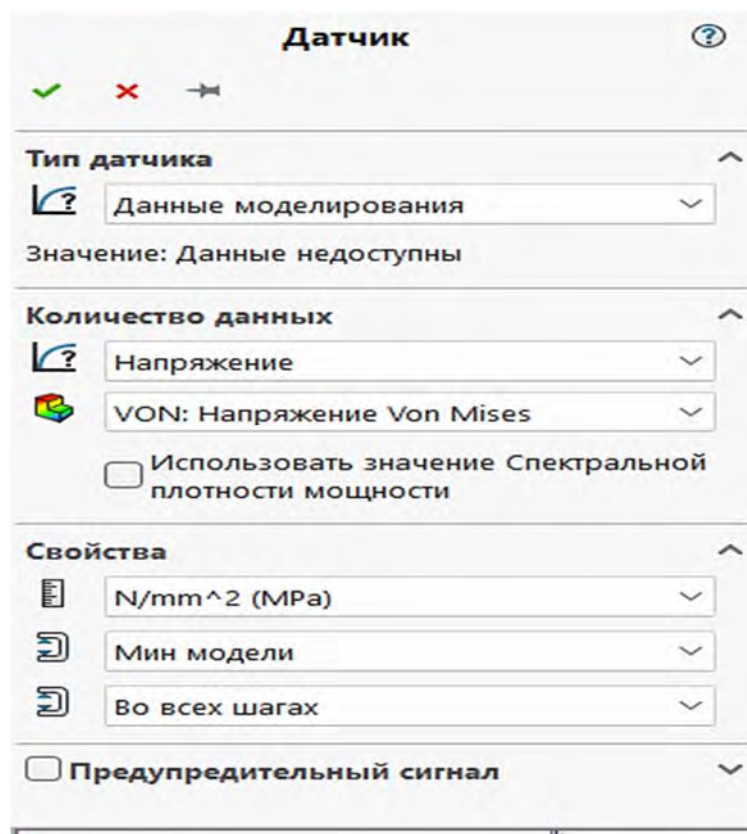


Рис. 3.137. Вводимая информация об ограничениях

Как видно (см. рис. 3.137), датчик использует информацию о проводимом на каждом шаге статическом анализе, в качестве параметра контроля используются напряжения Von Mises, которые определяются в ньютонах на квадратный миллиметр (мегапаскалях), и решается задача оптимизации модели.

После введения ограничений и цели можно перейти непосредственно к проведению процесса оптимизации посредством нажатия клавиши *Выполнить* (рис. 3.138).

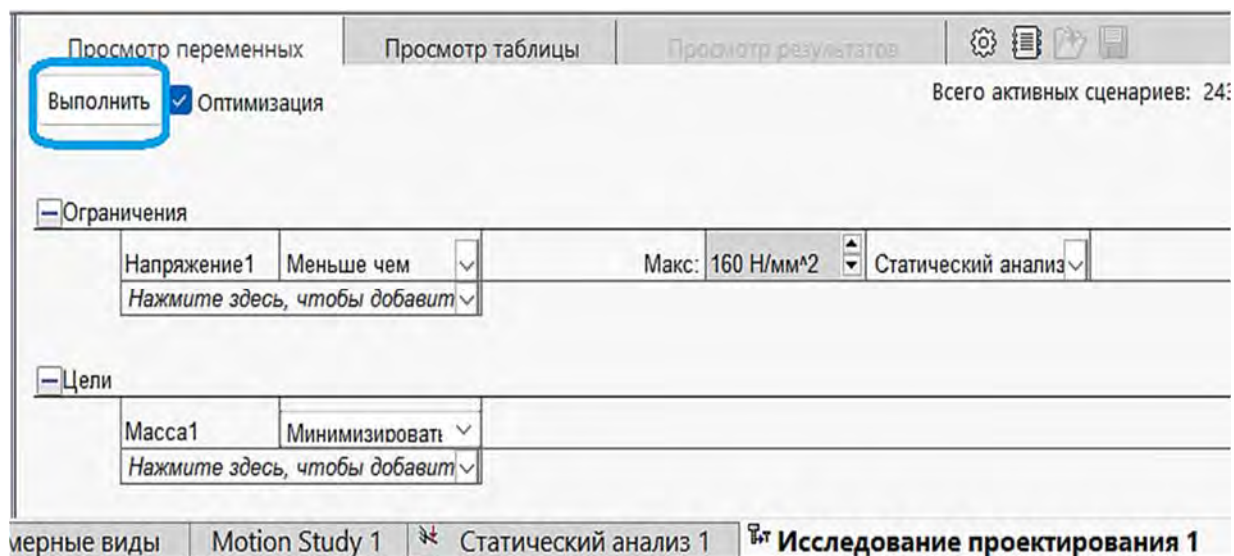


Рис. 3.138. Запуск программы по осуществлению процесса оптимизации

В результате проведенной оптимизации были получены (в рамках используемого количества управляемых параметров варьирования и размеров шага приращения по итерациям) данные о наилучшем варианте формы стенки тавровой балки с точки зрения минимизации металлоемкости и об удовлетворении требований прочности. В результате внешний вид балки стал таким, как показано на рис. 3.139.

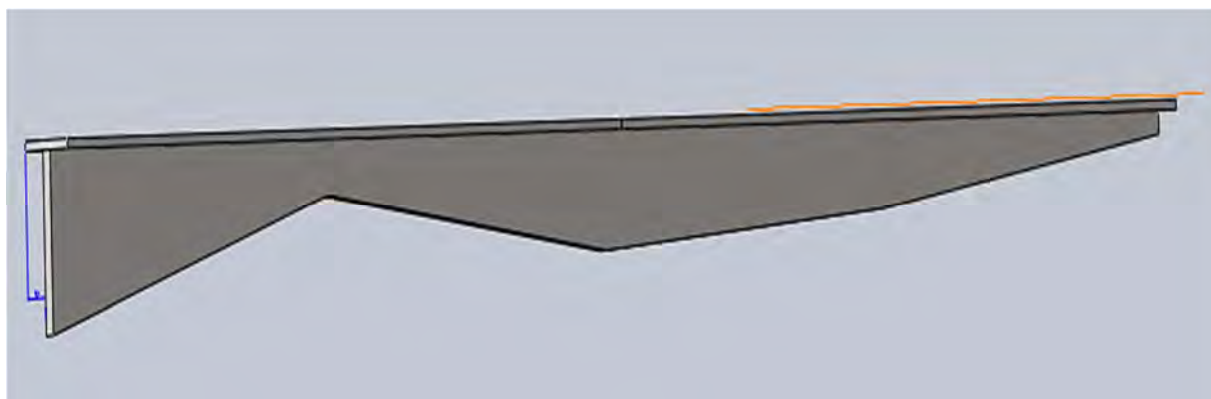


Рис. 3.139. Форма тавровой балки после проведения процесса оптимизации

В таблице просмотра результатов (рис. 3.140) приведены значения оптимального варианта управляемых параметров и, кроме того, величины максимальных напряжений, возникающих в балке, а также масса балки после проведения процесса оптимизации.

Просмотр переменных

Просмотр таблицы

Просмотр результатов






43 из 43 сценариев завершены успешно. Качество исследования проектирования: Грубо

|                 |                         | Текущая       | Начальная     | Оптимальная (-1) | Сценарий 1   | Сценарий 2   |
|-----------------|-------------------------|---------------|---------------|------------------|--------------|--------------|
| p5              |                         | 14мм          | 14мм          | 14мм             | 14мм         | 14мм         |
| Напряж<br>ение1 | (0 Н/мм^2 ~ 150 Н/мм^2) | 195.36 Н/мм^2 | 195.36 Н/мм^2 | 129.21 Н/мм^2    | 328.5 Н/мм^2 | 271.5 Н/мм^2 |
| Масса1          | Минимизировать          | 14.430000     | 14.430000     | 14.430000        | 11.700001    | 12.090001    |

Рис. 3.140. Таблица результатов проведенного процесса оптимизации

Как видно из таблицы (см. рис. 3.140), масса балки снизилась после оптимизации с 23,4 до 14,43 кг, т. е. на 38,3 %.

Напряженно-деформированное состояние балки стало таким, как представлено на рис. 3.141 и 3.142.

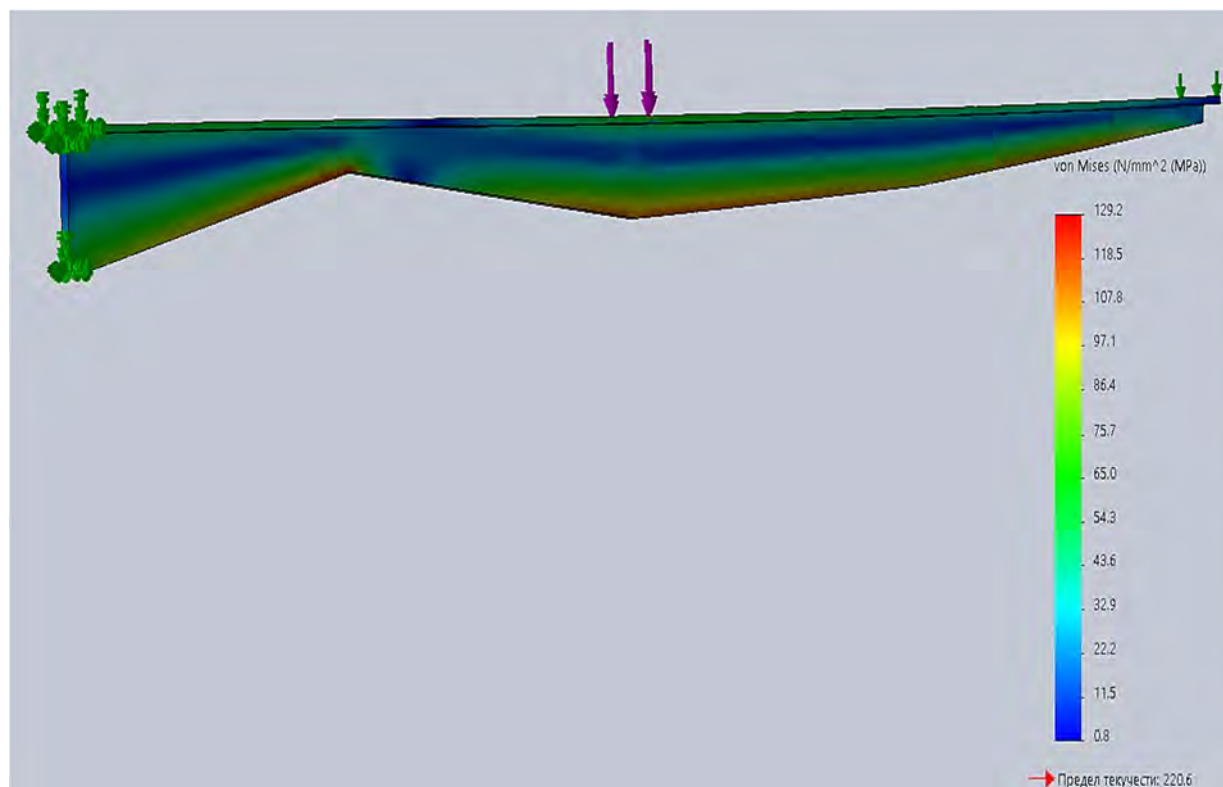


Рис. 3.141. Эпюра распределения напряжений Von Mises по объему балки после оптимизации

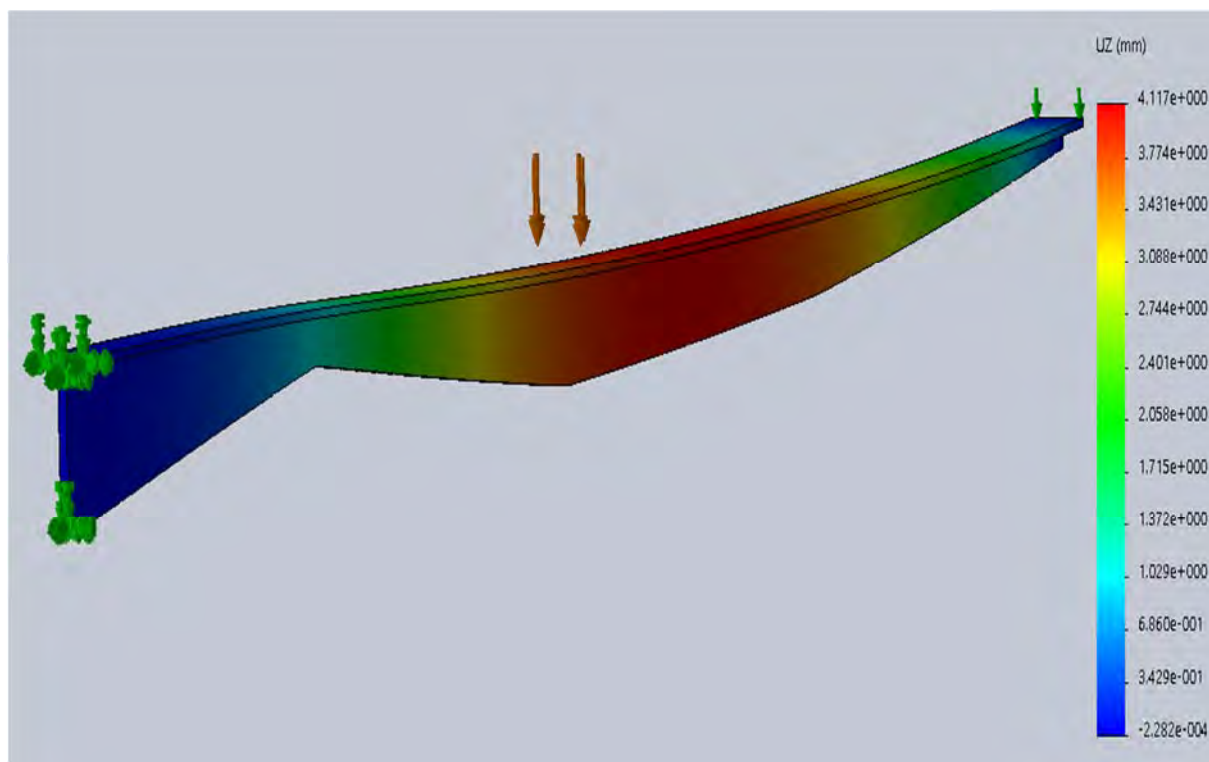


Рис. 3.142. Эпюра прогибов балки в вертикальном направлении

Из приведенных рисунков видно, что напряжения по длине балки располагаются более равномерно, чем это было в первоначальном варианте (см. рис. 3.129).

### ***Контрольные вопросы***

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Что подразумевается под термином «*оптимизация*» при проектировании конструкций?
3. Какая классификация принята для способов оптимизационного проектирования?
4. В чем заключается сущность способа *структурная оптимизация*?
5. В чем заключается сущность способа *параметрическая оптимизация*?
6. В чем заключается сущность способа *топологическая оптимизация*?
7. В чем заключается сущность различия между способами *параметрической* и *топологической оптимизаций*?
8. Как вычислить количество вариантов сочетания *управляемых параметров* при использовании *метода полного перебора* в *параметрической оптимизации*?
9. Какие условия предварительно должны быть выполнены для решения задачи *параметрической оптимизации*?
10. Какие этапы необходимо выполнить в лабораторной работе?

### 3.8. Лабораторная работа № 8. Проведение нелинейного статического анализа балки при изгибе

**Цель работы:** ознакомление с процедурой проведения нелинейного статического анализа изделий в SolidWorks Simulation.

#### *Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы*

Нелинейности, рассматриваемые в задачах механики твердого деформируемого тела, можно условно разделить на следующие.

1. *Геометрическая нелинейность*, когда в результате деформирования исследуемых объектов происходит существенное изменение их жесткостных свойств, а также силового воздействия.

2. *Физическая нелинейность*, заключающаяся в нелинейном характере взаимосвязи между параметрами напряженно-деформированного состояния материала объекта (не выполняется закон Гука).

3. *Нелинейность граничных условий*, состоящая в изменении пятна контакта и распределении усилий по этой зоне при контактном взаимодействии тел.

Поскольку решение нелинейных задач предполагает использование итерационных процессов, данный вид анализа требует больших вычислительных ресурсов и достаточно высокой квалификации от инженера-расчетчика.

Рассмотрим по отдельности приведенные нелинейности.

*Геометрическая нелинейность.* В ряде случаев появляется необходимость в учете геометрической нелинейности при возникновении больших перемещений, больших деформаций, учете следящей нагрузки и поведения конструкции после потери устойчивости. Такого рода проблемы должны отслеживаться, например, для анализа устойчивости тонких пластин, вращения валов, формовки металла и т. д. Решение об учете геометрической нелинейности принимается исходя из опыта инженера, при этом целесообразно проводить сопоставительный анализ исследуемого объекта с учетом геометрической нелинейности и без нее. В некоторых случаях учет нелинейности заведомо обоснован, например, если прогиб пластины превышает 20 % от ее толщины (рис. 3.143) или прогиб балки превышает 2 % от ее длины [3].

*Физическая нелинейность.* В решении задач механики твердого деформируемого тела наиболее распространенными являются следующие модели свойств материалов: упругая; вязкоупругая; упругопластическая; вязкопластическая.

Остановимся более подробно на каждой из приведенных моделей.

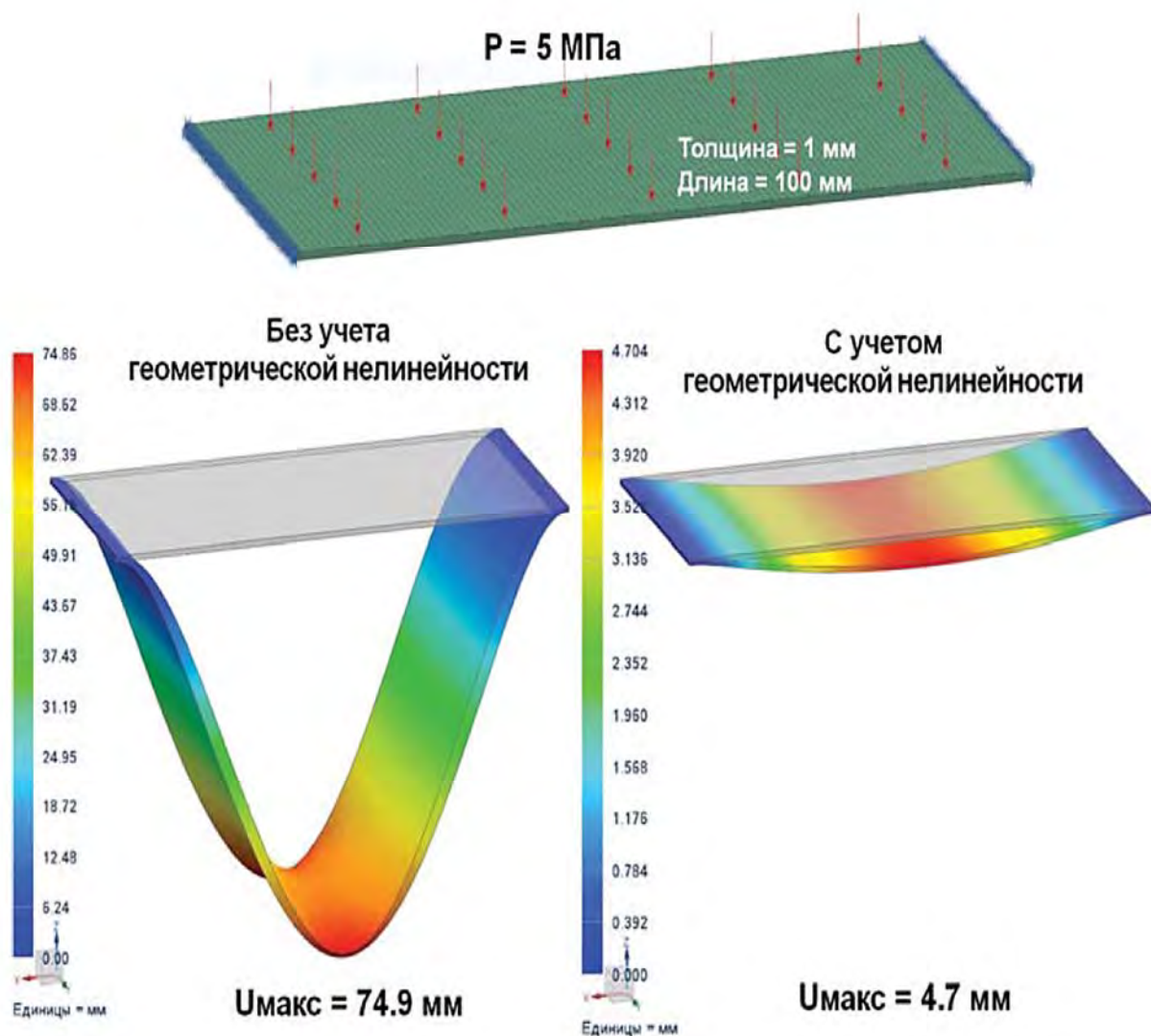


Рис. 3.143. Сопоставительный анализ учета геометрической нелинейности

*Упругая модель* материала представляет собой математическое описание поведения материала, обладающего идеальной упругостью. Напомним, что идеально упругим телом называется тело, которое под действием внешней нагрузки определенным образом деформируется и при снятии ее полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму. На рис. 3.144 показано поведение идеально упругих тел в процессе нагружения и при последующей разгрузке.

Фрагмент рис. 3.144, *a* характеризует материал, у которого наблюдается прямо пропорциональная связь между напряжениями и деформациями, т. е. считается справедливым закон Гука:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ .

Линейно упругая модель описывает поведение большинства конструкционных материалов в интервале, ограниченном пределом пропорциональности  $\sigma_{пг}$  (рис. 3.145).

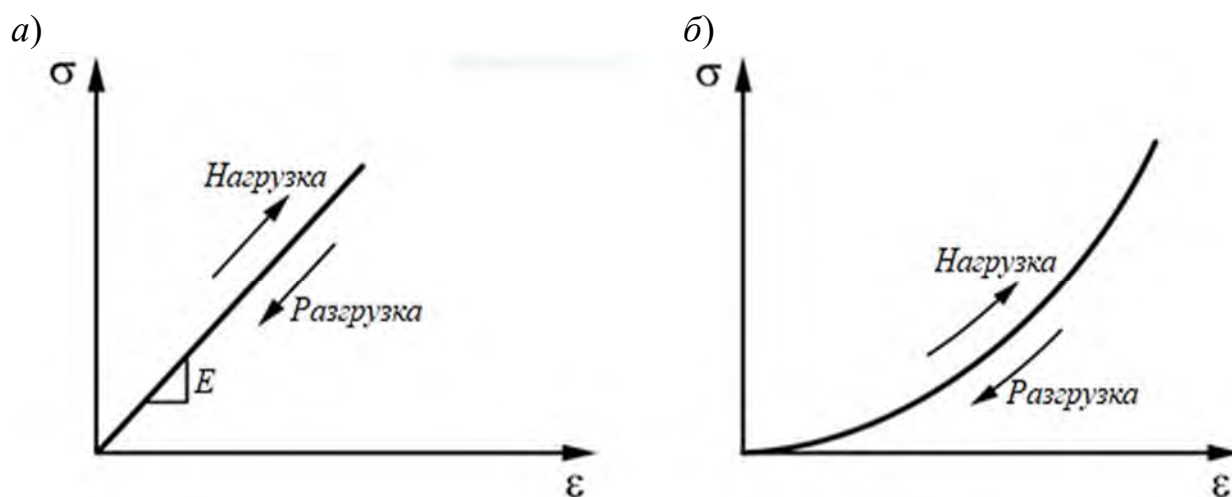


Рис. 3.144. Модели идеально упругого тела: *а* – линейно упругая; *б* – нелинейно упругая

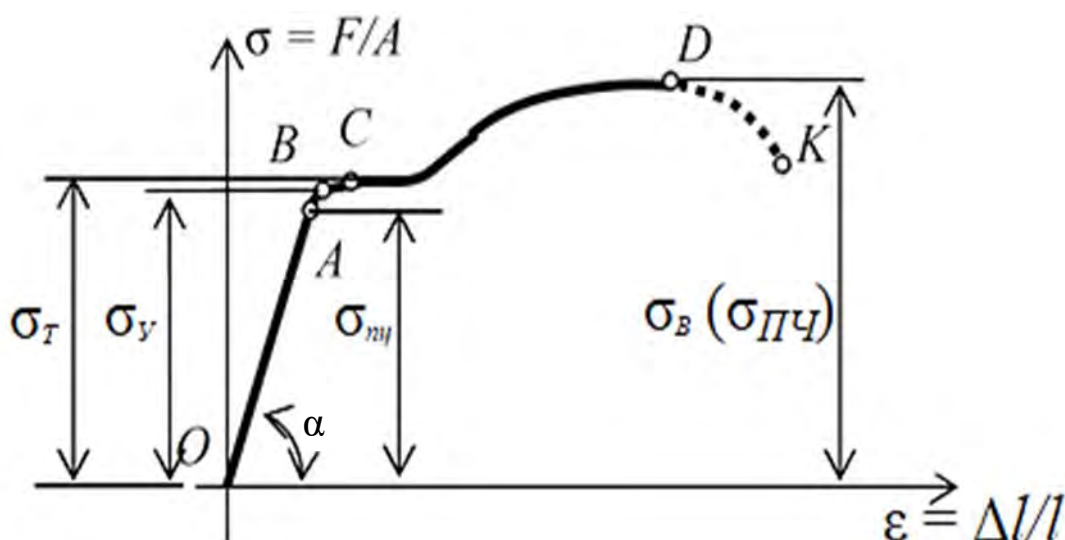


Рис. 3.145. Диаграмма растяжения пластичной стали

Нелинейная упругая модель (см. рис. 3.144, *б*) может быть использована, вплоть до точки разрушения ( $\sigma_{вр}$ ,  $\sigma_{вс}$ ), для большинства хрупких материалов (рис. 3.146), а также для гиперупругих материалов, таких как, например, резина.

*Вязкоупругой моделью* материала называется модель, обладающая одновременно упругими свойствами (обратимая деформация) и вязкостью (необратимая деформация), т. е. обладает некоторыми характеристиками свойствами жидкости.

При приложении нагрузки к объекту из этого материала упругая деформация возникает мгновенно, в то время как вязкая деформация происходит постепенно с течением времени. Такого рода модель соответ-

вует процессам, происходящим в полимерных материалах, полимерных композитах, смолах и биологических тканях.

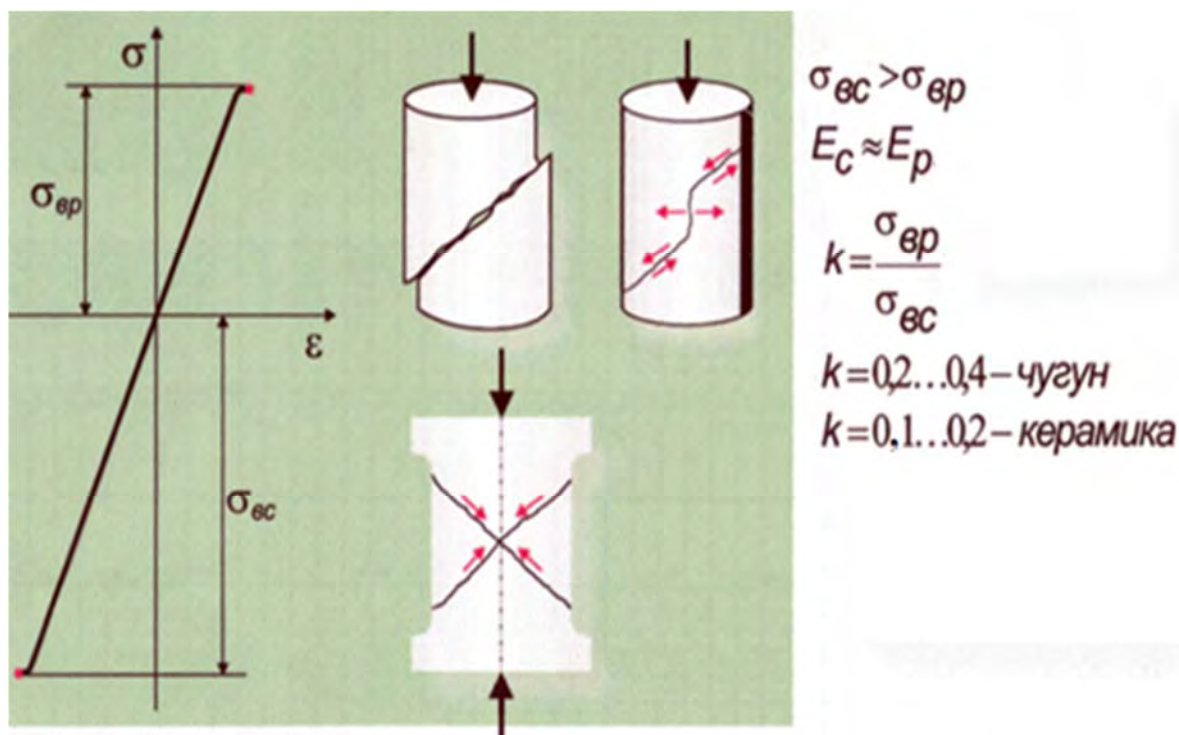


Рис. 3.146. Характерная диаграмма растяжения-сжатия для некоторых хрупких материалов

Характерные особенности поведения вязкоупругого тела в процессе нагружения отображены на рис. 3.147. Как видно из рис. 3.147, а, кривые нагружения и последующей разгрузки не совпадают и формируют петлю гистерезиса (заштрихованная область). Посредством фрагмента рис. 3.147, б проиллюстрирована взаимосвязь между скоростью деформирования вязкоупругого тела и величиной напряжений, вызывающих сопоставимую деформацию. Из анализа данного фрагмента можно прийти к заключению о том, что увеличение скорости нагружения приводит к возрастанию сопротивления вязкоупругого тела. В этом состоит основное отличие вязкоупругого материала от материала, которому свойственна простая упругость, результирующая деформация которого остается одинаковой независимо от скорости нагружения и продолжительности действия нагрузки.

*Упругопластическая модель* используется для материалов, которым свойственно следующее поведение под нагрузкой – нагружение происходит упруго, вплоть до некоторого предельного значения, после которого возникают остаточные деформации. К наиболее распространенным моделям, описывающим упругопластическое поведение материала, можно отнести:

идеально жесткое пластическое тело; идеально упругопластическое тело; упругопластическое упрочняемое тело.

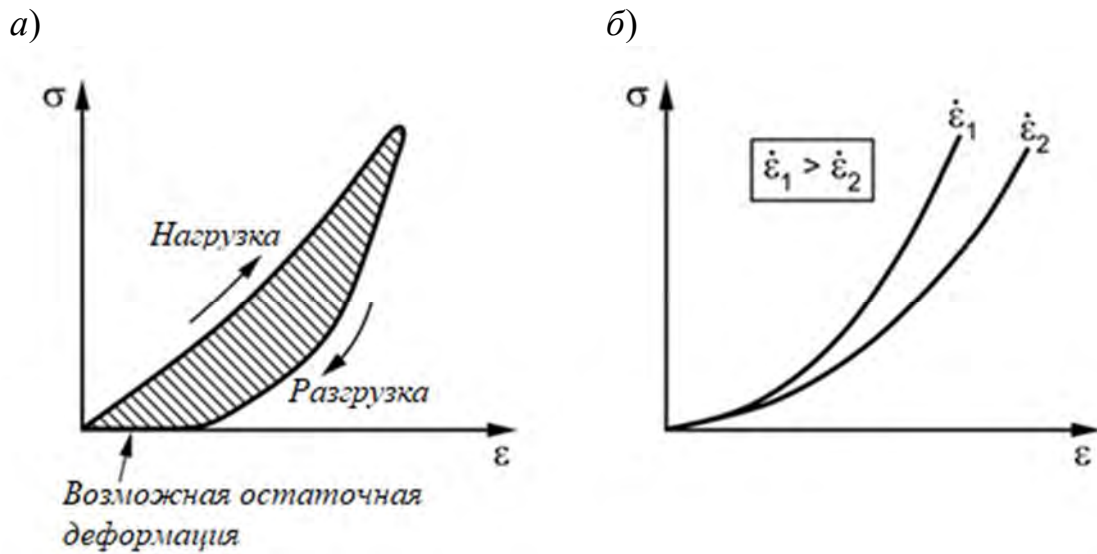


Рис. 3.147. Поведение вязкоупругого тела при нагружении и последующей разгрузке (а) и влияние скорости деформирования на напряженно-деформированное состояние образца (б)

Идеально жесткое пластическое тело представляет собой простейшую модель, описывающую накопление пластических деформаций в исследуемом объекте (рис. 3.148).

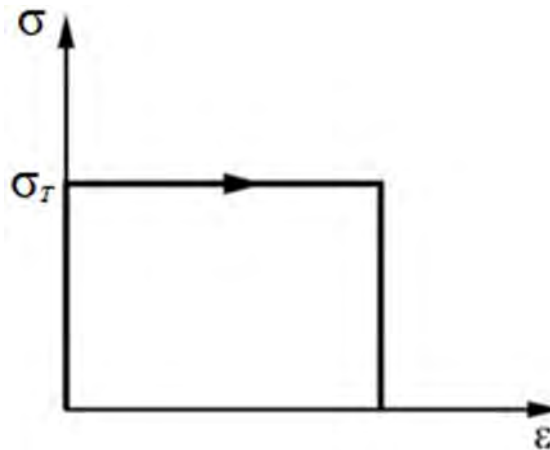


Рис. 3.148. Идеально жесткое пластическое тело

Данная модель характеризуется тем, что описываемый с ее помощью объект не деформируется вплоть до достижения напряжений в теле предела текучести материала  $\sigma_T$  и затем деформируется при постоянном уровне напряжений. Данная модель может быть использована при анализе поведения грунтов и при процессе обработки металлов давлением.

Идеально упругопластическое тело представляет собой модель, материал которой до достижения в нем напряжений, равных пределу текучести  $\sigma_T$ , деформируется упруго, а при напряжениях, равных пределу текучести, продолжает деформироваться при постоянном уровне напряжений.

График, описывающий такое поведение моделируемого материала, называется идеализированной диаграммой Прандтля (рис. 3.149).

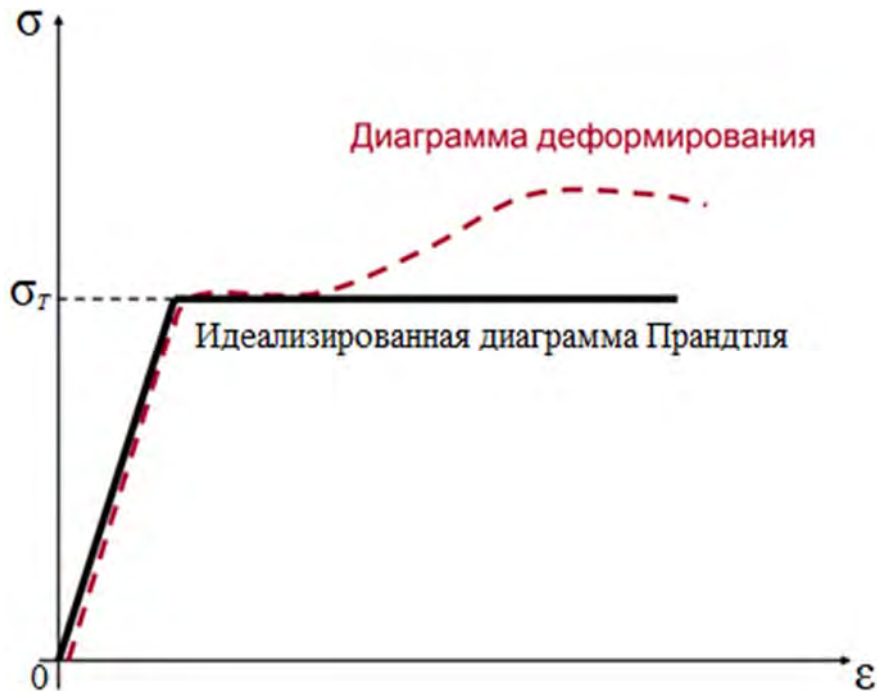


Рис. 3.149. Идеально упругопластическое тело

Упругопластическое упрочняемое тело является существенно более сложной моделью, поскольку она должна, кроме всего прочего, описывать упрочнение материала, т. е. учитывать изменение предела текучести совместно с пластической деформацией (рис. 3.150).

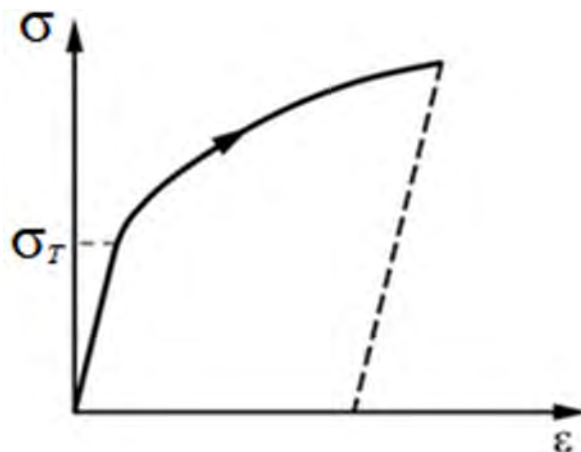


Рис. 3.150. Упругопластическое упрочняемое тело

Данная модель особенно востребована при анализе полей остаточных напряжений, возникающих при выполнении сварочных операций, различных видов обработки металлических изделий, процессов, связанных с упругопластическим деформированием.

Проведение расчетов за пределами упругости базируется на экспериментальном исследовании механических свойств материала при одноосном растяжении. Результаты данных исследований, как правило, представляют в виде графиков зависимости напряжений от деформаций. С целью упрощения проводимых расчетов за пределами упругости диаграммы растяжения определенным образом схематизируются. Их представляют в виде набора прямых отрезков, по возможности хорошо совпадающих с экспериментально полученными диаграммами. Так, например, можно задавать диаграмму деформирования материала одним из следующих двух способов (рис. 3.151) [3].

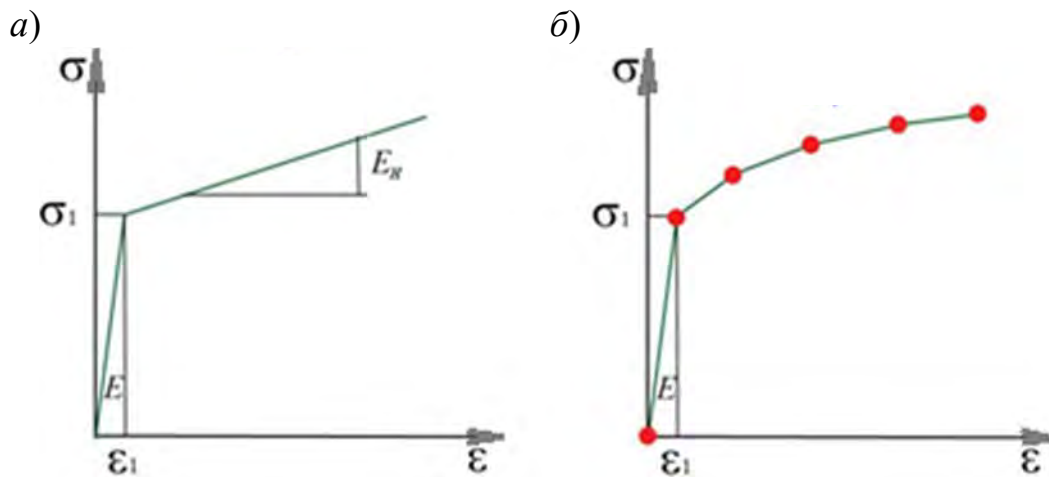


Рис. 3.151. Способы представления диаграммы растяжения при проведении расчетов: *а* – билинейная кривая; *б* – кусочно-линейная кривая

На рис. 3.151, *а* (билинейная кривая) идеализация диаграммы деформирования включает в себя начальные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_T$  и тангенс угла наклона прямой пластического участка, характеризуемого параметром  $E_H$ . Кусочно-линейное представление диаграммы деформирования (см. рис. 3.151, *б*) определяется табличными значениями, где первый участок соответствует упругому деформированию.

При решении задач, связанных с упругопластическим деформированием изделия, необходимо знать, при каких условиях материал в рассматриваемой точке переходит из упругого состояния в пластическое. Условие, характеризующее возможность перехода из упругого состояния в пластическое, называется *условием пластичности* или *критерием пластичности*.

При линейном напряженном состоянии (соосное растяжение-сжатие стержня) условие пластичности устанавливается опытным путем (см. рис. 3.145). В этом случае главное напряжение  $\sigma_1$  отлично от нуля, а два других  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , и пластические деформации возникают тогда, когда

$$\sigma_1 = \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести, известная величина для каждого материала.

При чистом сдвиге условие пластичности имеет вид

$$\tau = \tau_T,$$

где  $\tau_T$  – предел текучести при сдвиге.

В общем случае плоского и объемного напряженного состояния невозможно установить экспериментально условия пластичности для бесконечного множества соотношений между составляющими напряжений. Поэтому условие пластичности для сложного напряженного состояния устанавливается гипотетическим путем с последующей экспериментальной проверкой [17]. Так, например *критерий пластичности Треска – Сен-Венана* базируется на предположении, что пластические деформации возникают в металле, когда максимальные касательные напряжения достигают предела текучести  $\tau_{\max} = \tau_T$ . В результате критерий пластичности Треска – Сен-Венана в окончательном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T.$$

*Условие пластичности Губера – Мизеса – Генки* основывается на гипотезе о том, что появлению пластических деформаций предшествует достижение энергии формоизменения элементарного объема рубежного значения. В результате, согласно этому условию, пластическая деформация наступает тогда, когда интенсивность напряжений достигнет величины, равной пределу текучести при линейном напряженном состоянии, т. е.

$$\sigma_i = \sigma_T.$$

Интенсивностью напряжений для объемного напряженного состояния называется выражение

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

*Вязкопластическая модель* – это комбинация вязкоупругой и пластической моделей. Характерной особенностью данной модели является то, что с ее помощью можно описывать поведение материала в пластической области, когда пластичность зависит от скорости деформирования (рис. 3.152).

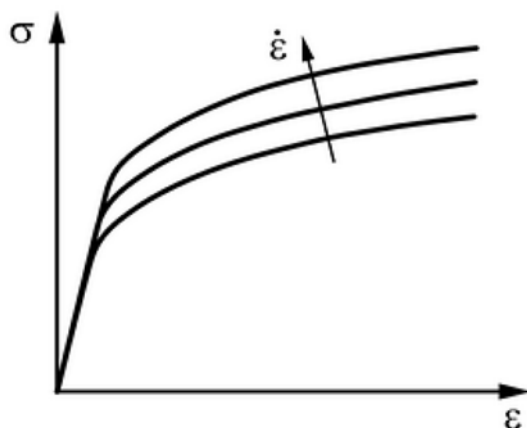


Рис. 3.152. Поведение материала, у которого пластическая деформация зависит от скорости деформирования

Использование данной модели является целесообразным для описания такого явления, как ползучесть (например, поведение металлических изделий в условиях высоких температур). Кроме того, она может быть полезна для моделирования широкого диапазона других материалов, таких как асфальт, бетон, глина, бумажная масса и т. д.

Для статического линейного и нелинейного анализа нагрузка представляет собой постоянную во времени величину, либо изменяемую во времени очень медленно, когда силами инерции можно пренебречь. Вместе с тем при решении статических нелинейных задач механики твердого деформируемого тела в рассматриваемой компьютерной системе используется пошаговый метод нагружения. Время в данном случае играет роль *фиктивной величины* для изменения нагрузки. Таким образом, на каждом шаге во времени решается результирующая система линейных алгебраических уравнений, определяются возникающие в объекте напряжения и деформации, а затем с использованием критериев пластичности производится проверка на предмет наступления пластического деформирования. Если проверка установила, что пластическое деформирование еще не наступило, переходят к следующему шагу нагружения. В том случае, когда

проверка показала, что критерий пластичности превышен, то с этого момента начинается итерационный процесс.

В компьютерной системе SolidWorks Simulation используются следующие два итерационных процесса.

Итерационный метод решения – *алгоритм Ньютона – Рафсона (NR)*, сущность которого представлена на рис. 3.153.

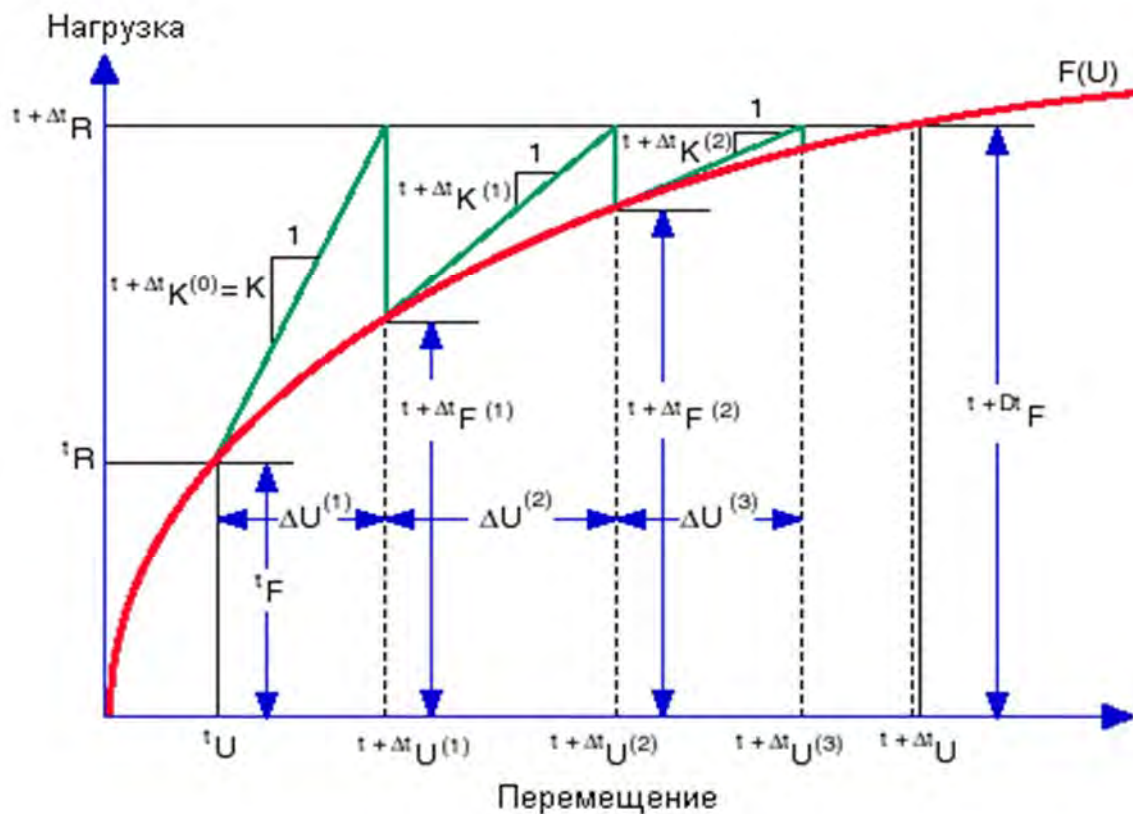


Рис. 3.153. Схема алгоритма итерационного метода Ньютона – Рафсона (NR)

В данном алгоритме матрица касательной жесткости формируется и раскладывается на каждой итерации внутри определенного шага, как показано на рис. 3.153. Метод NR имеет высокую степень сходимости, степень его сходимости является квадратичной. Вместе с тем, поскольку касательная жесткость формируется и раскладывается на каждой итерации, данный метод является затратным с точки зрения длительности проводимых расчетов. Указанная проблема в определенной степени устраняется посредством использования *модифицированного метода Ньютона – Рафсона (MNR)*, алгоритм которого приведен на рис. 3.154. В данном алгоритме матрица касательной жесткости формируется и раскладывается в начале каждого шага во времени и используется в течение всех итераций этого шага. Здесь следует отметить, что в некоторых случаях данный метод является менее точным.

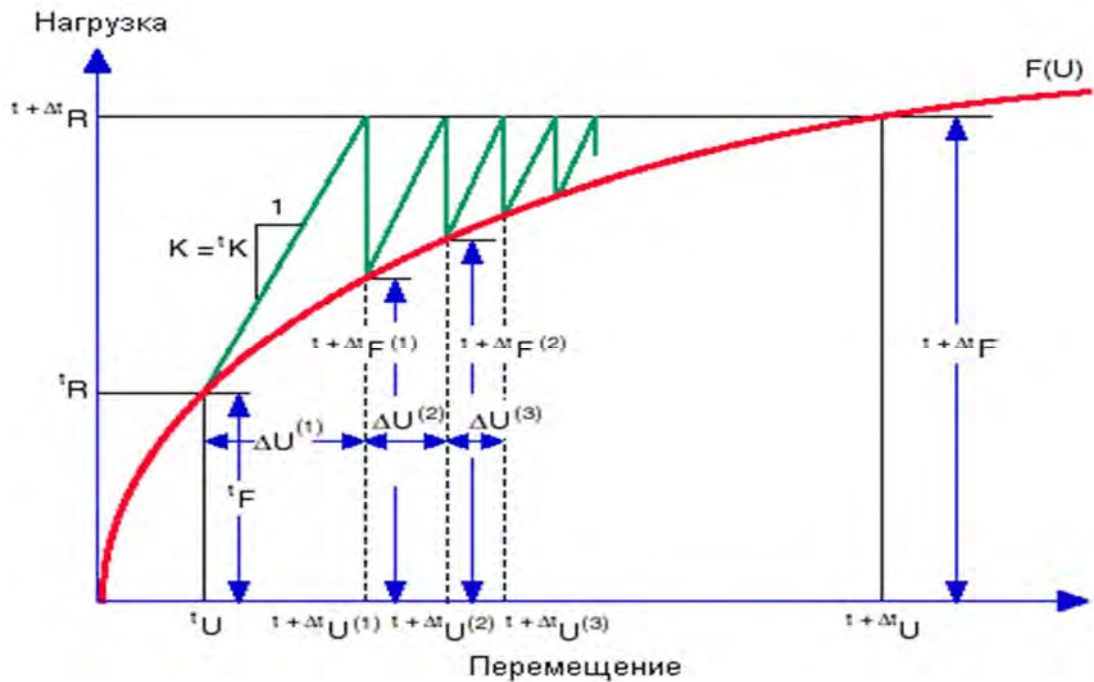


Рис. 3.154. Схема алгоритма модифицированного метода Ньютона – Рафсона (MNR)

Для предметного изучения данной темы рассмотрим упругопластический изгиб балки. Предположим, что материал балки представляет собой идеально упругопластическое тело (рис. 3.155).

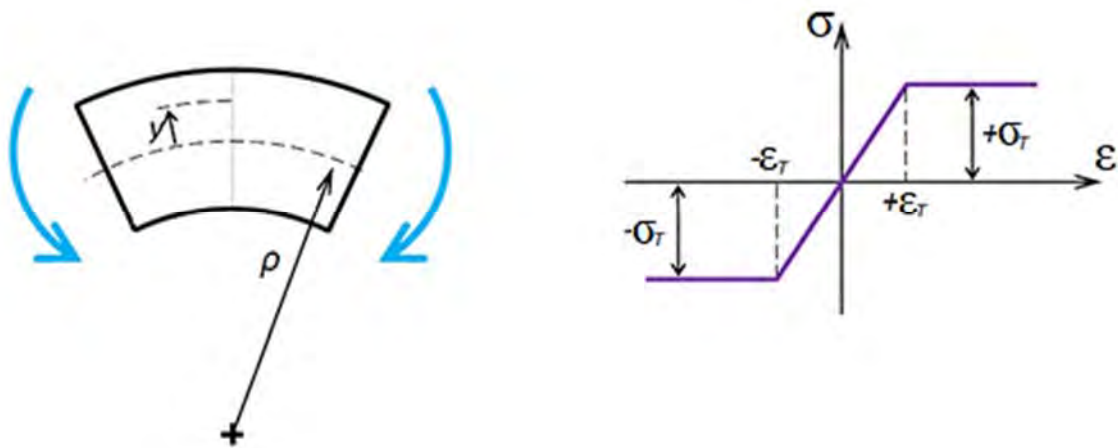


Рис. 3.155. Диаграмма деформирования идеально упругопластического тела

Как известно из курса «Механика материалов», деформация  $\varepsilon$  изменяется в поперечном сечении по линейному закону  $\varepsilon = y/\rho$ . Напряжения  $\sigma$  также изменяются вслед за деформациями в соответствии с законом Гука ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ) вплоть до предела текучести  $\pm\sigma_T$ , превышать который не могут, поскольку используется модель идеально упругопластического тела. На рис. 3.156 представлен процесс изменения напряжений в поперечном сечении по мере возрастания нагрузки

от упругого состояния (см. рис. 3.156, а) к предельно упругому (см. рис. 3.156, б), затем к упругопластическому (см. рис. 3.156, в) и, наконец, к предельному (пластический шарнир) (см. рис. 3.156, г).

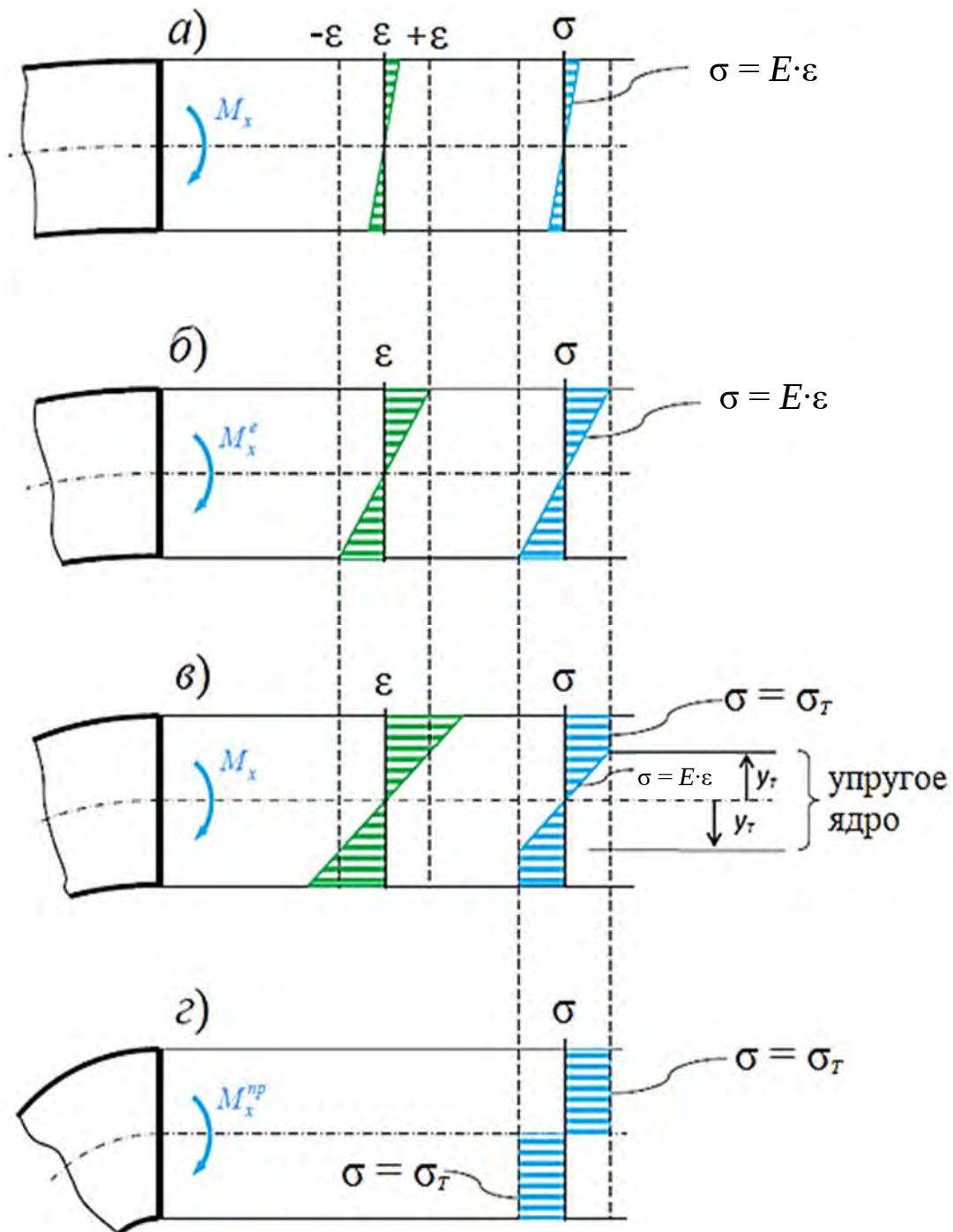


Рис. 3.156. Процесс изменения напряжений в поперечном сечении по мере возрастания нагрузки: а – упругое состояние; б – предельно упругое состояние; в – упругопластическое состояние; г – предельное состояние (пластический шарнир)

Здесь следует отметить, что на рис. 3.156 представлено изменение напряжений в симметричном поперечном сечении балки относительно

нейтральной оси. Для асимметричного поперечного сечения картина изменения напряжений будет выглядеть иначе.

В лабораторной работе необходимо построить эпюры распределения напряжений по высоте опасного сечения для четырех случаев, приведенных на рис. 3.156.

### ***Исходные данные***

Исходные данные к лабораторной работе следует взять из табл. 3.15–3.17, т. е. для тех же схем нагружения балки, что и в предыдущей лабораторной работе. Материал балки – простая углеродистая сталь, описывается моделью идеально упругопластического тела.

### ***Пример выполнения лабораторной работы***

Для проведения такого рода анализа выбираем тип исследования *Нелинейный статический анализ* (на рис. 3.157 эти опции выделены оранжевой рамкой). Кроме того, на рис. 3.157 показана твердотельная модель балки с поперечным сечением в виде тавра.

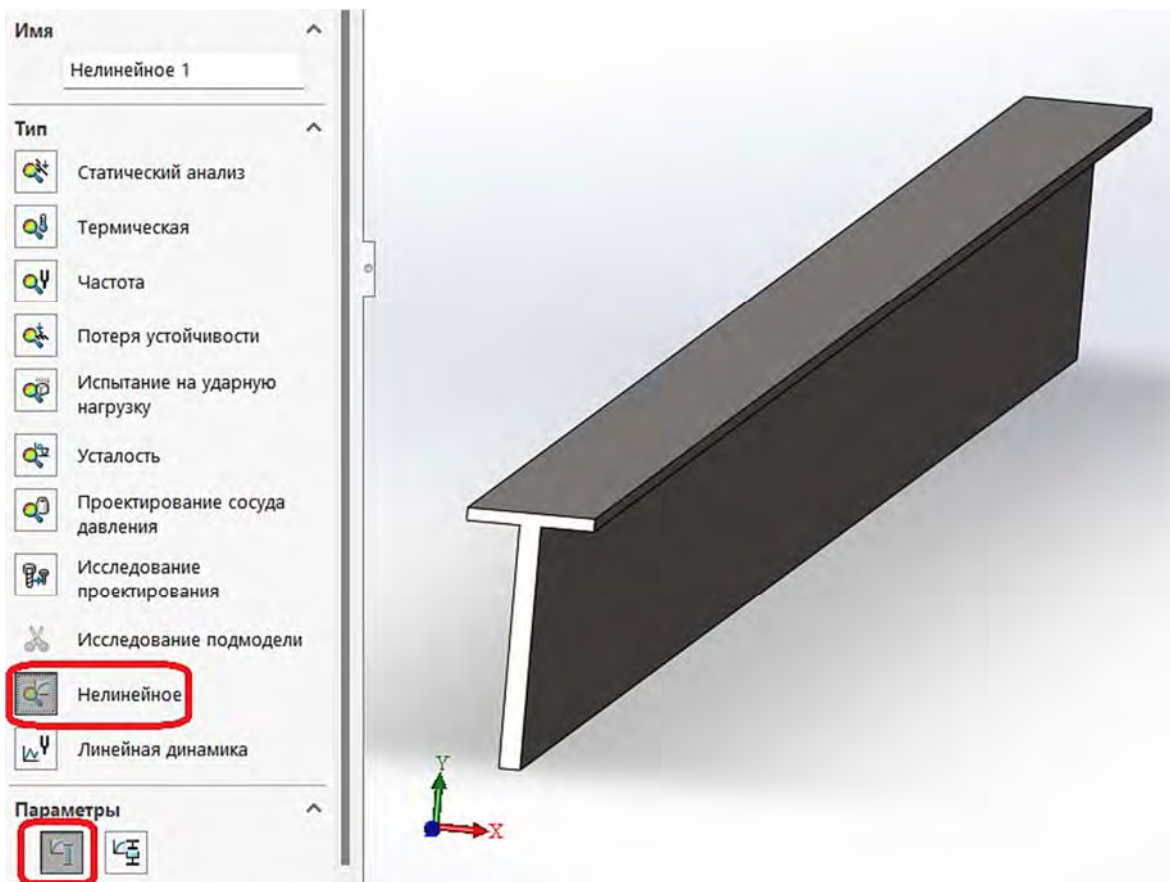


Рис. 3.157. Твердотельная модель балки с поперечным сечением в виде тавра

На рис. 3.158 показано, что балка шарнирно оперта по краям и нагружена равномерно распределенной по верхней поверхности нагрузкой.

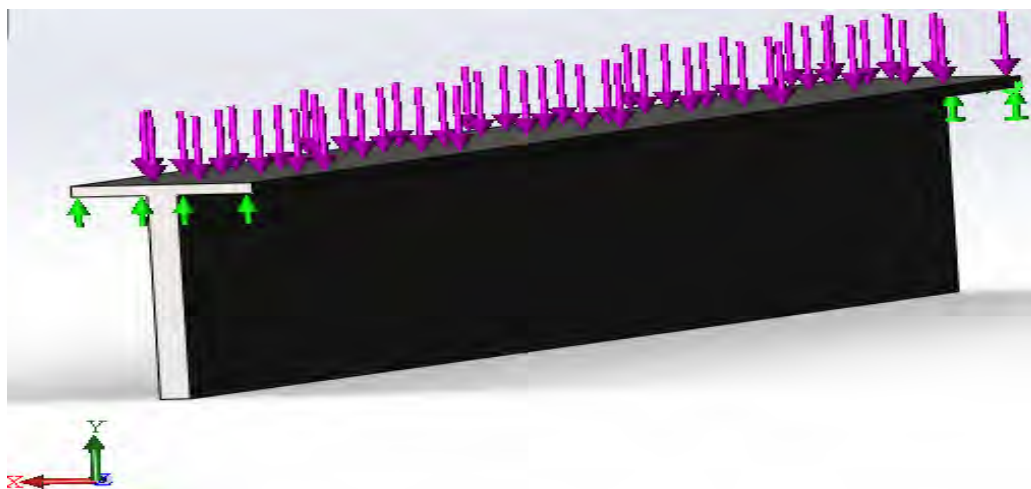


Рис. 3.158. Расчетная схема закрепления и нагружения балки

Для рассмотрения задачи с учетом физической нелинейности необходимо задать механические свойства материала исследуемого объекта (рис. 3.159) и используемую модель анализа нелинейности.

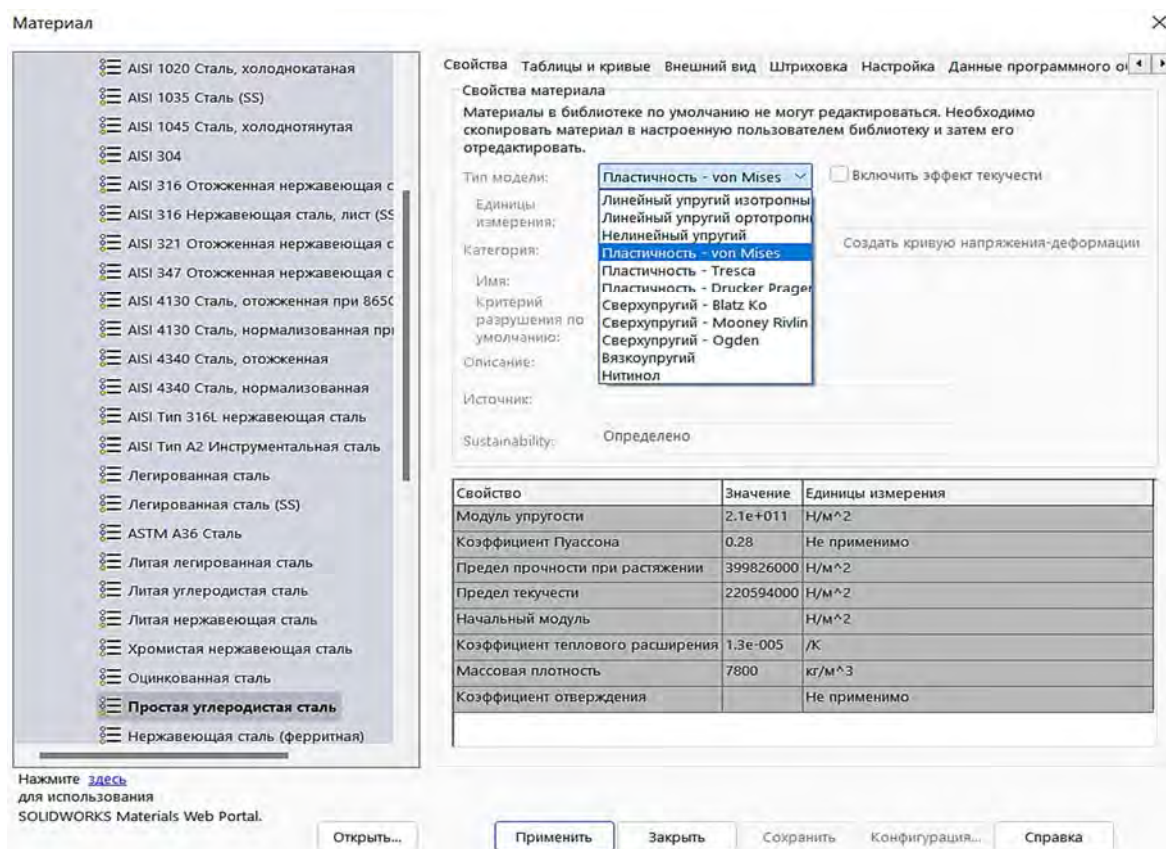


Рис. 3.159. Механические свойства материала и используемая модель раскрытия нелинейности

Как видно из приведенного рисунка, в данном конкретном случае используется модель идеально упругопластического тела, и момент наступления пластических деформаций определяется по Von Mises.

Кроме указанной информации, необходимо еще задать *Свойства* разрешающей программы нелинейного статического анализа (рис. 3.160).

Как видно из рис. 3.160, временной интервал приложения нагрузки условно подразделяется от 0 до 1,0 и этот интервал, в свою очередь, еще делится на отдельные шаги во времени, начальный временной инкремент равен 0,01. Остальные параметры можно оставить такими, как они представлены на рис. 3.160. Кроме того, в нижней части этой заставки находится опция (в оранжевой рамке) *Дополнительные параметры*. В результате нажатия левой клавишей мыши по этой опции появится новая заставка (рис. 3.161).

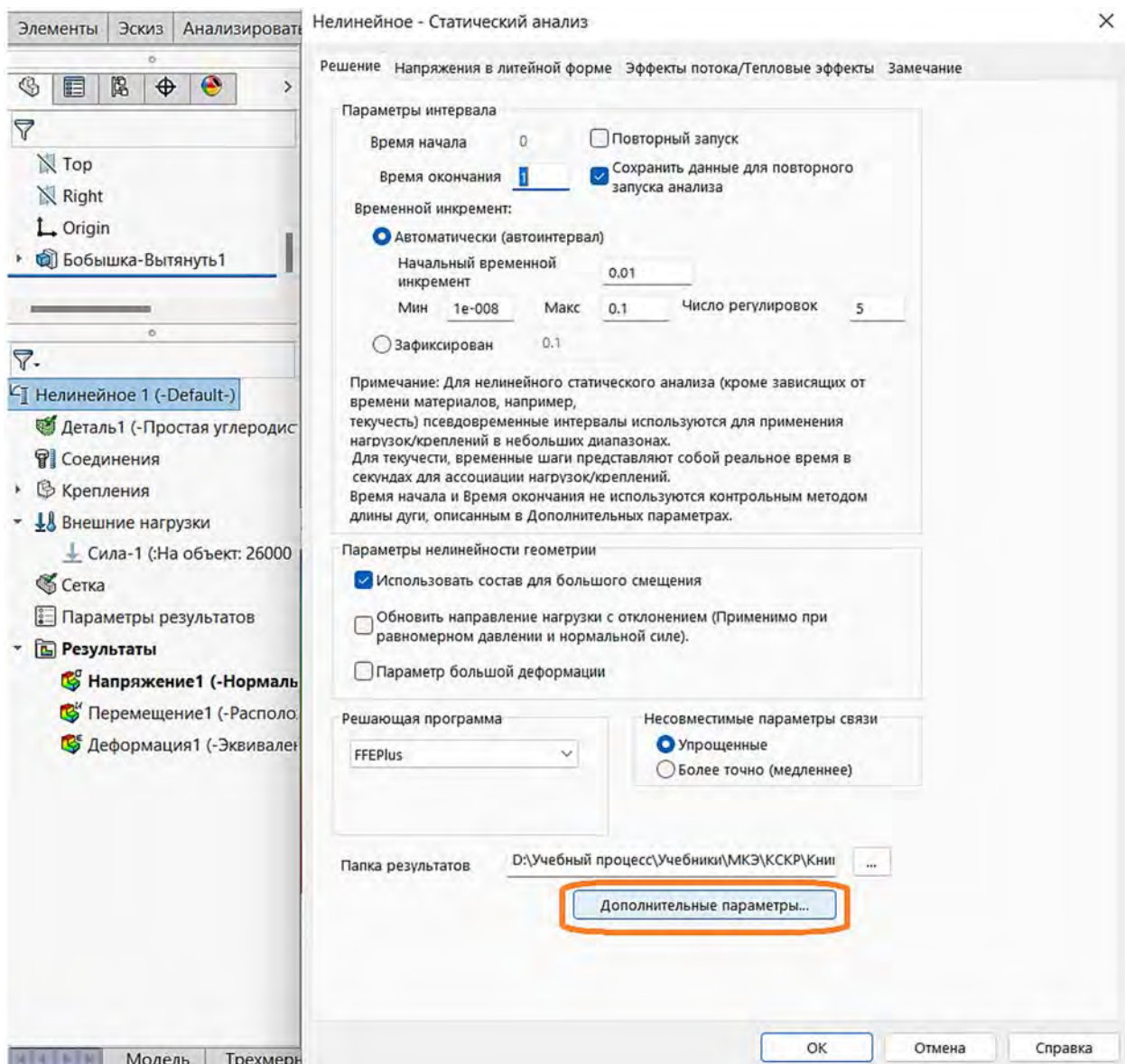


Рис. 3.160. *Свойства* разрешающей программы нелинейного статического анализа

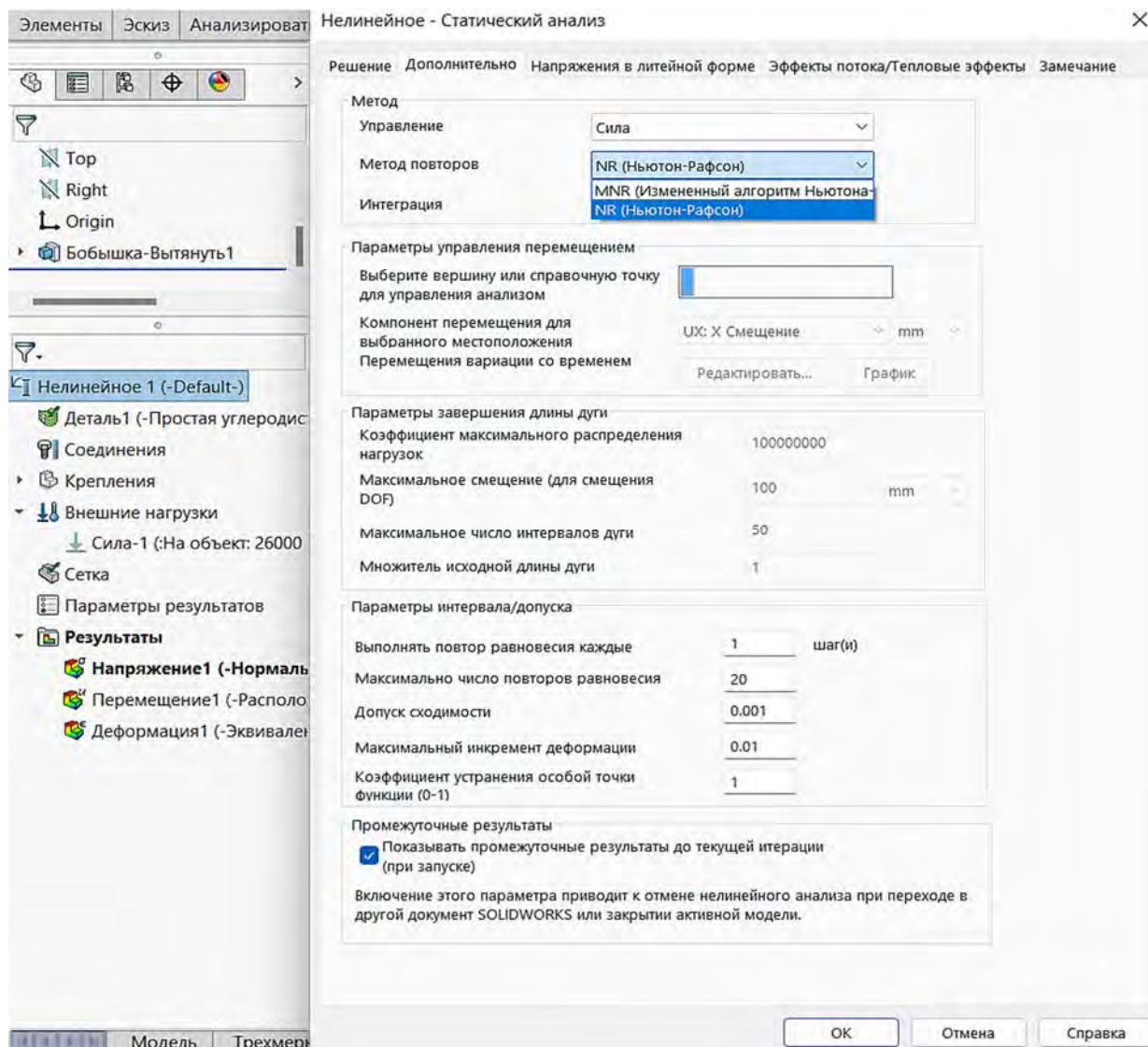


Рис. 3.161. *Дополнительные параметры* разрешающей программы нелинейного статического анализа

На этой заставке необходимо выбрать алгоритм итерационного метода. Предлагаются два итерационных метода: метод Ньютона – Рафсона (NR) и модифицированный метод Ньютона – Рафсона (MNR). Остальные параметры можно оставить *по умолчанию*.

После создания сетки разбиения конечно-элементной модели можно приступить непосредственно к расчету.

На рис. 3.162 приведено распределение нормальных поперечному сечению балки напряжений.

Как видно из рис. 3.162, посередине балки в областях, прилегающих к верхним и нижним волокнам, материал балки находится в состоянии близком либо равном пластическому деформированию, поскольку предел текучести  $\sigma_T = 220$  МПа.

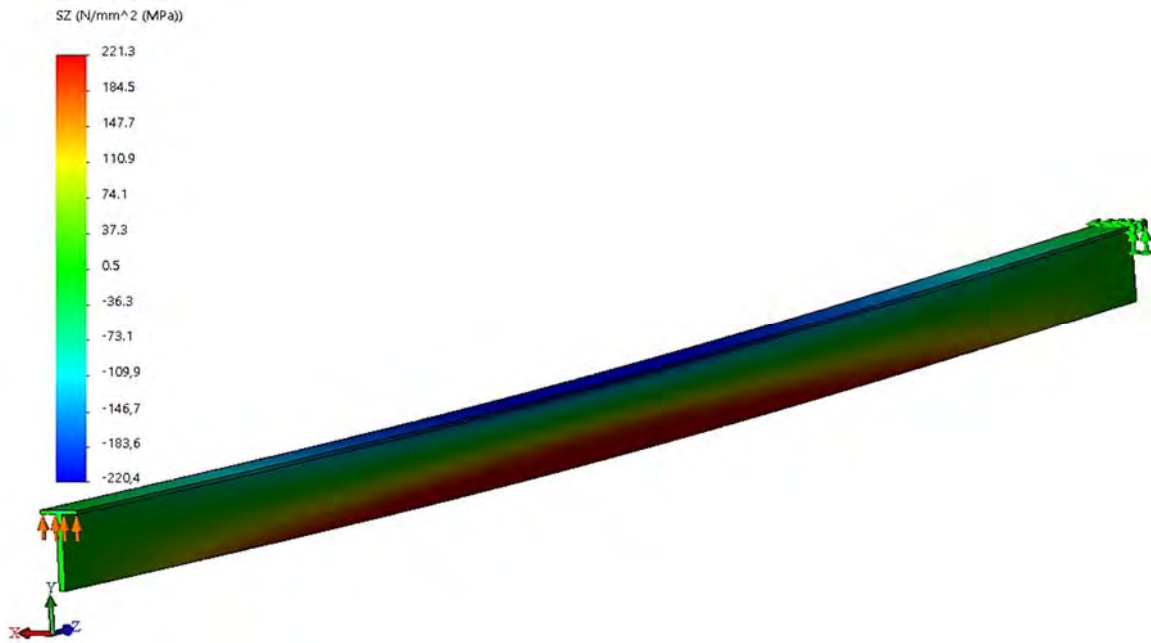


Рис. 3.162. Распределение нормальных поперечному сечению балки напряжений

В результате выполнения операции *Зондирование* может быть построен график изменения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения (рис. 3.163).

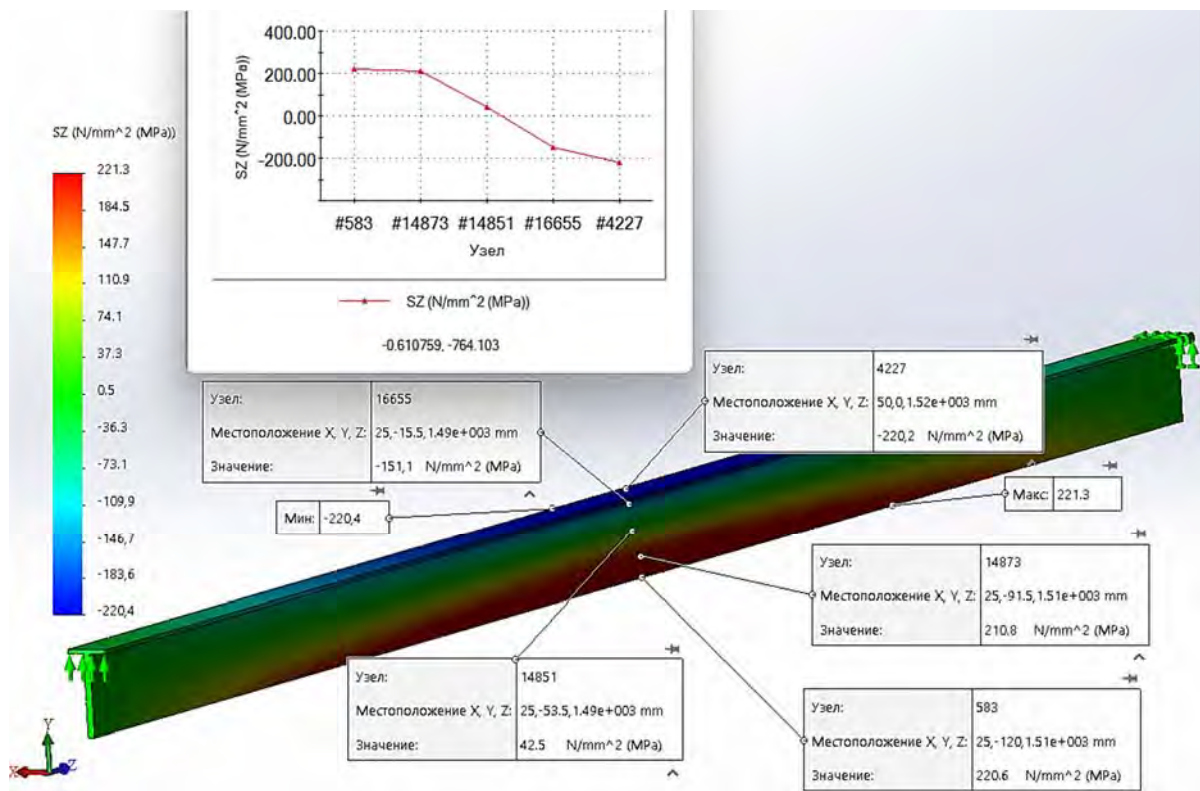


Рис. 3.163. Распределение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки

Кроме того, используя операцию *Зондирование*, может быть построен комплекс графиков изменения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения в процессе возрастания нагрузки (рис. 3.164).

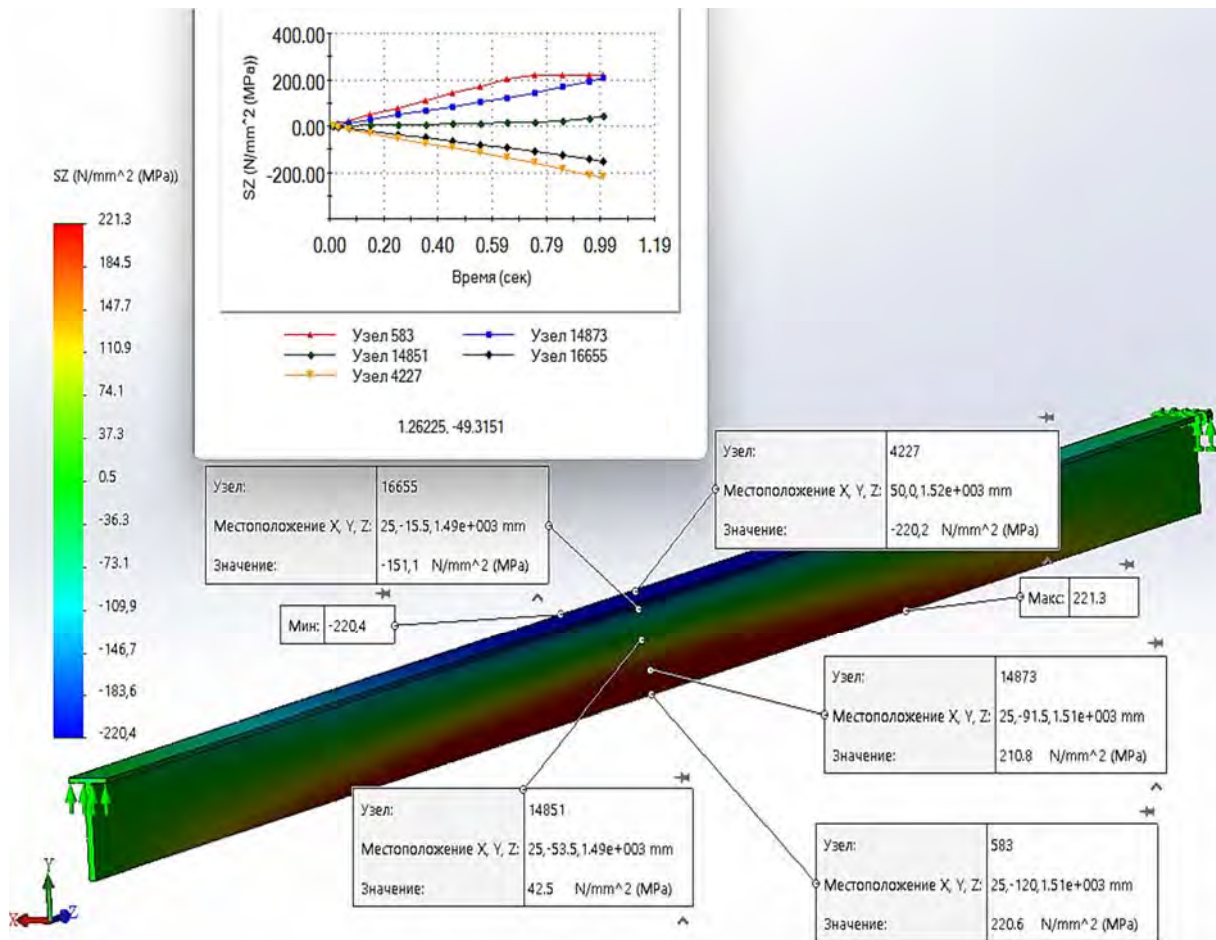


Рис. 3.164. Изменение напряжений в точках *Зондирования* в процессе нагружения балки

В результате анализа этих графиков можно прийти к выводу, что первоначально начинают *течь* нижние волокна балки. Этот вывод полностью коррелируется с данными курса «Механика материалов».

Далее, в лабораторной работе посредством варьирования величиной нагрузки необходимо определить значения, соответствующие четырем состояниям, приведенным на рис. 3.156.

### Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Какие нелинейности рассматриваются в задачах механики твердого деформируемого тела?
3. Что подразумевается под термином «геометрическая нелинейность»? Приведите пример проявления такой нелинейности.

4. Что подразумевается под термином «*физическая нелинейность*»? Приведите пример проявления такой нелинейности.

5. Что подразумевается под термином «*нелинейность граничных условий*»? Приведите пример проявления такой нелинейности.

6. Посредством использования каких моделей свойств материалов может описываться *физическая нелинейность*?

7. Что подразумевается под понятием «*упругая модель*»?

8. Что подразумевается под понятием «*вязкоупругая модель*»?

9. Что подразумевается под понятием «*упругопластическая модель*»?

10. Что подразумевается под понятием «*вязкопластическая модель*»?

11. Поясните понятия «*линейно упругая*» и «*нелинейно упругая*» модели.

12. Для каких материалов и в каких пределах может быть использована *линейно упругая модель*?

13. Для каких материалов и в каких пределах может быть использована *нелинейная упругая модель*?

14. Какие модели используются для описания упругопластического поведения материала?

15. Поясните понятие «*идеально жесткое пластическое тело*».

16. Поясните понятие «*идеально упругопластическое тело*» (диаграмма Прандтля).

17. Поясните понятие «*упругопластическое упрочняемое тело*».

18. В каком виде представляются диаграммы растяжения образцов материала в компьютерной интерпретации? Поясните термины «*билинейная кривая*» и «*кусочно-линейная кривая*».

19. Что подразумевается под *условием пластичности* или *критерием пластичности*?

20. Какой физический смысл заложен в *критерий пластичности Треска – Сен-Венана*?

21. Какой физический смысл заложен в *условие пластичности Губера – Мизеса – Генки*?

22. Какую роль играет время при рассмотрении нелинейных статических задач в процедуре SolidWorks Simulation?

23. Какие итерационные алгоритмы используются в системе SolidWorks Simulation для решения нелинейных задач?

24. В чем достоинства и недостатки итерационных *алгоритмов Ньютона – Рафсона (NR)* и *модифицированного метода Ньютона – Рафсона (MNR)*?

25. На каком примере в лабораторной работе рассматривается анализ упругопластического деформирования изделия?

26. Какие четыре состояния напряженно-деформированного поведения балки под нагрузкой необходимо определить в лабораторной работе?

27. Какая модель используется для описания поведения материала под нагрузкой в лабораторной работе? Какой критерий наступления пластических деформаций?

### **3.9. Лабораторная работа № 9. Нелинейные динамические исследования процесса пластического деформирования поверхностного слоя изделий посредством дробеструйного наклепа**

**Цель работы:** ознакомление с процедурой проведения нелинейного динамического исследования, обусловленного нагружением ударом.

#### ***Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы***

Современные изделия машиностроительного профиля зачастую работают в условиях динамических нагрузок. Их качество в значительной степени определяется усталостной прочностью данных деталей. Проводимые в области усталостной прочности исследования показали, что поверхность детали (ее качество и механические свойства) является наиболее важным фактором, определяющим усталостную прочность. Даже тщательно обработанная поверхность является носителем если не конструктивных (галтель, выточка), то технологических (следы механической обработки) или эксплуатационных (царапины, коррозия) концентраторов напряжений. Незначительные механические повреждения поверхности или ее дефекты могут послужить очагами зарождения усталостной трещины и привести к преждевременному разрушению детали.

Для устранения подобного рода концентраторов напряжений успешно применяются шлифовка, полировка и тому подобные технологические процессы, однако их использование не полностью устраняет наличие микроскопических рисок и надрезов.

Отрицательное влияние на усталостную прочность изделия оказывают также и растягивающие внутренние (остаточные) напряжения, возникающие в поверхностном слое детали в результате использования как самого технологического процесса изготовления изделия (сварка, термическая обработка, отливка и т. п.), так и приведенных выше процессов обработки.

Даже при нормально проведенной шлифовке неблагоприятные растягивающие остаточные напряжения могут достигать значительных величин.

Эффективным способом упрочнения поверхностного слоя является наклеп – обкатка роликами, дробеструйная обработка и т. п.

Сущность процесса *дробеструйного наклепа* (инерционно-импульсной обработки поверхности) заключается в том, что готовая деталь подвергается действию потока дроби. Дробинки (обычно отбеленного чугуна), увлекаемые воздушной струей или отбрасываемые лопатками быстро вращающегося ротора, соударяются с обрабатываемой поверхностью и, таким образом, осуществляется поверхностный наклеп детали. В процессе такого соударения происходит упругопластическое деформирование материала соударяемых объектов, вследствие которого изменяются площадь контакта и действующие контактные напряжения  $\sigma_k$  (рис. 3.165).

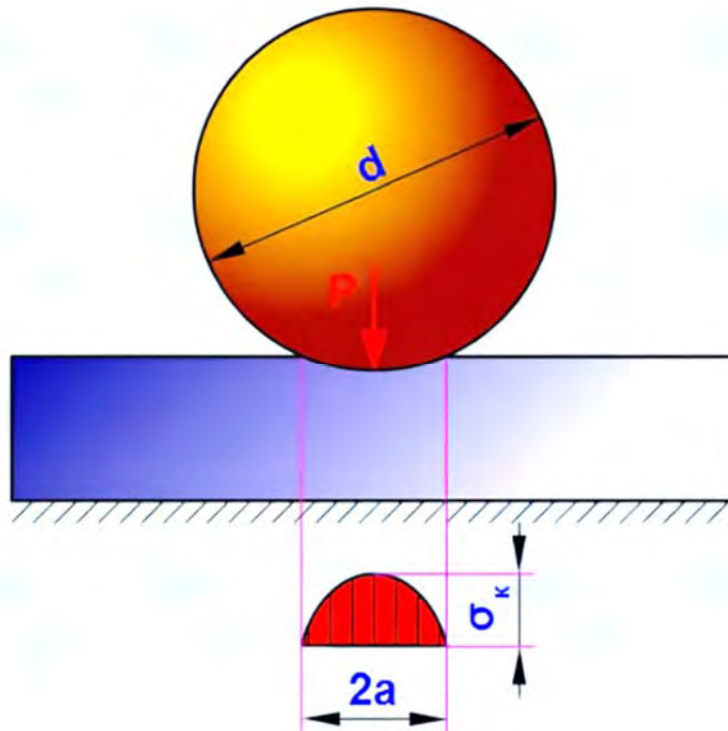


Рис. 3.165. Геометрическая модель контактного взаимодействия сферического тела и поверхностного слоя изделия

Особенностью рассматриваемой задачи с позиций механики твердого деформируемого тела, существенно усложняющей проводимые исследования, является учет различного рода нелинейностей.

Одной из таких нелинейностей является физическая нелинейность, связанная с упругопластическим деформированием обрабатываемого изделия. Кроме указанной нелинейности, необходимо также учитывать и геометрическую нелинейность, заключающуюся в изменении площади

контакта в процессе соударения шарика с обрабатываемой поверхностью, т. е. рассмотрение так называемой контактной задачи. Учет этих нелинейностей существенно увеличивает затраты машинного времени из-за использования итерационных алгоритмов и усложняет процесс сходимости результатов расчета к реальным данным.

Нагружение твердых деформируемых тел в большинстве случаев является результатом взаимодействия двух или нескольких контактирующих объектов. В связи с этим рассмотрение процессов нагружения тел во многих случаях требует анализа условий контактного взаимодействия.

Как уже отмечалось выше, контактное взаимодействие является одним из типов нелинейностей, оно сопровождается изменением «пятна контакта»  $\omega$  в процессе соприкасания объектов (рис. 3.166) и их деформирования [3]. Во время этого процесса, кроме изменения «пятна контакта», меняется и распределение контактных давлений  $p_c$  между соприкасаемыми объектами (см. рис. 3.166).

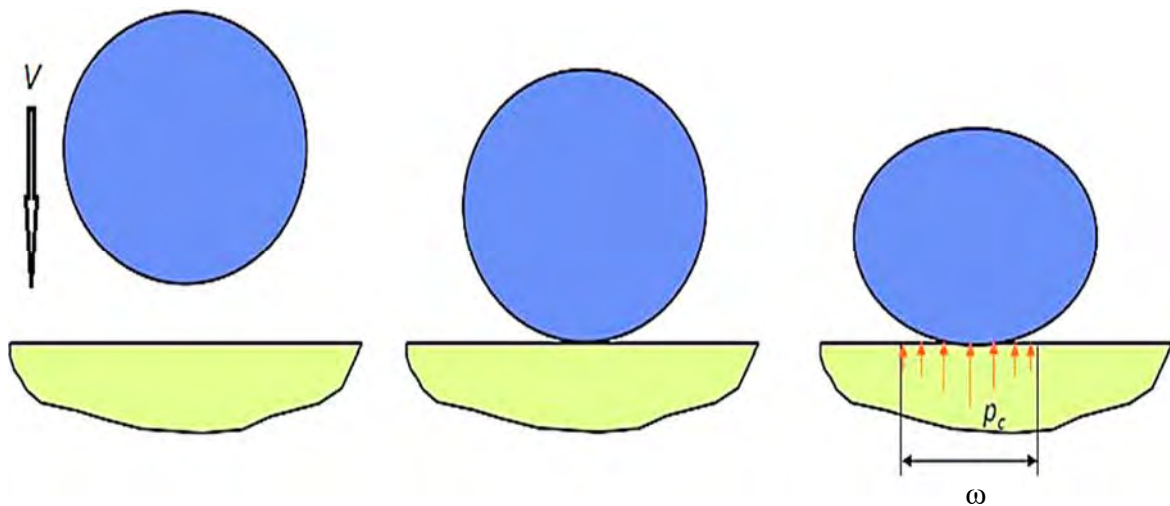


Рис. 3.166. Пример контактного взаимодействия падающего шарика со скоростью  $V$  на плоскую поверхность

В программном комплексе SolidWorks Simulation имеется возможность рассмотрения следующих типов контактов: контакт без проникновения, связанный контакт, свободный контакт.

*Контакт без проникновения* характеризуется тем, что под действием нагрузки контактирующие тела определенным образом могут деформироваться, при этом допускается появление зазоров между ними. Вместе с тем данный тип контакта исключает взаимное проникновение, т. е. интерференцию между объектами *набор 1* и *набор 2* (рис. 3.167).

*Связанный контакт* представляет собой объекты *набор 1* и *набор 2* (источник и цель), которые ведут себя как сваренные (рис. 3.168).

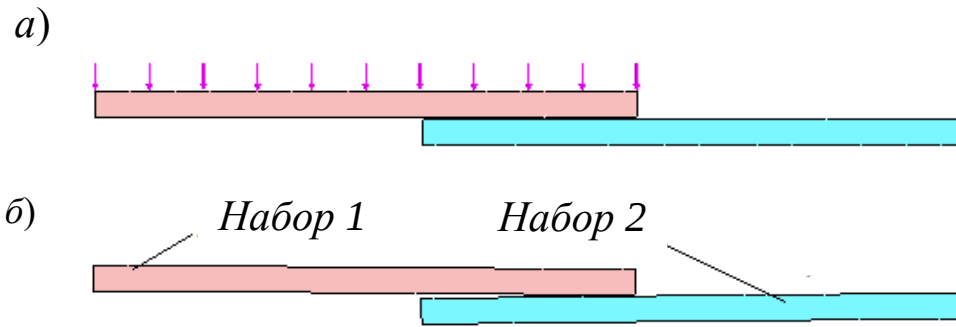


Рис. 3.167. Недеформированное (а) и деформированное (б) состояния двух контактирующих тел

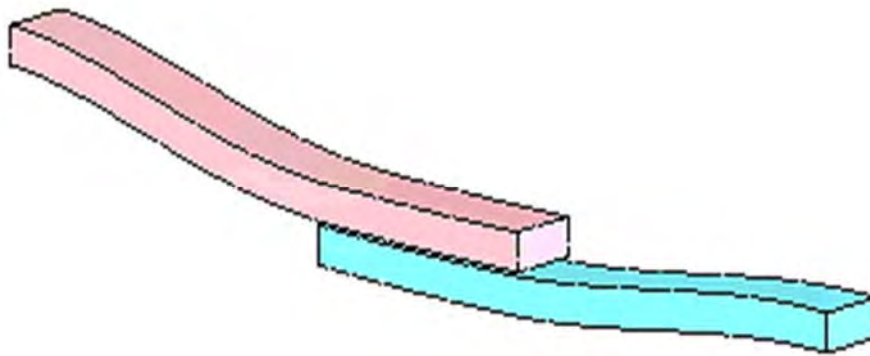


Рис. 3.168. Деформированное состояние объектов со связанным контактом

Сетка разбиения на конечные элементы этих наборов не обязательно должна быть совместимой. Если сетка совместима, программа объединяет совпадающие узлы вдоль границы (рис. 3.169), если нет, то для моделирования связи применяются уравнения ограничений.

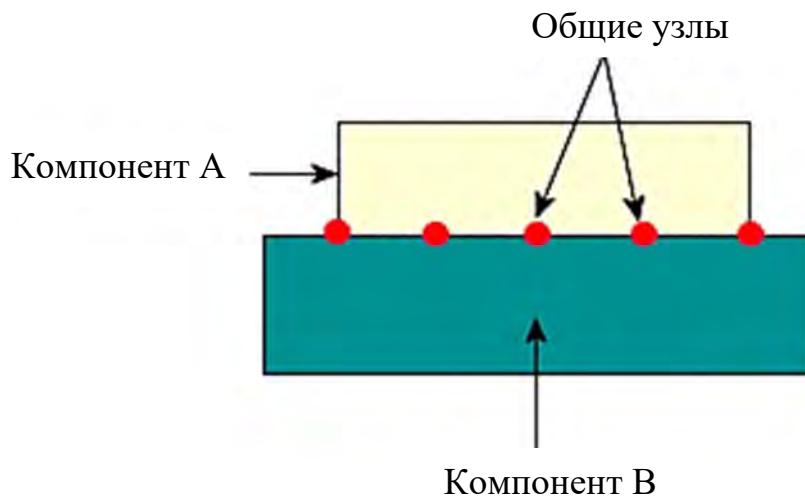


Рис. 3.169. Пример связанного контакта с совместимой сеткой

*Свободный контакт* характеризуется тем, что компоненты могут перемещаться во время деформирования под действием нагрузки независимо друг от друга (рис. 3.170). Эта функция позволяет ускорить решение при условии, что приложенные нагрузки не вызывают интерференцию.

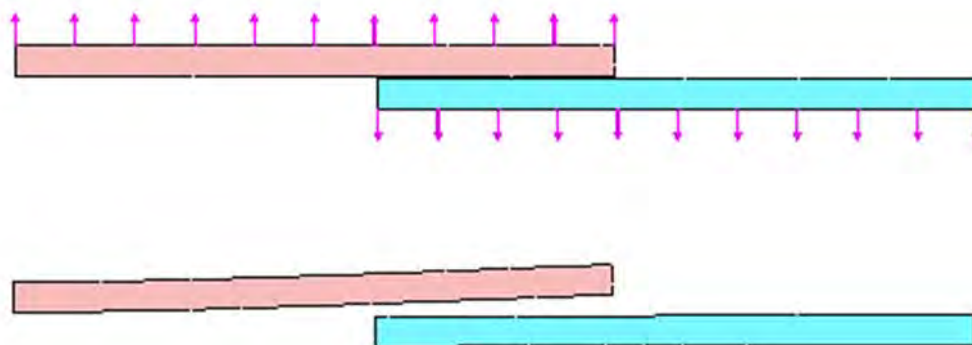


Рис. 3.170. Пример свободного контакта компонентов с нагружением, не приводящим к интерференции

Если условия нагружения и закрепления рассматриваемых объектов таковы, что возникает интерференция (проникновение компонентов друг в друга), то в этом случае использование данного типа контакта не обосновано (рис. 3.171).

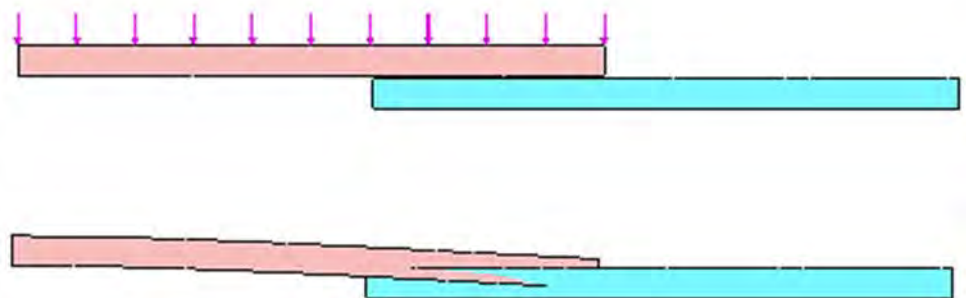


Рис. 3.171. Пример использования функции свободного контакта с нагружением, приводящим к интерференции соприкасающихся объектов

Специфика функции свободного контакта состоит в том, что сетка конечных элементов в общих зонах не является совместимой (рис. 3.172).

В программном обеспечении SolidWorks Simulation используются такие понятия, как «глобальный контакт» и «локальные наборы контактов». Под *глобальным контактом* подразумевается назначение типа контакта для всех соприкасающихся поверхностей сборки автоматически.

По умолчанию программа устанавливает тип *связанный контакт*. Программное обеспечение также позволяет устанавливать для глобального контакта тип *проникновение допускается*. Понятие «*локальные наборы контактов*» означает назначение определенного типа контакта для отдельных соприкасающихся фрагментов. Здесь следует отметить, что назначение *локальных наборов контактов* отменяет параметры *глобального контакта* для этих соприкасающихся фрагментов. Назначаемые локальные наборы контактов позволяют установить любые из приведенных выше типов контактов – *контакт без проникновения*, *связанный контакт*, *свободный контакт*.

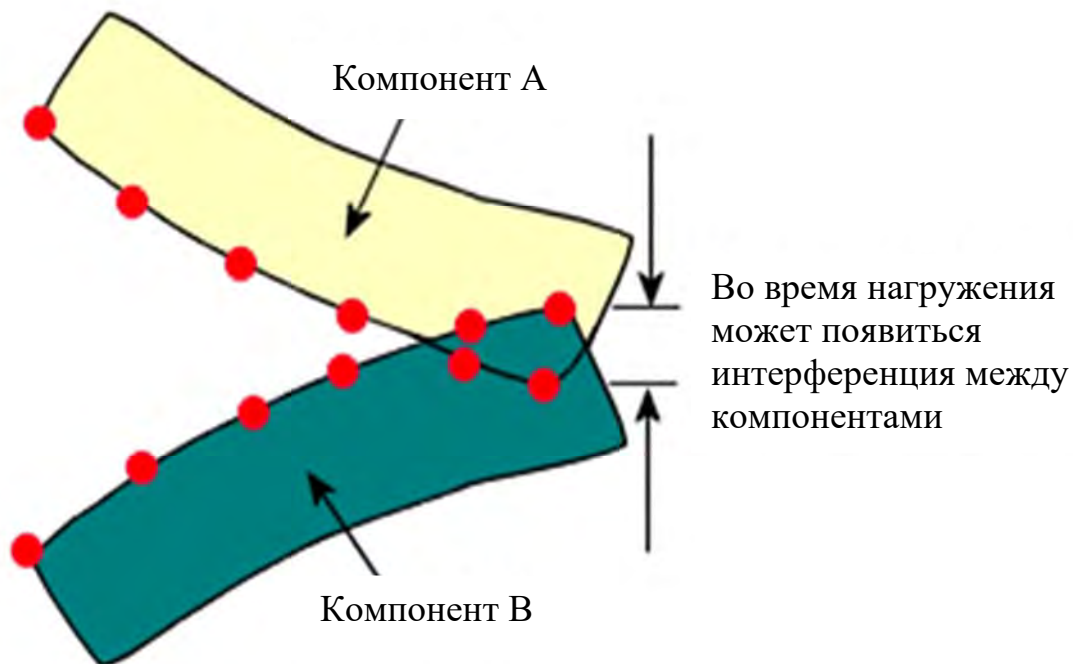


Рис. 3.172. Иллюстрация взаимного проникновения узловых точек сетки при наличии интерференции

Кроме указания типа контакта, необходимо также определиться с процедурой, обеспечивающей выполнение этого типа контактирования. В программном комплексе SolidWorks Simulation используются следующие варианты этих процедур: *контакт узел к поверхности*, *контакт узел к узлу*, *контакт поверхность с поверхностью*.

Согласно процедуре *контакта узел к поверхности* для каждого узла на источнике программа назначает одну или более граней на цели (рис. 3.173). В данной процедуре не требуется, чтобы грани изначально соприкасались (рис. 3.174).

Кроме того, не требуется наличия совместимой сетки между гранями источника и цели (см. рис. 3.174). Эта постановка задач контакта доступна

при типе *контакта без проникновения* для статических, нелинейных и термических исследований. Для статических и нелинейных задач этот тип контакта предотвращает интерференцию между гранями источника и цели, но позволяет им отодвигаться друг от друга для образования зазоров.

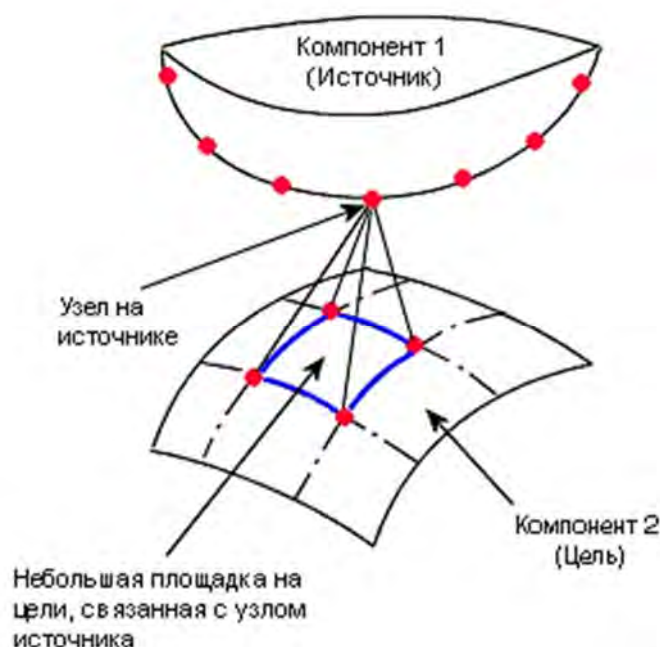


Рис. 3.173. Процедура *контакта узел к поверхности*

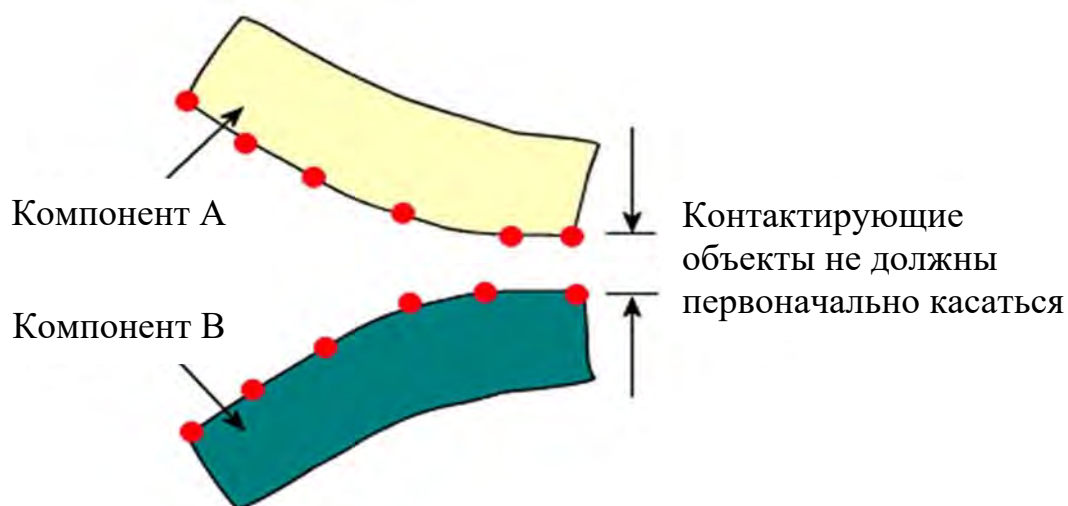


Рис. 3.174. Требования, предъявляемые к контактирующим объектам в процедуре *контакта узел к поверхности*

Хотя *контакт поверхность с поверхностью* является в общем случае более точным, параметр *узел к поверхности* дает лучшие результаты, если площадь контакта между двумя гранями становится очень малой или сокращается до линии или точки.

*Контакт узел к узлу* следует применять только для граней изначально соприкасающихся (рис. 3.175).

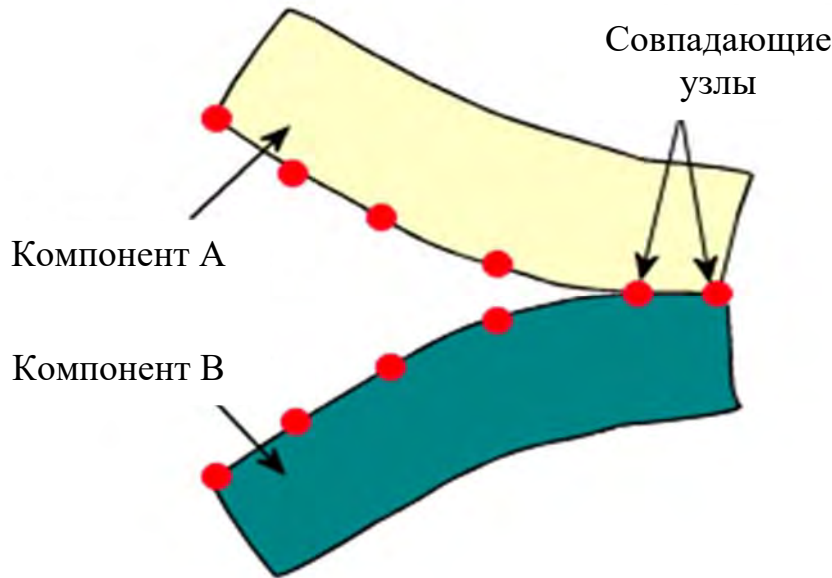


Рис. 3.175. Иллюстрация *контакта узел к узлу*

Кроме того, процедура *контакта узел к узлу* предполагает наличие совместимой сетки (см. рис. 3.175) между соприкасающимися компонентами.

Данная постановка задачи требует меньших затрат машинного времени, чем *узел к поверхности* и *поверхность с поверхностью*, но она менее точна для структурных задач, в которых имеет место проскальзывание. Точность результатов зависит от нагрузки, причем в идеале две грани должны быть прижаты друг к другу без значительного скольжения или относительных вращений. Для таких задач целесообразно использовать параметры *узел к поверхности* или *поверхность с поверхностью*, при этом активировать расчет для больших перемещений.

Процедура *контакта поверхность с поверхностью* чаще всего используется при описании контактного взаимодействия. Для этой процедуры не требуется наличия совместимой сетки. Данный подход исследования контактной задачи в большинстве случаев дает более точные результаты, но требует существенно большие затраты времени и ресурсов.

Использование данного подхода не рекомендовано, когда площадь контакта между гранями источника и цели в процессе деформирования становится слишком малой или сокращается до линии или точки. В таких случаях используйте параметр *узел к поверхности*.

В качестве примера нелинейного динамического анализа в лабораторной работе предлагается рассмотреть моделирование процесса формирования микрорельефа поверхности при инерционно-импульсной обра-

ботке ее [18]. В данном процессе обработки шарик с определенной скоростью соударяется с обрабатываемой поверхностью изделия и происходит поверхностное пластическое деформирование (ППД). Исследования для такого рода задач показали, что поле остаточных деформаций в изделии, образуемое в результате такого взаимодействия, фиксируется в узкой области, прилегающей непосредственно к месту контакта двух объектов. С точки зрения механики твердых деформируемых тел, данный случай силового взаимодействия двух объектов является *осесимметричной задачей*. Под этим видом напряженного состояния подразумевается напряженное состояние тела вращения, к поверхности или части поверхности которого приложены распределенные нагрузки, расположенные симметрично относительно его оси и одинаковые во всех меридиональных сечениях. Это обстоятельство позволило разработать модель, обеспечивающую существенную экономию машинной памяти, используемой при расчете, а следовательно, и экономии машинного времени.

На рис. 3.176 приведена твердотельная модель исследования процесса, представляющая собой фрагмент – вырезку под углом в  $30^\circ$  из соударяемых деталей. На рис. 3.176 показано, что шарик, используемый для поверхностного пластического деформирования (ППД), имеет диаметр  $d = 10$  мм. Обрабатываемый фрагмент изделия представляет собой сегмент толщиной  $\delta = 2$  мм и радиусом  $R = 20$  мм.

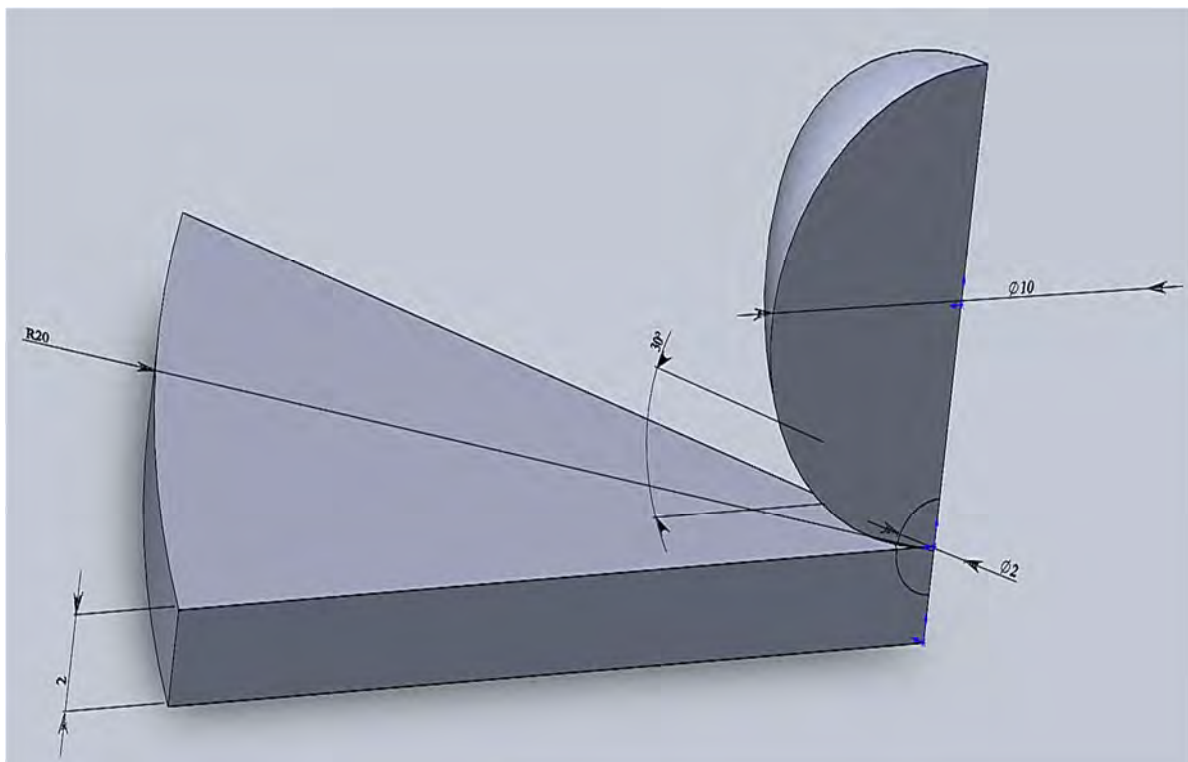


Рис. 3.176. Используемая для моделирования процесса ППД твердотельная модель

На рис. 3.176 также обозначена область диаметром 2 мм, непосредственно прилегающая к зоне контакта объектов, используемая впоследствии для более подробного изучения напряженно-деформированного состояния этого места, поскольку здесь наблюдаются наибольшие градиенты напряжений. Таким образом, 3D-модель исследуемого объекта представляет собой сборку, состоящую из четырех деталей.

*Осевая симметрия* в предлагаемой модели процесса ППД учитывалась посредством введения ограничения перемещения в направлении, перпендикулярном боковым граням сегментов (рис. 3.177). Накладываемые связи допускают перемещения точек в направлениях, совпадающих с плоскостями указанных граней, и запрещают перемещения в перпендикулярном к граням направлении.

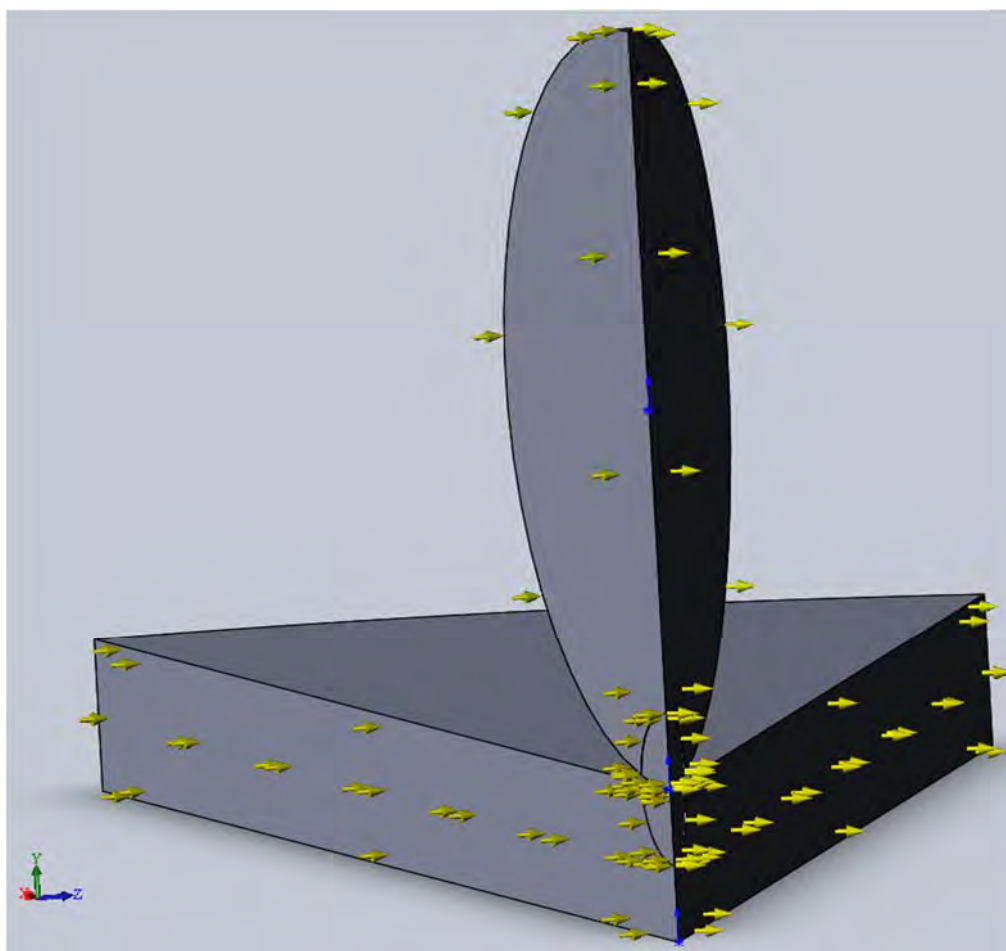


Рис. 3.177. Ограничения, накладываемые на перемещения в направлении, перпендикулярном боковым граням сегментов, для обеспечения соблюдения осевой симметрии в предлагаемой модели процесса ППД

На рис. 3.178 приведены закрепления, накладываемые на периферийную поверхность сегмента диска, «вырезанного» из обрабатываемой ППД пластины. Как видно из приведенного рисунка, диаметр диска в 4 раза

превышает диаметр шарика и в значительно большее число раз превышает диаметр пятна контакта этих двух объектов. Данное обстоятельство позволяет исключить влияние краевого эффекта на напряженно-деформированное состояние обрабатываемой поверхности.

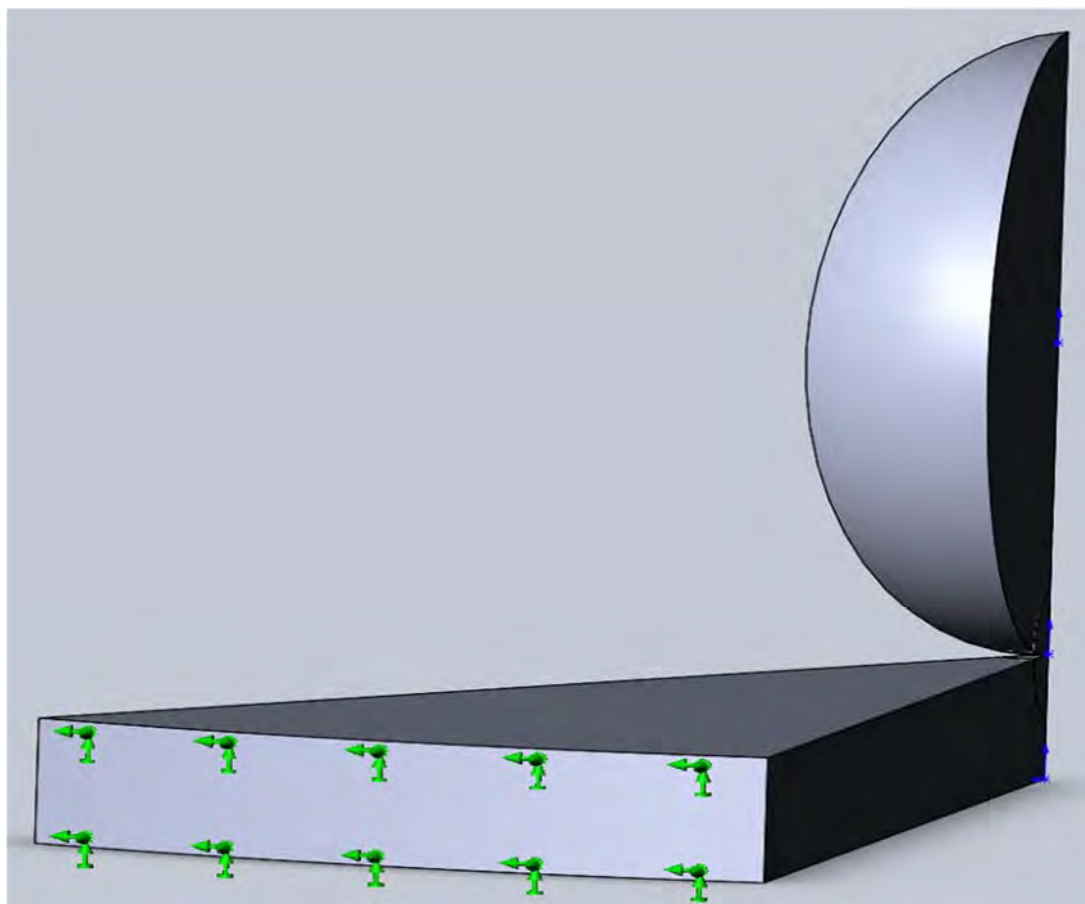


Рис. 3.178. Закрепления, накладываемые на периферийную поверхность сегмента диска, «вырезанного» из обрабатываемой ППД пластины

На рис. 3.179 изображены (в рамках принятых в программном комплексе SolidWorks условных обозначений) начальные условия, заключающиеся в том, что шарик в момент соприкосновения с поверхностью имеет скорость  $v = 3$  м/с.

Следующим шагом конечно-элементного моделирования является разбиение созданной твердотельной модели на конечные элементы.

На рис. 3.180 приведена сетка разбиения рассматриваемой твердотельной модели на конечные элементы. Модель включает в себя 8593 конечных элемента.

Как видно из рис. 3.180, в конечно-элементной модели имеется неравномерная сетка разбиения на конечные элементы со значительным измельчением элементов в зоне пятна контакта объектов. Этого удалось достичь посредством выделения маленького объема на шарике и пластине

в указанной зоне (см. рис. 3.176) и при последующем использовании процедуры *Управление сеткой* (рис. 3.181), а также при назначении требуемого размера конечных элементов данной зоны (рис. 3.182). Необходимость такого измельчения объясняется тем, что в зоне пятна контакта присутствуют значительные градиенты напряжений, адекватное описание которых предполагает мелкую сетку элементов.

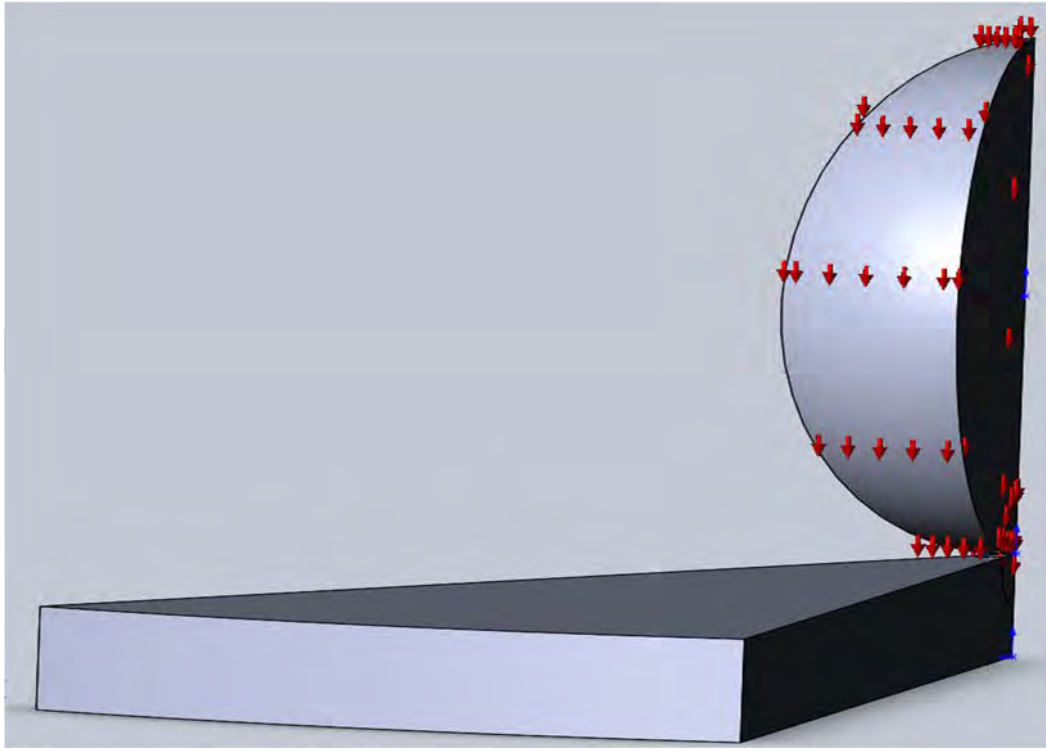


Рис. 3.179. Начальные условия, реализуемые в процессе ППД

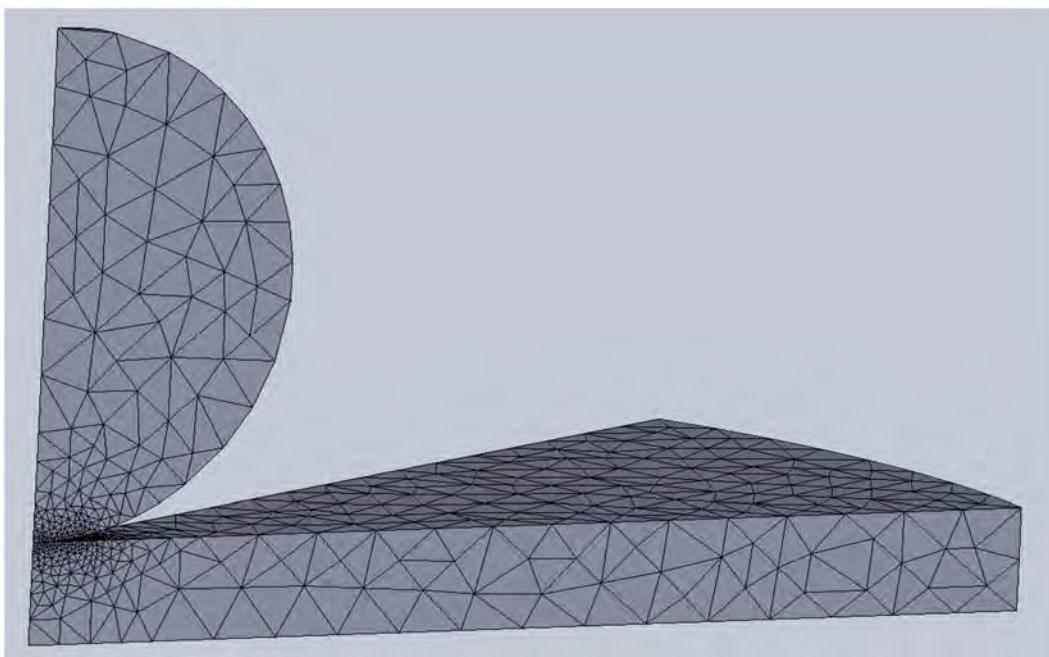


Рис. 3.180. Конечно-элементная модель исследуемого процесса

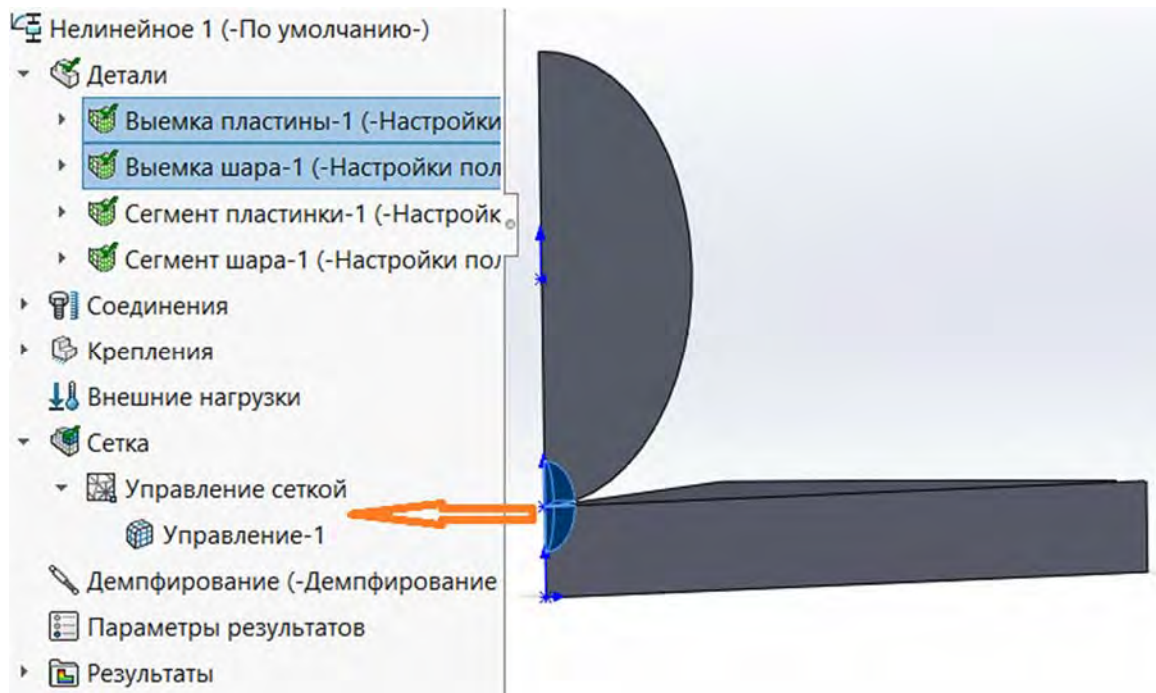


Рис. 3.181. Использование процедуры *Управление сеткой* в зоне контакта соударяемых тел

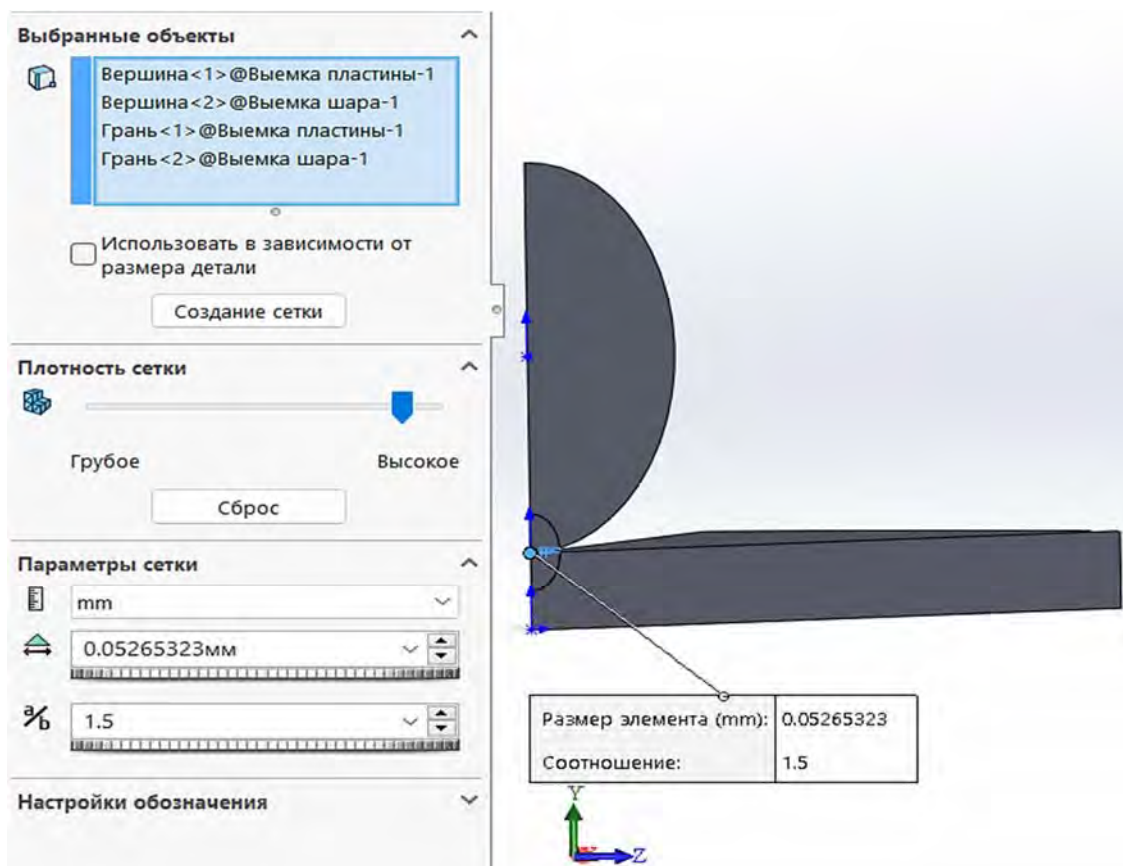


Рис. 3.182. Назначение характерного размера конечного элемента в зоне измельчения сетки

В данном конкретном месте назначался габаритный размер конечных элементов, не превышающий 0,05265 мм (см. рис. 3.182).

В результате выполнения данной операции сетка разбиения в зоне контакта стала выглядеть, как показано на рис. 3.183.

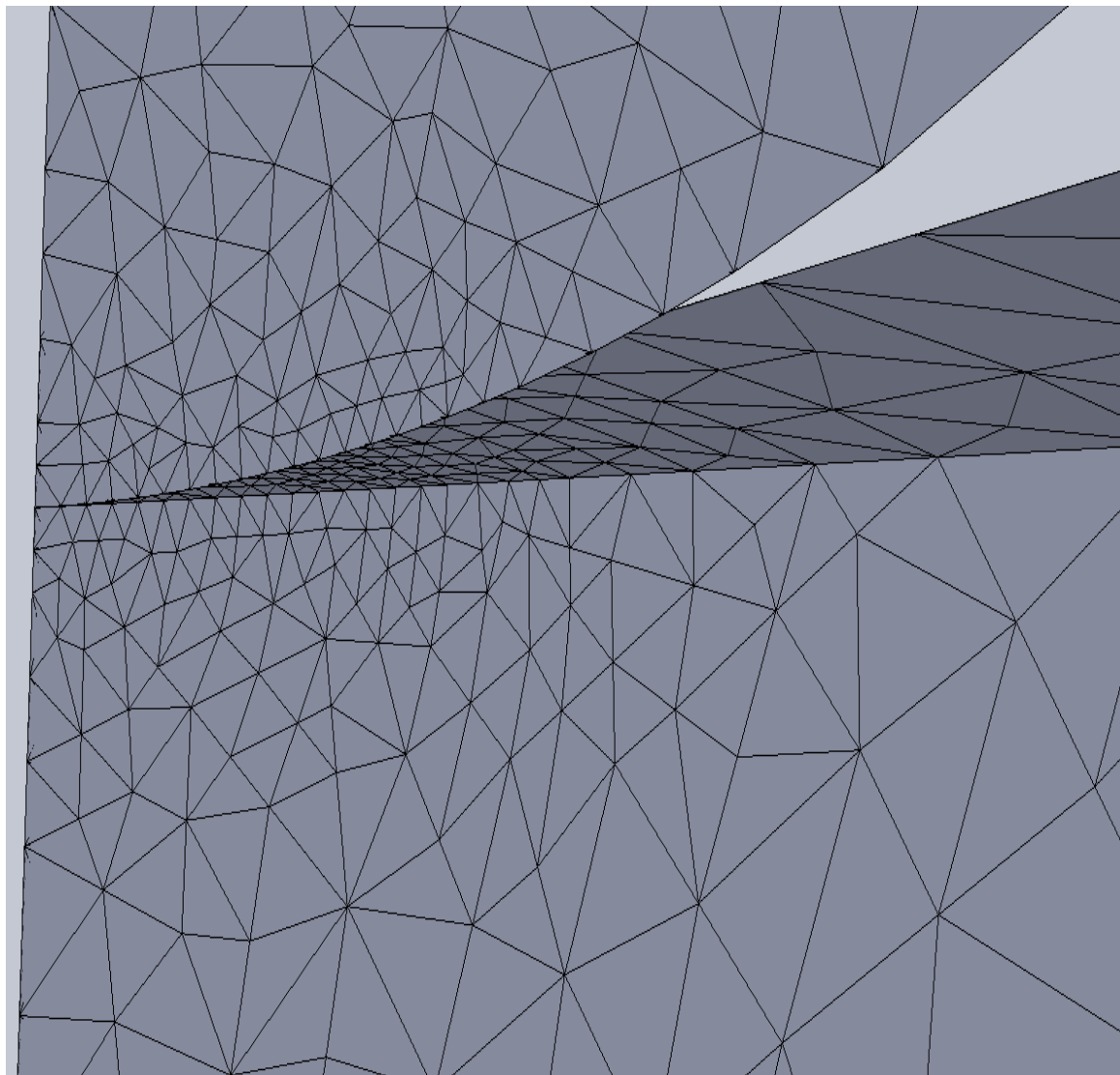


Рис. 3.183. Сетка разбиения в зоне пятна контакта

### ***Исходные данные***

На эффективность процесса инерционно-импульсной обработки влияют различные параметры: материалы заготовки и деформирующего элемента, его размер, скорость шара в момент нанесения удара по обрабатываемой поверхности, исходная шероховатость обрабатываемой поверхности и др.

В результате проведенных исследований [18] было установлено, что микрорельеф обрабатываемой поверхности в зоне соударения носит луноч-

ный характер. Эти результаты достаточно хорошо согласуются с данными, наблюдаемыми при обработке. Компьютерное моделирование рассматриваемого процесса позволяет получить зависимости параметров этого рельефа от режимов обработки.

В лабораторной работе предлагается *на основе существующей компьютерной модели* определить размеры и форму образовавшегося микро-рельефа обрабатываемой поверхности для конкретных исходных данных, представленных в табл. 3.18.

Табл. 3.18. Исходные данные для определения микрорельефа поверхности в зоне обработки

| Порядковый номер в журнале учебной группы | Скорость соударения шарика с обрабатываемой поверхностью, м/с | Значение предела текучести $\sigma_T$ материала обрабатываемой поверхности, МПа | Значение модуля упругости $E$ материала обрабатываемой поверхности, МПа | Значение коэффициента Пуассона $\nu$ материала обрабатываемой поверхности |
|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1                                         | 3,1                                                           | 220                                                                             | $2,1 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 2                                         | 3,2                                                           | 230                                                                             | $2,2 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |
| 3                                         | 3,3                                                           | 240                                                                             | $2,3 \cdot 10^5$                                                        | 0,33                                                                      |
| 4                                         | 3,4                                                           | 250                                                                             | $2,4 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 5                                         | 3,5                                                           | 260                                                                             | $2,5 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |
| 6                                         | 3,6                                                           | 270                                                                             | $2,1 \cdot 10^5$                                                        | 0,33                                                                      |
| 7                                         | 3,7                                                           | 280                                                                             | $2,2 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 8                                         | 3,8                                                           | 290                                                                             | $2,3 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |
| 9                                         | 3,9                                                           | 300                                                                             | $2,4 \cdot 10^5$                                                        | 0,33                                                                      |
| 10                                        | 4,0                                                           | 310                                                                             | $2,5 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 11                                        | 3,1                                                           | 320                                                                             | $2,1 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |
| 12                                        | 3,2                                                           | 330                                                                             | $2,2 \cdot 10^5$                                                        | 0,33                                                                      |
| 13                                        | 3,3                                                           | 340                                                                             | $2,3 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 14                                        | 3,4                                                           | 350                                                                             | $2,4 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |
| 15                                        | 3,5                                                           | 360                                                                             | $2,5 \cdot 10^5$                                                        | 0,33                                                                      |
| 16                                        | 3,6                                                           | 370                                                                             | $2,1 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 17                                        | 3,7                                                           | 380                                                                             | $2,2 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |
| 18                                        | 3,8                                                           | 390                                                                             | $2,3 \cdot 10^5$                                                        | 0,33                                                                      |
| 19                                        | 3,9                                                           | 400                                                                             | $2,4 \cdot 10^5$                                                        | 0,31                                                                      |
| 20                                        | 4,0                                                           | 410                                                                             | $2,5 \cdot 10^5$                                                        | 0,32                                                                      |

Перед внесением изменений в существующую компьютерную модель необходимо внимательно ознакомиться с основными параметрами опций используемой конечно-элементной модели.

Для каждого учащегося исходные данные выбираются из табл. 3.18 в соответствии с порядковым номером в журнале учебной группы.

По результатам проведенного расчета необходимо представить иллюстративные материалы, приведенные в примере выполнения лабораторной работы.

**Внимание!** Размеры и форма образовавшегося микрорельефа обрабатываемой поверхности определяются посредством использования операции *Зондирование* в момент, когда пройдены обе фазы удара (см. рис. 3.60), т. е. уже зафиксировались остаточные деформации и напряжения.

### ***Пример выполнения лабораторной работы***

В качестве примера для определения размеров и формы лунки, образуемой после моделирования удара, задавались следующие параметры:

- материал заготовки – сталь 45 в состоянии поставки (твёрдость 179 НВ);
- материал деформирующего шара – закаленная сталь ШХ15 (твёрдость 63...67 HRC);
- диаметр шара – 10 мм;
- скорость шара в момент нанесения удара – 3 м/с.

Кроме отмеченных характеристик, при анализе упругопластического характера деформирования материалов необходимо также учитывать эффект текучести, т. е. ввести сведения о пределах текучести, коэффициентах Пуассона и модулях упругости. Данная информация, представленная на рис. 3.184 и 3.185, выделена в оранжевых рамках.

В результате проведения имитационного моделирования и использования операции *Зондирование* в момент, когда пройдены обе фазы удара (см. рис. 3.60), был построен график деформирования обрабатываемой поверхности (рис. 3.186) в зоне, прилегающей к точке нанесения удара.

На рисунке показано, что полученная форма лунки имеет кратерообразную форму с наплывами по краям и некоторой выпуклостью на дне.

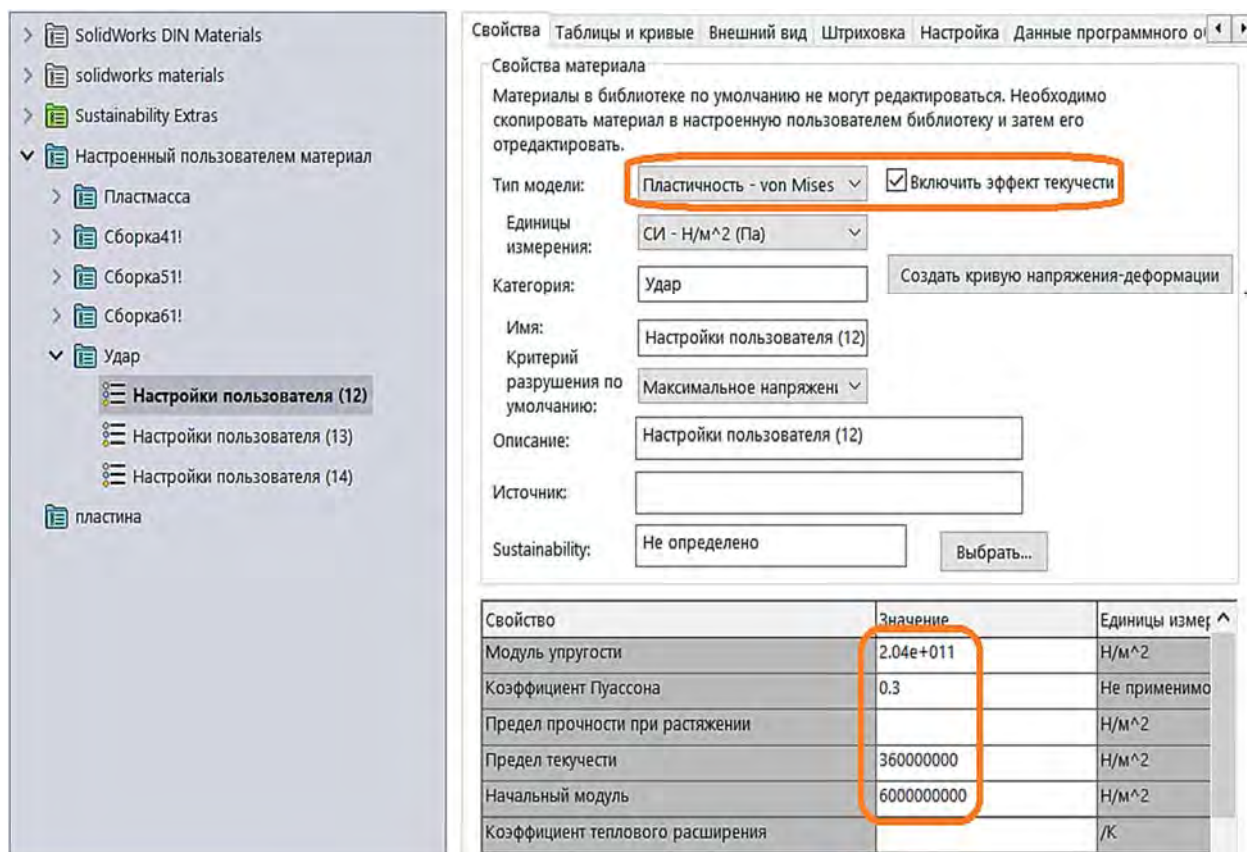


Рис. 3.184. Механические свойства стали 45, используемые при расчете

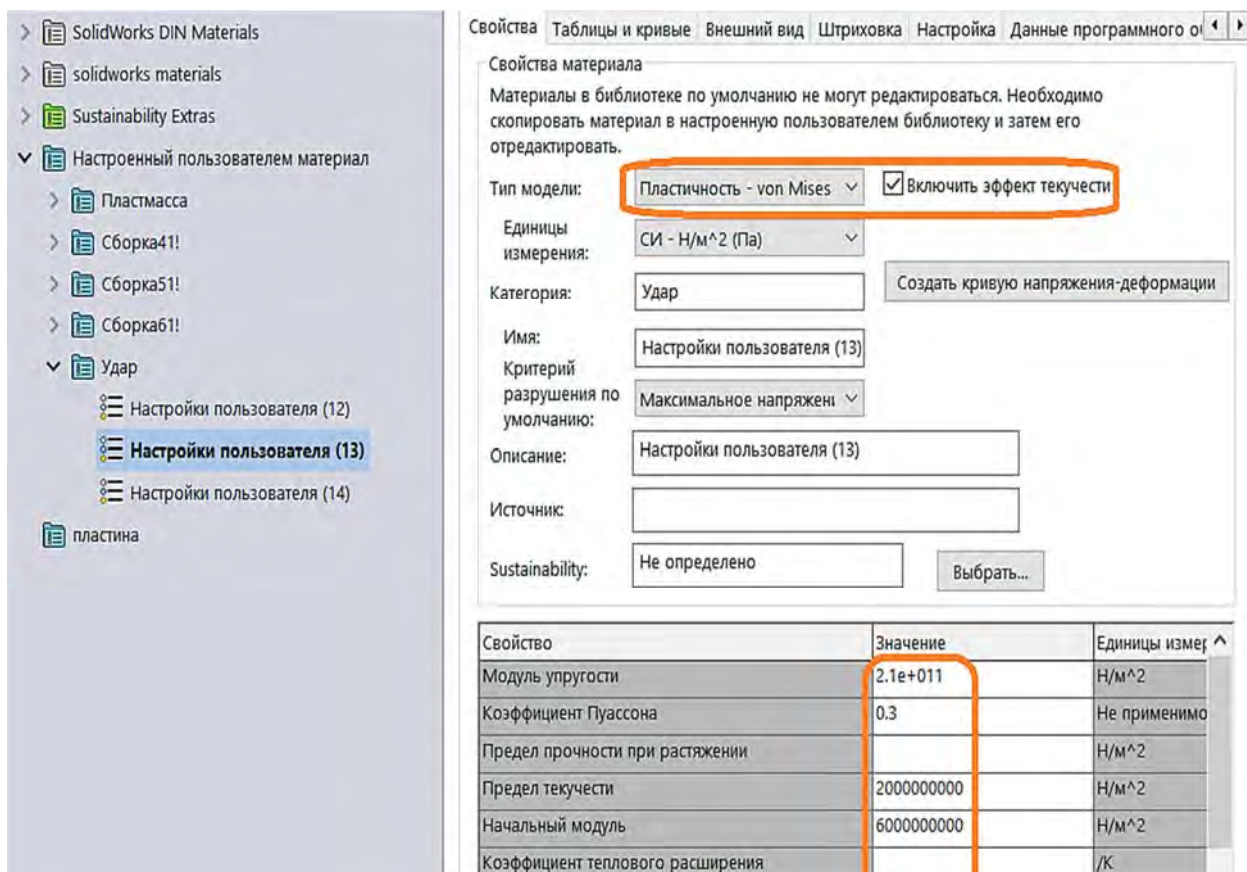


Рис. 3.185. Механические свойства стали ШХ15, используемые при расчете



Рис. 3.186. Размеры и форма лунки

### ***Контрольные вопросы***

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Какие типы контактов рассматриваются в программном комплексе SolidWorks Simulation?
3. Охарактеризуйте тип контакта *контакт без проникновения*.
4. Охарактеризуйте тип контакта *связанный контакт*.
5. Охарактеризуйте тип контакта *свободный контакт*.
6. Поясните термины «глобальный контакт» и «локальные наборы контактов».
7. Каково приоритетное право между *глобальным контактом* и *локальными наборами контактов*?
8. Какие варианты процедур, обеспечивающих выполнение типов контактирования, используются в SolidWorks Simulation?
9. Поясните вариант процедуры *контакт узел к поверхности*.
10. Поясните вариант процедуры *контакт узел к узлу*.
11. Поясните вариант процедуры *контакт поверхность с поверхностью*.
12. Какая практическая задача непосредственно рассматривается в лабораторной работе?
13. Какое напряженно-деформированное состояние называется *осесимметричным*?
14. Каким образом учитывалась *осевая симметрия напряженно-деформированного состояния* в лабораторной работе?
15. Посредством каких действий удалось достигнуть значительного измельчения сетки разбиения конечно-элементной модели в зоне пятна контакта шарика с поверхностью?

16. Какого эффекта можно достичь посредством использования процедуры SolidWorks Simulation *Управление сеткой*?

17. Какие исходные данные необходимо использовать в каждом конкретном случае для выполнения лабораторной работы?

18. Какую форму приобретает обрабатываемая поверхность в зоне соударения с шариком?

### **3.10. Лабораторная работа № 10. Анализ тепловых процессов в исследуемом объекте**

**Цель работы:** ознакомление с процедурой проведения анализа тепловых процессов, происходящих при изготовлении и эксплуатации изделий, в компьютерной системе SolidWorks Simulation.

#### ***Краткие сведения из теоретического материала рассматриваемой темы***

В ряде случаев технологии производства изделий включают в себя использование нестационарных тепловых воздействий на рассматриваемый объект [5, 19], которые могут приводить к снижению качества изделий – короблению конструкций в результате сварки, фиксации в них остаточных напряжений, приводящих к снижению усталостной прочности, появлению закалочных структур и т. д.

Кроме того, некоторые изделия в процессе эксплуатации могут быть подвержены воздействию переменного температурного поля, связанного, например, с работой различного рода электрических приборов, охлаждающих элементов (радиаторов), перепадом суточных и сезонных температурных режимов. Данные обстоятельства также могут привести к негативным последствиям, ухудшающим эксплуатационные характеристики объекта, а иногда и к невозможности дальнейшей эксплуатации его.

В связи с этим возникает необходимость в анализе существующего поля температур в изделии, определении факторов, оказывающих существенное влияние на характер его распределения в пространстве и во времени. Вопросы данного характера рассматриваются в разделе теории поля «Теория теплопроводности».

В данной теории используется термин «*теплообмен*», который обозначает самопроизвольный процесс переноса теплоты в теле или системе тел из зон с большей температурой в области с меньшей температурой. Исходя из этой формулировки можно сделать вывод о том, что необходимым

условием теплообмена является неравномерное распределение температуры в исследуемом объекте.

Процесс теплообмена в природе осуществляется следующими факторами [4, 20]: *теплопроводностью*, *конвекцией* (конвективный теплообмен) и *электромагнитным излучением* (лучистый теплообмен).

*Конвективным теплообменом* называется процесс, при котором тепло переносится с поверхности твердого тела окружающей ее движущейся жидкостью или газом. Такой процесс теплообмена может осуществляться двумя причинами – *диффузией* (перенос энергии посредством случайного молекулярного движения) и *адвекцией* (перенос энергии посредством макроскопического движения жидкости или газа вдоль поверхности). Пример конвективного теплообмена представлен на рис. 3.187, где отображен процесс передачи тепла от газовой горелки через металлическую емкость к жидкости.

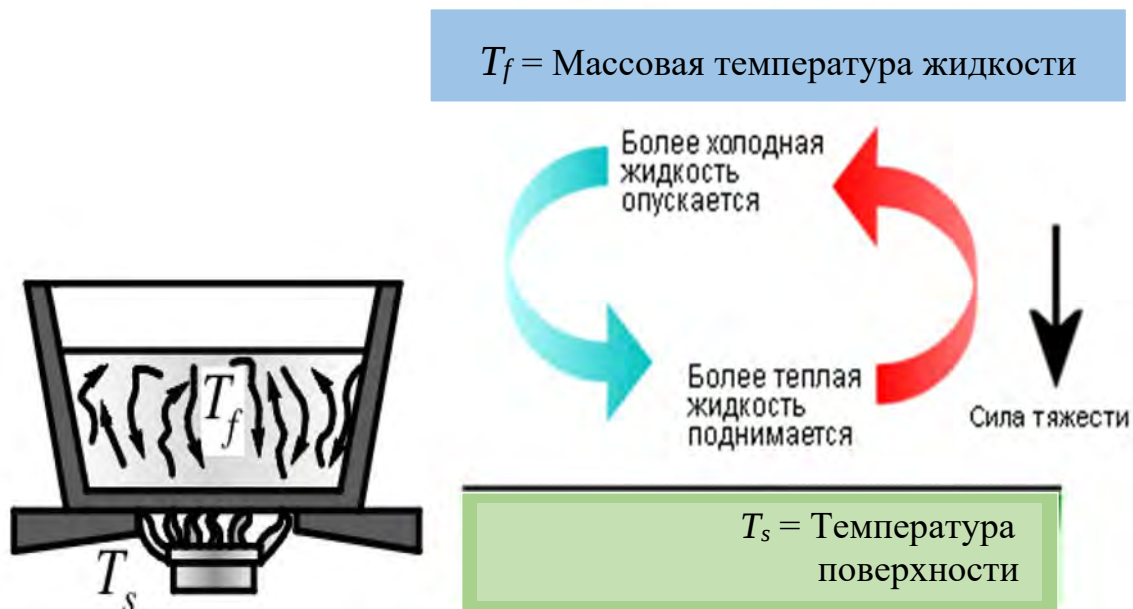


Рис. 3.187. Пример переноса тепла конвекцией

Данный процесс зависит от свойств теплоносителя (газа, жидкости) и характеризуется коэффициентом конвективной теплопередачи  $h$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°С). Скорость теплообмена между площадью  $A$  поверхности металлической емкости при температуре  $T_s$  и жидкостью с температурой  $T_f$  (см. рис. 3.187) может быть определена следующим соотношением:

$$\frac{dQ_{\text{конвекции}}}{dt} = h A (T_s - T_f).$$

При проведении расчетов, связанных с конвективным теплообменом, необходимо различать *свободную* (рис. 3.188) и *принудительную* (рис. 3.189) конвекции.

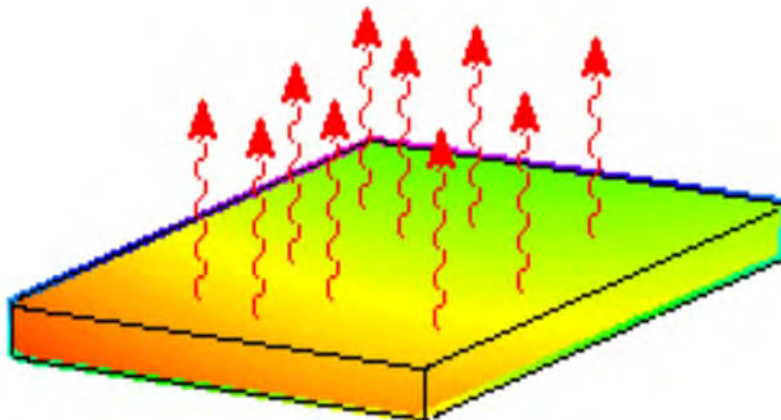


Рис. 3.188. Пример свободного конвективного теплообмена

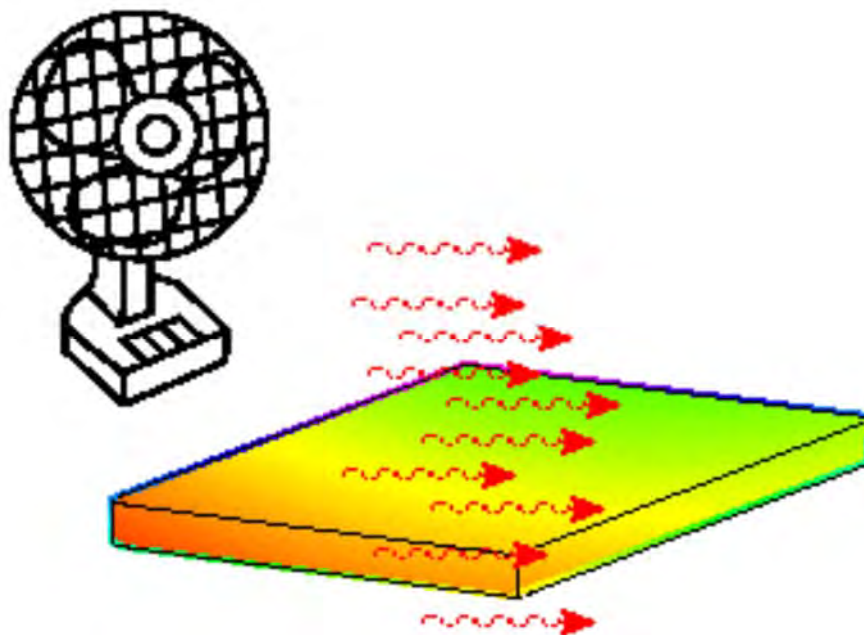


Рис. 3.189. Пример принудительного конвективного теплообмена

В табл. 3.19 приведены значения коэффициентов конвективной теплопередачи для некоторых типичных случаев.

Под *лучистым теплообменом* подразумевается способность тел поглощать, отражать или излучать тепловую энергию в форме электромагнитных волн. В данном случае ввиду способности электромагнитных волн распространяться и в вакууме, для того чтобы излучение имело место, нет необходимости в наличии промежуточной между телами среды. Так,

например, тепловая энергия Солнца поступает на Землю посредством излучения. Данный механизм передачи тепла является самым быстрым, поскольку электромагнитные волны распространяются со скоростью света. Здесь следует отметить, что любой геометрический объект, имеющий температуру выше абсолютного нуля, является источником электромагнитного теплового излучения. На рис. 3.190 приведен диапазон длин волн *теплового излучения* в сопоставлении с другими типами излучений ( $\gamma$ -излучение, рентгеновское излучение и т. д.).

Табл. 3.19. Значения коэффициентов конвективной теплопередачи для некоторых типичных случаев

| Режим конвекции                                  | Коэффициент теплопередачи $h$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·°C) |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Воздух (естественная конвекция)                  | 5...25                                                  |
| Воздух/перегретый пар (принудительная конвекция) | 20...300                                                |
| Масло (принудительная конвекция)                 | 60...1800                                               |
| Вода (принудительная конвекция)                  | 300...6000                                              |
| Вода (кипящая)                                   | 3000...60000                                            |
| Пар (конденсирующийся)                           | 6000...120000                                           |

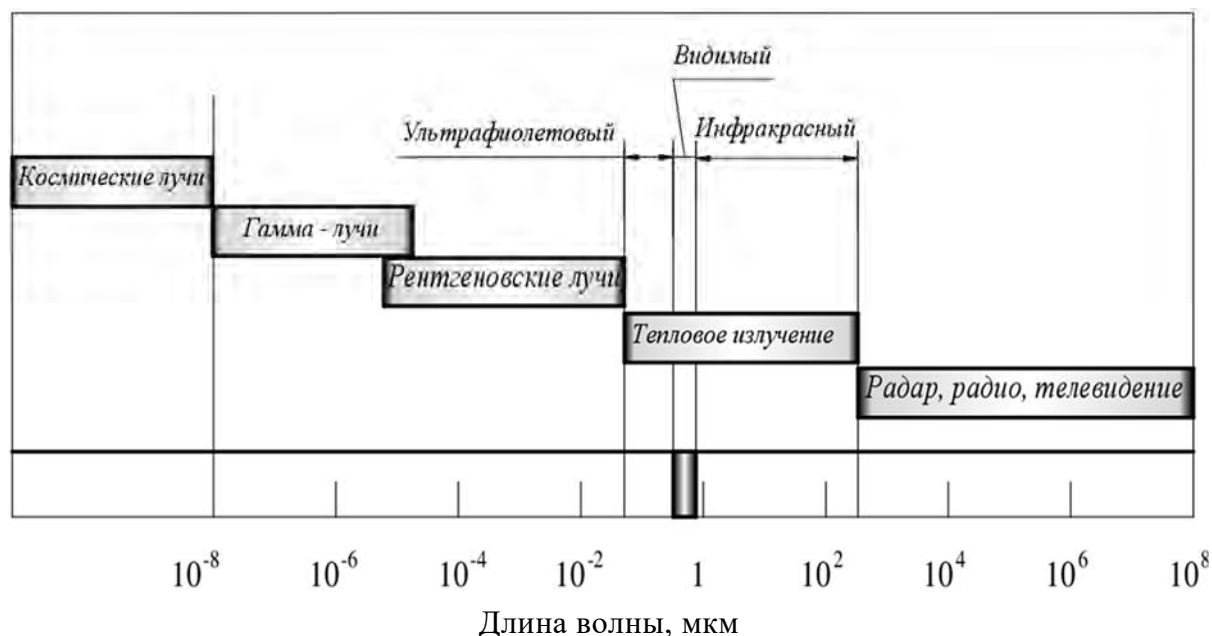


Рис. 3.190. Длины волн различных типов излучений

При рассмотрении процессов, связанных с тепловым излучением, используются следующие параметры:

– *абсолютно черное тело* – идеальный излучатель, который испускает и поглощает максимально возможное количество излучения при любых

температурах и длинах волн. Примером абсолютно черного тела служит маленькое отверстие в нагретой полости;

- *излучение* – интенсивность, с которой излучение происходит на поверхности по всем направлениям на единицу площади;

- *интегральная светимость* – интенсивность, с которой излучение покидает поверхность из-за эмиссии и отражения по всем направлениям на единицу площади поверхности;

- *абсорбционная способность*  $\alpha$  – часть случайного излучения, поглощаемая поверхностью;

- *отражательная способность*  $\rho$  – часть случайного излучения, отражаемая поверхностью. Отражательная способность абсолютно черного тела равна нулю;

- *пропускаемость*  $\tau$  – часть случайного излучения, передаваемая поверхностью. Программное обеспечение SolidWorks Simulation предполагает, что пропускаемость равна нулю;

- *излучательная мощность*  $E$  – интенсивность испускания излучения поверхностью по всем направлениям на единицу площади поверхности. Исходя из этого, размерность параметра  $E$  – ватт на квадратный метр;

- *коэффициент излучения*  $\epsilon$  – отношение излучательной мощности поверхности рассматриваемого объекта к излучательной мощности абсолютно черного тела при одной и той же температуре. Здесь следует отметить, что коэффициент излучения некоторой поверхности представляет собой функцию от температуры.

Абсорбционная, отражательная способности и пропускаемость (рис. 3.191) связаны следующим соотношением:

$$\alpha + \rho + \tau = 1.$$

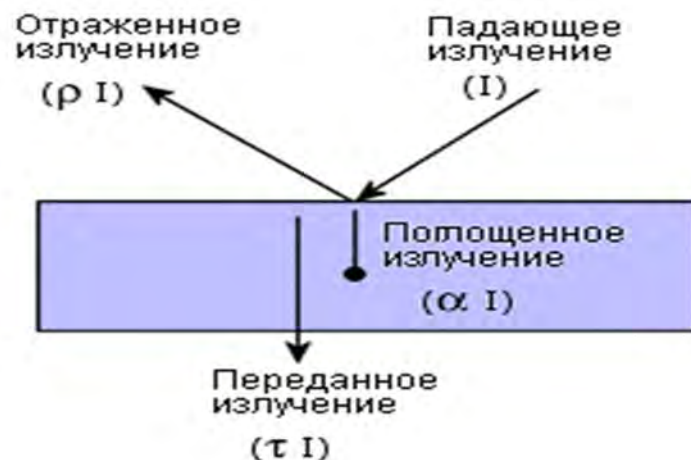


Рис. 3.191. Взаимосвязь абсорбционной, отражательной способностей и пропускаемости

Как следует из закона Стефана – Больцмана, интегральная способность излучения абсолютно черного тела  $E$  определяется соотношением

$$E = \sigma \cdot T^4,$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Если абсолютно черное тело с площадью поверхности  $A$  погружается в среду с температурой окружающей среды  $T_a$ , то чистая скорость истока тепла, излучаемого абсолютно черным телом, определяется по формуле

$$Q_{\text{излучение}} = \sigma \cdot A \cdot (T_s^4 - T_a^4) \quad \text{при } T_s \geq T_a,$$

где  $T_s$  – абсолютная температура абсолютно черного тела;  $T_a$  – абсолютная температура окружающей среды.

Для не абсолютно черного тела используется модифицированный закон Стефана – Больцмана:

$$Q_{\text{радиации}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_s^4 - T_a^4),$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент излучения испускающей поверхности, определяемый как отношение излучательной мощности такой поверхности к излучательной мощности абсолютно черного тела при одинаковой температуре.

Таким образом, коэффициент излучения различных материалов и состояния поверхностей принимает значения, находящиеся в интервале между 0 и 1,0. Следовательно, для абсолютно черного тела коэффициент излучения равен 1,0.

Следует иметь в виду, что коэффициент излучения зависит от качества обработки поверхности и ее температуры. Значения коэффициента излучения для некоторых материалов в зависимости от состояния излучающей поверхности приведены в табл. 3.20 (SolidWorks Simulation).

Табл. 3.20. Значения коэффициента излучения для некоторых материалов в зависимости от состояния поверхности и ее температуры

| Материал        |                    | Температура, °C | Коэффициент излучения |
|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------------|
| 1               |                    | 2               | 3                     |
| <b>Алюминий</b> | Шлифованный        | 50...500        | 0,04...0,06           |
|                 | Грубая поверхность | 20...50         | 0,06...0,07           |
|                 | Окисленный         | 200             | 0,11                  |

Окончание табл. 3.20

| 1                   |                    | 2           | 3           |
|---------------------|--------------------|-------------|-------------|
| <b>Латунь</b>       | Шлифованная        | 200         | 0,03        |
|                     | Катаный лист       | 20          | 0,06        |
|                     | Окисленная         | 200         | 0,61        |
| <b>Бронза</b>       | Шлифованная        | 50          | 0,1         |
| <b>Углерод</b>      | Нить               | 1000...1400 | 0,53        |
|                     | Графит             | 0...3600    | 0,7...0,8   |
|                     | Не окисленный      | 100         | 0,81        |
| <b>Медь</b>         | Промышленная       | 20          | 0,07        |
|                     | Шлифованная        | 50...100    | 0,02        |
|                     | Не окисленная      | 100         | 0,02        |
|                     | Окисленная         | 50          | 0,6...0,7   |
| <b>Стекло</b>       | —                  | 20...100    | 0,91...0,94 |
| <b>Литое железо</b> | С ржавчиной        | 25          | 0,65        |
|                     | Окисленное         | 200         | 0,64        |
|                     | Не окисленное      | 100         | 0,21        |
| <b>Свинец</b>       | Окисленный         | 200         | 0,96        |
|                     | Не окисленный      | 200         | 0,63        |
| <b>Платина</b>      | Шлифованная        | 200...600   | 0,05...0,1  |
|                     | Не окисленная      | 25          | 0,037       |
| <b>Кварц</b>        | —                  | —           | 0,92        |
| <b>Резина</b>       | Жесткая            | 20          | 0,95        |
|                     | Мягкая             | 20          | 0,86        |
| <b>Кремний</b>      | —                  | —           | 0,92        |
| <b>Серебро</b>      | Шлифованное        | 20...600    | 0,02...0,03 |
|                     | Не окисленное      | 100         | 0,02        |
| <b>Сталь</b>        | Грубая поверхность | 50          | 0,95...0,98 |
|                     | Шлифованная        | 750...1050  | 0,52...0,56 |
|                     | Окисленная         | 200...600   | 0,8         |
|                     | Не окисленная      | 100         | 0,08        |
| <b>Цинк</b>         | Окисленный         | 200...300   | 0,04...0,05 |
|                     | Не окисленный      | 300         | 0,05        |

Под *теплопроводностью* подразумевается перенос теплоты за счет движения структурных элементов физической системы (молекул, ионов, электронов) без переноса массы вещества. В частности, процесс теплопроводности в металлах связан с наличием высокой концентрации свободных электронов ( $10^{22}...10^{23}$  см<sup>-3</sup>). Область с более высокой температурой металла характеризуется большими скоростями перемещений электронов, а следовательно, более высокой кинетической энергией по сравнению с соседними объемами вещества. За счет диффузии и взаимодействия с другими электронами «горячие» электроны переносят тепловую энергию в

сравнительно холодные области металла. Данный механизм теплопроводности получил название *электронной теплопроводности*. Здесь следует отметить, что электронная теплопроводность и электропроводность имеют одну и ту же физическую сущность.

Способность материала изделия передавать через свой объем тепловую энергию посредством теплопроводности характеризуется *коэффициентом теплопроводности*  $\lambda$ . Этот коэффициент является одним из теплофизических свойств вещества и имеет размерность ватт на метр-кельвин.

Процесс переноса тепла теплопроводностью подчиняется закону Фурье, согласно которому количество теплоты, переданное от более нагретого тела к менее нагретому (тепловая мощность)  $Q_T$ , пропорционально коэффициенту теплопроводности  $\lambda$ , площади переноса тепла  $A$  и температурному градиенту  $dT/dx$ , т. е.

$$Q_T = -\lambda \cdot A \cdot (dT/dx).$$

В упрощенной форме для некоторого слоя тела (рис. 3.192) данное выражение может быть представлено следующим образом:

$$Q_{\text{теплопроводности}} = -\lambda \cdot A \cdot (T_H - T_C)/L.$$

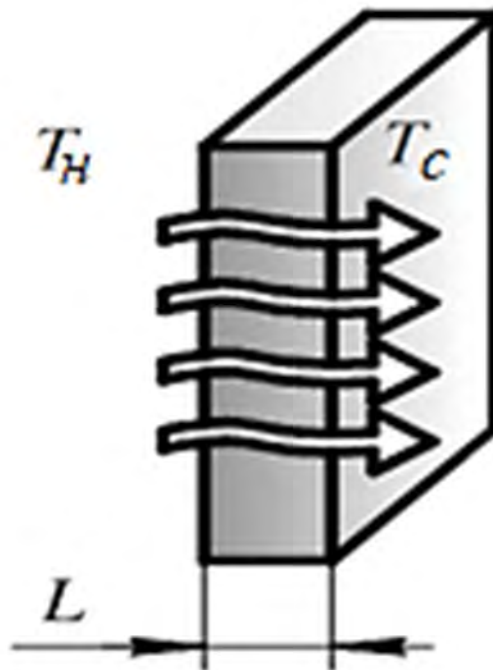


Рис. 3.192. Перенос тепла теплопроводностью через слой тела толщиной  $L$

На рис. 3.193 приведены ориентировочные значения коэффициентов теплопроводности для широкого спектра материалов.

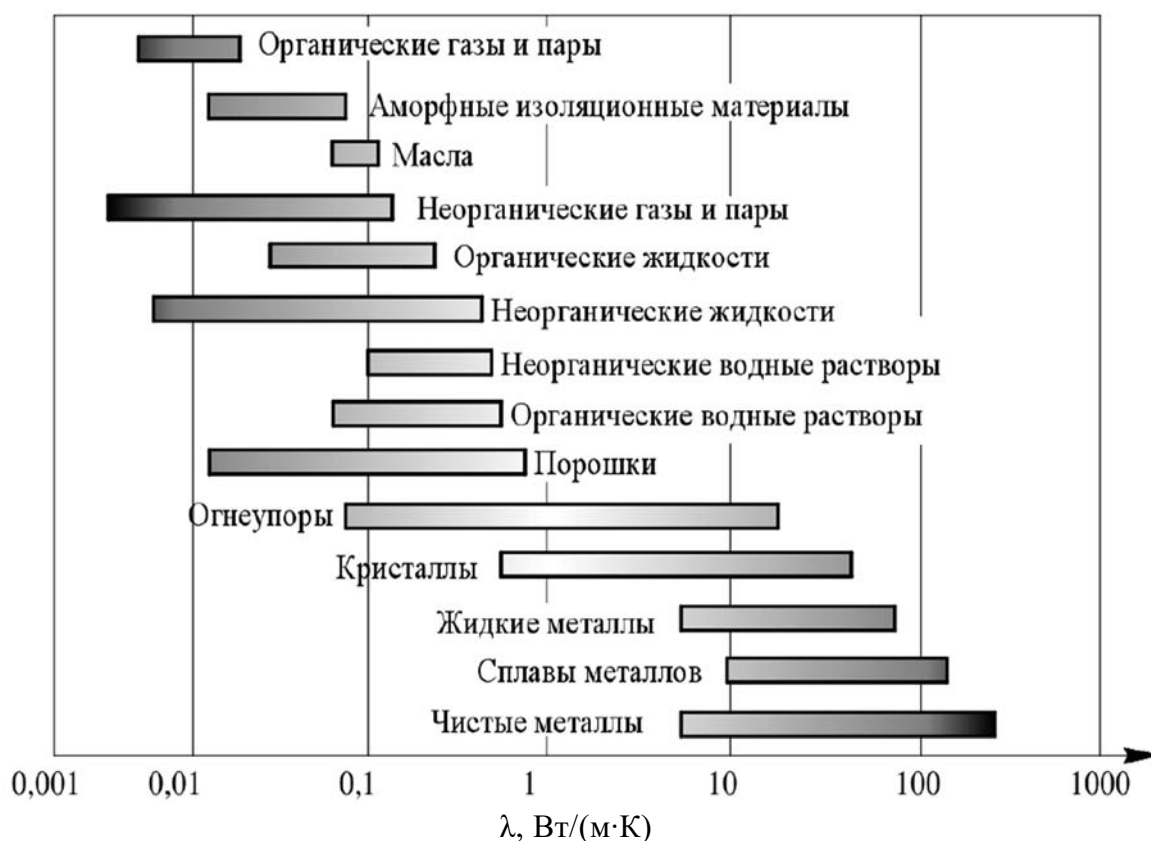


Рис. 3.193. Ориентировочные значения коэффициентов теплопроводности для различных материалов

Коэффициент теплопроводности является зависимой величиной от температуры рассматриваемого объекта. В табл. 3.21 приведены усредненные значения коэффициента теплопроводности для различных материалов и температур.

Табл. 3.21. Значения коэффициентов теплопроводности различных материалов в зависимости от температуры

В ваттах на метр-кельвин

| Материал          | Температура, К |     |     |     |     |     |               |               |
|-------------------|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|---------------|---------------|
|                   | 103            | 173 | 273 | 373 | 473 | 573 | 673           | 873           |
| Нержавеющая сталь | —              | —   | —   | 15  | 17  | 19  | 21            | 25            |
| Свинец            | 40             | 37  | 36  | 34  | 33  | 32  | 17<br>(жидк.) | 20<br>(жидк.) |
| Платина           | 78             | 73  | 72  | 72  | 72  | 73  | 74            | 77            |
| Цинк              | 124            | 122 | 122 | 117 | 110 | 106 | 100           | 60<br>(жидк.) |
| Кремний           | 856            | 342 | 168 | 112 | 82  | 66  | 54            | 38            |

Описание теплового процесса в некоторой точке твердого тела в зависимости от времени  $\tau$  (определение температурного поля объекта) осуществляется посредством рассмотрения дифференциального уравнения теплопроводности [5]. Данное уравнение в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + W = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau},$$

где  $T(x, y, z, \tau)$  – температурное поле рассматриваемого объекта;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности вещества с возможной зависимостью его от температуры и направления распространения тепла,  $\lambda = \lambda(T)$ ;  $c$  – удельная массовая теплоемкость тела, Дж/(кг·град);  $c = c(T)$ ;  $\rho$  – плотность материала тела, кг/м<sup>3</sup>;  $W$  – распределение по объему тела плотности тепловыделения действующими в объекте источниками тепла, Вт/м<sup>3</sup>;  $W = W(x, y, z, \tau)$ .

Кроме указанных теплофизических характеристик, в практике тепловых расчетов используется такой параметр, как *коэффициент температуропроводности*, определяемый с помощью соотношения  $a = \lambda / c\rho$  и имеющий размерность квадратный метр в секунду. Физический смысл данного коэффициента состоит в том, что он характеризует способность материала с большей или меньшей скоростью  $\partial T / \partial \tau$  выравнивать температуры вещества в неравновесных тепловых процессах. Исходя из приведенного описания коэффициента температуропроводности, можно заключить, что при прочих равных условиях выравнивание температуры будет происходить быстрее в том объекте, коэффициент теплопроводности которого больше.

Следует различать *стационарные* и *нестационарные температурные поля*. Если температура в каждой точке исследуемого объекта зависит только от координат  $T(x, y, z)$  и не зависит от времени, то такое температурное поле называется стационарным. С математической точки зрения данное температурное поле должно удовлетворять следующему условию:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0.$$

В общем случае, кроме координат точек тела, температура может зависеть и от времени. В данном случае поле называется нестационарным или переходным. При этом температура исследуемого объекта изменяется

не только при переходе от точки к точке, но и с течением времени. Такие явления существуют при нагреве и охлаждении различных изделий и заготовок, пуске и остановке энергетических установок, осуществлении сварочных работ и т. д.

Программный комплекс SolidWorks Simulation позволяет производить анализ двух типов температурных полей. При проведении этих анализов необходимо иметь в виду следующие обстоятельства.

1. *Установившееся тепловое состояние* рассматриваемого объекта (стационарное температурное поле). При этом типе анализа определяется распределение температуры тела только начиная с момента достижения теплового равновесия, т. е. время, за которое данное состояние устанавливается, не рассматривается. В данном случае предполагается, что тепловая энергия, входящая в любой точке исследуемого объекта, равна тепловой энергии, покидающей ее. По сути, единственной теплофизической характеристикой материала изделия, используемой для анализа установившегося состояния, является теплопроводность.

2. *Анализ переходного теплового процесса* (нестационарный температурный режим). При проведении такого рода анализа необходимо задать информацию о теплопроводности, плотности и удельной теплоемкости материала изделия. Кроме того, указать начальную температуру анализируемого объекта, временной диапазон рассмотрения переходного процесса, шаг во времени, подводимую и отводимую от изделия тепловую энергию.

Программный комплекс SolidWorks Simulation позволяет при рассмотрении переходных процессов использовать подвод тепловой энергии (тепловой мощности) посредством использования *термостата*. Этот термостат включает или отключает тепловую мощность или тепловой поток исходя из значения температуры в месте расположения термостата. Данная процедура осуществляется следующим образом: для каждого шага во времени статус тепловой мощности или состояния теплового потока устанавливается на основании значения температуры в заданном месте на предыдущем шаге во времени. Если тепловая мощность или тепловой поток принимают положительные значения, то устройство работает как нагреватель, который включается во время следующего шага во времени, когда температура в месте расположения датчика ниже, чем минимальное значение (рис. 3.194).

Условие нагревания отключается, если температура превысила максимальное допустимое значение (см. рис. 3.194).

Тепловой поток или тепловая мощность могут принимать и отрицательные значения, в этом случае устройство работает как охладитель.

Характерным признаком правильной работы термостата является график изменения температуры в месте расположения термостата

(см. рис. 3.194). Как видно из рис. 3.194, температура здесь циклически изменяется во времени. Отсутствие колебательного характера температурного режима говорит о том, что либо рассматриваемый временной интервал выбран неверно, либо место расположения термостата, термические нагрузки или свойства материала установлены ошибочно.

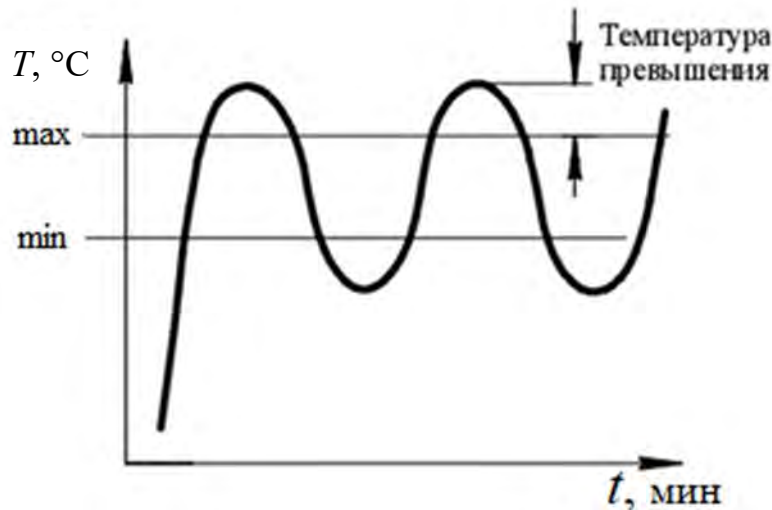


Рис. 3.194. Графическое изображение температурного режима во времени в месте расположения термостата

При анализе тепловых процессов используются такие понятия, как «изотермы» и «изотермические поверхности». Если мысленно, в один и тот же момент времени, соединить точки рассматриваемого объекта, имеющие одинаковые значения температуры, то получим поверхность равной температуры, которая называется *изотермической поверхностью*. Поскольку одна и та же точка тела не может одновременно иметь разные температуры, то изотермические поверхности не могут быть пересекающимися. Если изотермическую поверхность мысленно рассечь некоторой плоскостью, то в данном сечении эта поверхность будет выглядеть как некоторая сплошная замкнутая линия. Эту линию принято называть *изотермой*. Вполне очевидно, что в сечении рассматриваемого тела некоторой плоскостью будет иметь место семейство изотерм. При этом следует иметь в виду, что изменение температуры точек тела осуществляется в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Наибольшее изменение температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности. Данное изменение температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется *градиентом температуры*.

*Градиент температуры* представляет собой векторную величину. Этот вектор мысленно располагается в некоторой точке изотермической

поверхности с координатами  $x, y, z$  по направлению нормали к ней и численно равен производной по этому направлению:

$$\text{grad}T(x, y, z, \tau) = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы координатных осей;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к изотермической поверхности в рассматриваемой точке;  $\frac{\partial T}{\partial n}$  – производная по направлению  $n$ .

Исходя из представленной информации, можно заключить, что в отличие от полевой задачи, рассматриваемой в механике твердого деформируемого тела, анализ температурного поля с математической точки зрения представляет более простую задачу, поскольку в данном случае искомой величиной является только один параметр – значение температуры объекта в определенный момент времени и при заданных координатах точки тела.

Для определения температурного поля внутри исследуемой области к уравнению теплопроводности необходимо присоединить краевые (начальные и граничные) условия.

Условия 1-го рода (Дирихле) состоят в задании на части поверхности тела  $S_T$  распределения температуры  $f(x, y, z, \tau)$ :

$$T = f(x, y, z, \tau); \quad x, y, z, \tau \in S_T.$$

Кроме этого, на границе рассматриваемой области распределения температур могут учитываться конвективный и лучистый теплообмены, влияние которых на температурное поле было описано выше.

Условия 2-го рода (Неймана) состоят в задании теплового потока  $q(x, y, z, \tau)$  на части поверхности тела  $S_q$ :

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \ell_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \ell_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \ell_z + q(x, y, z, \tau) = 0;$$

$$x, y, z \in S_q,$$

где  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$  – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $S_q$ ;  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  – теплопроводности по соответствующим направлениям координатных осей.

Условие 3-го рода (Коши – Ньютона) получается в результате линейной комбинации двух первых условий и соответствует заданию на поверхности тела  $S_h$  теплообмена с окружающей средой:

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \ell_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \ell_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \ell_z + h(T - T_o) + q = 0;$$

$$x, y, z \in S_h,$$

где  $h$  – коэффициент, представляющий собой интегральный показатель, учитывающий лучистую и конвективную теплоотдачу (в пакете прикладных программ SolidWorks Simulation эти два параметра учитываются по отдельности);  $T_o$  – температура окружающей среды.

Здесь следует иметь в виду, что при небольших температурах основную роль в остывании металлических изделий играет конвективный теплообмен, а при сравнительно высоких температурах (свыше 600 °C) большая часть тепла теряется за счет лучистого теплообмена.

Когда на границе изделия не задана информация о конвективном и лучистом теплообмене, а поток тепла равен нулю, то эта часть границы является *теплоизолированной*.

Для конкретизации решения нестационарной задачи необходимо еще задать начальные условия – распределение температуры по объему изделия в начальный момент времени  $t = 0$ .

$$T_H = F(x, y, z); \quad x, y, z \in V.$$

Решение задачи распределения температур методом конечных элементов осуществляется аналогичным образом, как это делалось при рассмотрении проблем механики твердого деформируемого тела. Анализируемый объект представляется в виде набора отдельных фрагментов, именуемых конечными элементами, связанных друг с другом в узловых точках. При этом предполагается, что температура в общей узловой точке соседних конечных элементов одинакова. Далее, для решения краевой задачи распределения температур численными методами с уравнением теплопроводности связывается функционал, минимизация которого при используемой сетке разбиения рассматриваемого объекта на конечные элементы приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [\lambda] \{T\} + \{F\} = 0,$$

где  $\{T\}$  – глобальный вектор значений температур в узловых точках конечно-элементной модели;  $[\lambda]$  – глобальная матрица теплопроводности;  $[C]$  – глобальная матрица теплового демпфирования;  $\{F\}$  – глобальный вектор тепловой нагрузки.

Глобальные матрицы определяются посредством суммирования и по объему разработанной конечно-элементной модели соответствующих матриц конечных элементов. В свою очередь, значения матриц отдельных конечных элементов определяются с применением численного интегрирования, как это делалось при вычислении матриц жесткости в механике твердого деформируемого тела.

Для того чтобы получить значение температур в каждой узловой точке рассматриваемого интервала времени, необходимо решить вышеприведенное дифференциальное уравнение. Решение данного уравнения может быть получено посредством представления частной производной во времени ее конечно-разностным аналогом с применением центральной разностной схемы:

$$[\lambda] + \frac{1}{\Delta t}[C]\{T\}_i = \frac{1}{\Delta t}[C]\{T\}_{i-1} - \{F\},$$

где  $[\lambda]$  – глобальная матрица теплопроводности в данный момент времени;  $i$  – рассматриваемый шаг во времени;  $i - 1$  – номер предыдущего шага во времени;  $\Delta t$  – временной интервал между рассматриваемыми моментами времени;  $\{T\}_i$  – определяемый на данном шаге во времени вектор-столбец температур;  $\{T\}_{i-1}$  – известный из предыдущего шага во времени вектор-столбец температур;  $\{F\}$  – вектор-столбец тепловой нагрузки в рассматриваемый момент времени.

### ***Исходные данные***

Для закрепления материала, связанного с анализом тепловых процессов, предлагается во время проведения лабораторных занятий создать конечно-элементную модель аналогичного объекта и определить период  $T$  циклического срабатывания термостата.

Исходные данные к индивидуальному заданию определяются на основании порядкового номера студента в журнале группы (рис. 3.195 и табл. 3.22).

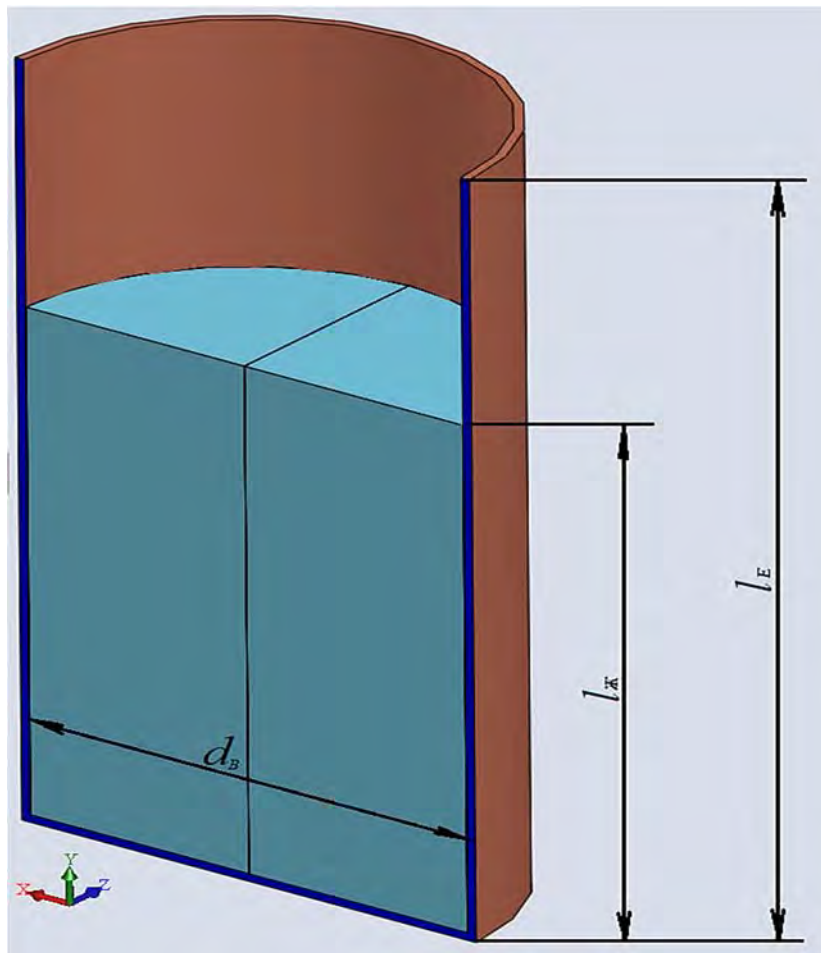


Рис. 3.195. Схема расчетной модели

Табл. 3.22. Исходные данные к разработке конечно-элементной модели рассматриваемого теплового процесса

| Порядковый номер в журнале учебной группы | Внутренний диаметр цилиндрической емкости $d_B$ , мм | Вертикальный размер емкости $l_E$ , мм | Значение коэффициента $K$ для определения уровня заполнения емкости жидкостью ( $l_{ж} = K \cdot l_E$ ) | Толщина стенки цилиндрической емкости, мм | Материал емкости |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------|
| 1                                         | 2                                                    | 3                                      | 4                                                                                                       | 5                                         | 6                |
| 1                                         | 150                                                  | 250                                    | 0,2                                                                                                     | 1                                         | Сталь            |
| 2                                         | 160                                                  | 260                                    | 0,4                                                                                                     | 2                                         | Медь             |
| 3                                         | 170                                                  | 270                                    | 0,6                                                                                                     | 3                                         | Чугун            |
| 4                                         | 180                                                  | 280                                    | 0,8                                                                                                     | 1                                         | Сталь            |
| 5                                         | 190                                                  | 290                                    | 1,0                                                                                                     | 2                                         | Медь             |
| 6                                         | 200                                                  | 300                                    | 0,2                                                                                                     | 3                                         | Чугун            |
| 7                                         | 210                                                  | 310                                    | 0,4                                                                                                     | 1                                         | Сталь            |
| 8                                         | 220                                                  | 320                                    | 0,6                                                                                                     | 2                                         | Медь             |

Окончание табл. 3.22

| 1  | 2   | 3   | 4   | 5 | 6     |
|----|-----|-----|-----|---|-------|
| 9  | 230 | 330 | 0,8 | 3 | Чугун |
| 10 | 240 | 340 | 1,0 | 1 | Сталь |
| 11 | 250 | 250 | 0,2 | 2 | Медь  |
| 12 | 260 | 260 | 0,4 | 3 | Чугун |
| 13 | 270 | 270 | 0,6 | 1 | Сталь |
| 14 | 280 | 280 | 0,8 | 2 | Медь  |
| 15 | 290 | 290 | 1,0 | 3 | Чугун |
| 16 | 150 | 300 | 0,2 | 1 | Сталь |
| 17 | 160 | 310 | 0,4 | 2 | Медь  |
| 18 | 170 | 320 | 0,6 | 3 | Чугун |
| 19 | 180 | 330 | 0,8 | 1 | Сталь |
| 20 | 190 | 340 | 1,0 | 2 | Медь  |
| 21 | 200 | 250 | 0,2 | 3 | Чугун |
| 22 | 210 | 260 | 0,4 | 1 | Сталь |
| 23 | 220 | 270 | 0,6 | 2 | Медь  |
| 24 | 230 | 280 | 0,8 | 3 | Чугун |
| 25 | 240 | 290 | 1,0 | 1 | Сталь |
| 26 | 250 | 300 | 0,2 | 2 | Медь  |
| 27 | 260 | 310 | 0,4 | 3 | Чугун |
| 28 | 270 | 320 | 0,6 | 1 | Сталь |
| 29 | 280 | 330 | 0,8 | 2 | Медь  |
| 30 | 290 | 340 | 1,0 | 3 | Чугун |

### ***Пример выполнения лабораторной работы***

Рассмотрим пример расчета в компьютерной системе SolidWorks следующего переходного теплового процесса. Медная цилиндрическая емкость со следующими габаритными размерами: высота  $h = 0,3$  м, диаметр  $d = 0,15$  м и толщина стенки  $\delta = 0,003$  м (рис. 3.196, *а*) заполнена на 2/3 объема водой (рис. 3.196, *б*).

Емкость и вода нагреты до температуры  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $363\text{ K}$ ), температура окружающей среды составляет  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $293\text{ K}$ ). Посредством использования температурного реле (термостата) необходимо поддерживать температуру воды в пределах  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $363\text{ K}$ )... $95\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $368\text{ K}$ ). Датчик измерения температуры расположен по центру в нижнем слое воды. Подвод тепла величиной  $1000\text{ В}$  осуществляется по нижней торцевой поверхности емкости.

На рис. 3.197 представлены детали, входящие в сборку *емкость с водой*.

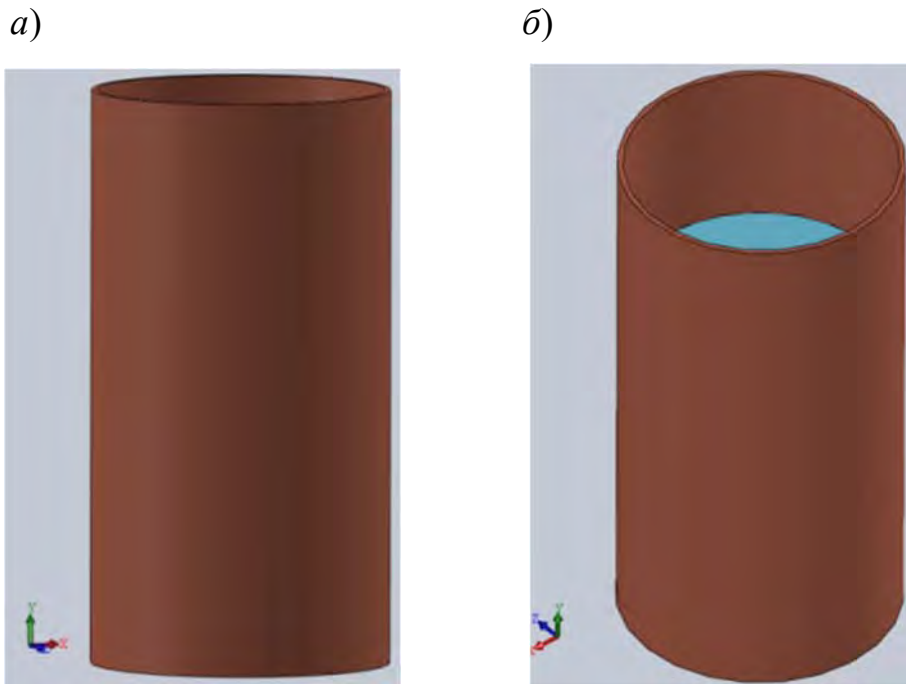


Рис. 3.196. Изображение медной цилиндрической емкости

Как видно (см. рис. 3.197), объем воды представлен в виде совокупности четырех фрагментов. Так сделано потому, что имеется необходимость в обозначении расположения датчика температур по центру нижней части объема воды.

После создания 3D-модели исследуемого объекта необходимо выбрать соответствующий анализ SolidWorks Simulation (рис. 3.198).

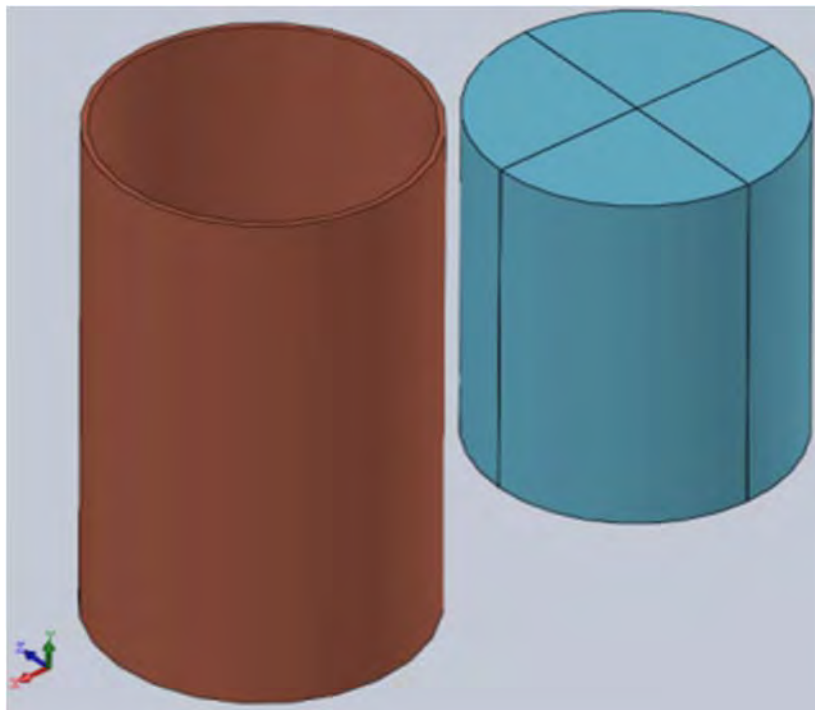


Рис. 3.197. Детали сборки *емкость с водой*

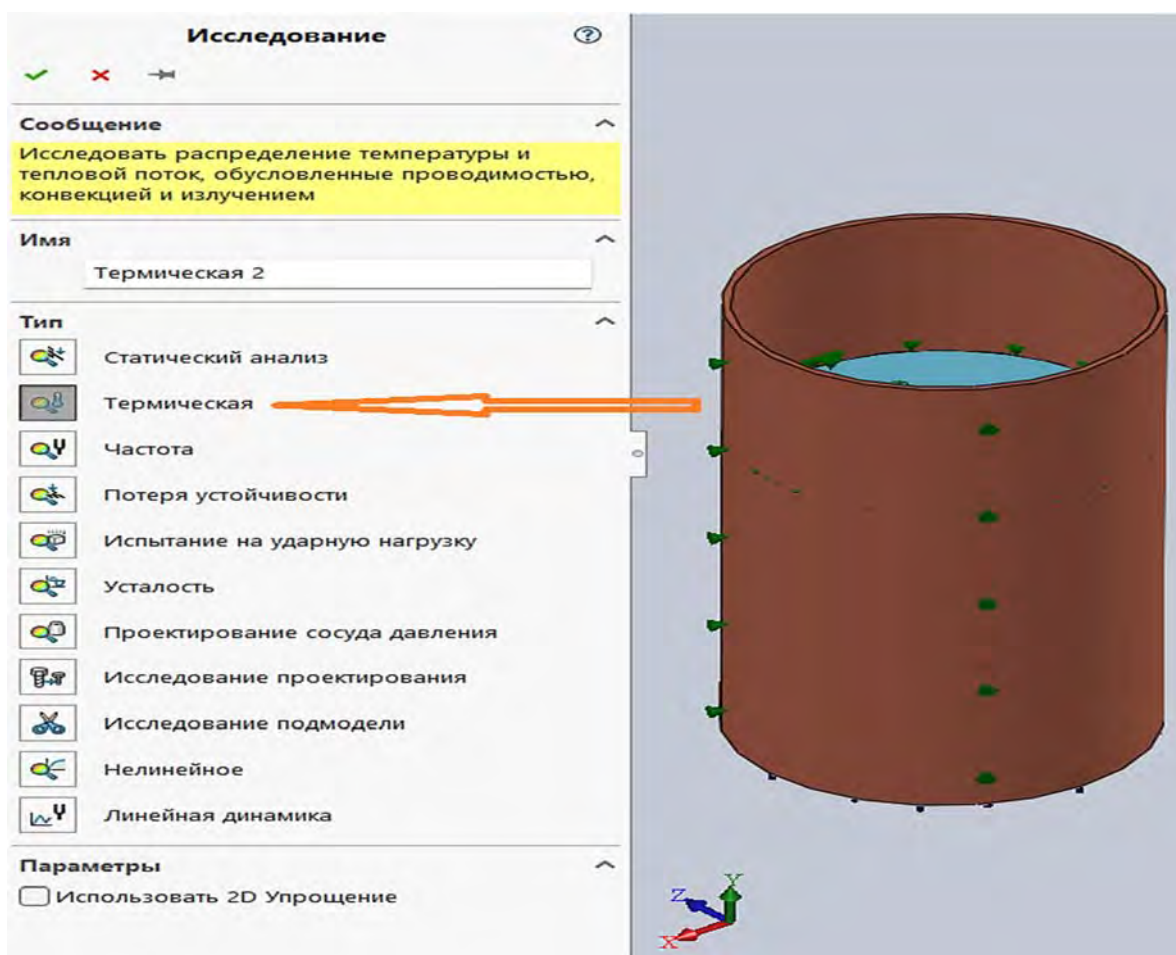


Рис. 3.198. Выбор типа анализа исследования

Поскольку в рассматриваемом объекте за счет конвективного теплообмена с внешних поверхностей резервуара и жидкости происходит охлаждение (температура окружающей среды составляет  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), а также сопутствующий этому обстоятельству последующий подогрев, то в этом случае анализ относится к переходному тепловому процессу.

Настройка характера теплового анализа осуществляется посредством активации в свойствах данного исследования опции *Переходной процесс* (на рис. 3.199 этот *тип решения* обведен оранжевой рамкой).

Следует отметить, что для данного *типа решения* обязательно необходимо указать временной отрезок, на протяжении которого анализируется тепловой процесс (*общее время*) и *временной инкремент*. В данном конкретном случае они составляют 350 и 7 с соответственно.

Как видно из рис. 3.199, *тип решения* также включает в себя рассмотрение *устойчивого состояния*. Это касается случаев, когда рассматривается стационарное температурное поле.

Кроме отмеченных опций *типа решения*, в этом меню еще присутствует опция *Начальная температура для термического исследования*. Активация этой опции позволяет в качестве начальных значений темпе-

ратуры использовать данные, полученные для исследуемого объекта в предыдущем тепловом анализе.

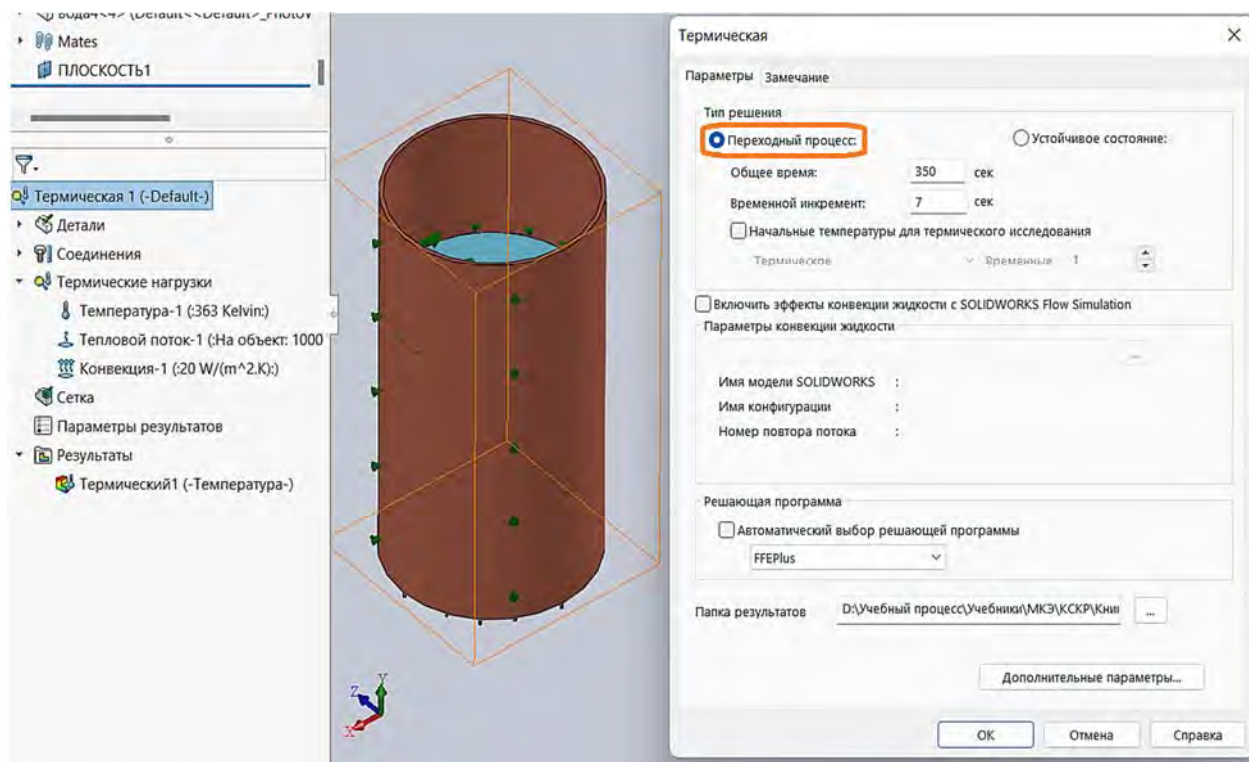


Рис. 3.199. Выбор типа решения *Переходный процесс*

Все остальные установки данного раздела для рассматриваемого примера могут быть приняты *по умолчанию*.

Следующей информацией, которую необходимо ввести для проведения теплового расчета, являются сведения о теплофизических свойствах материалов, входящих в сборку исследуемого процесса. При этом обязательными для рассмотрения тепловых процессов являются массовая плотность, теплопроводность и удельная теплоемкость, отмеченные на рис. 3.200 красным и синим цветом соответственно.

Приведенные на рис. 3.200 сведения о теплофизических свойствах меди взяты из базы данных SolidWorks Simulation.

Касательно теплообменных процессов, происходящих в воде, дела обстоят несколько сложнее, поскольку в этом случае теплообмен одновременно осуществляется двумя причинами – *диффузией* и *адвекцией* (см. рис. 3.187). Учитывая информацию, представленную в табл. 3.19, в данном примере, носящем учебный характер, приняты теплофизические свойства, отображенные на рис. 3.201. При назначении теплофизических свойств воды использовались возможности опции *Настроенный пользователем материал*. Здесь следует отметить, что теплопроводность воды  $\lambda = 1000 \text{ В}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , а массовая плотность и удельная теплоемкость имеют стандартные значения.

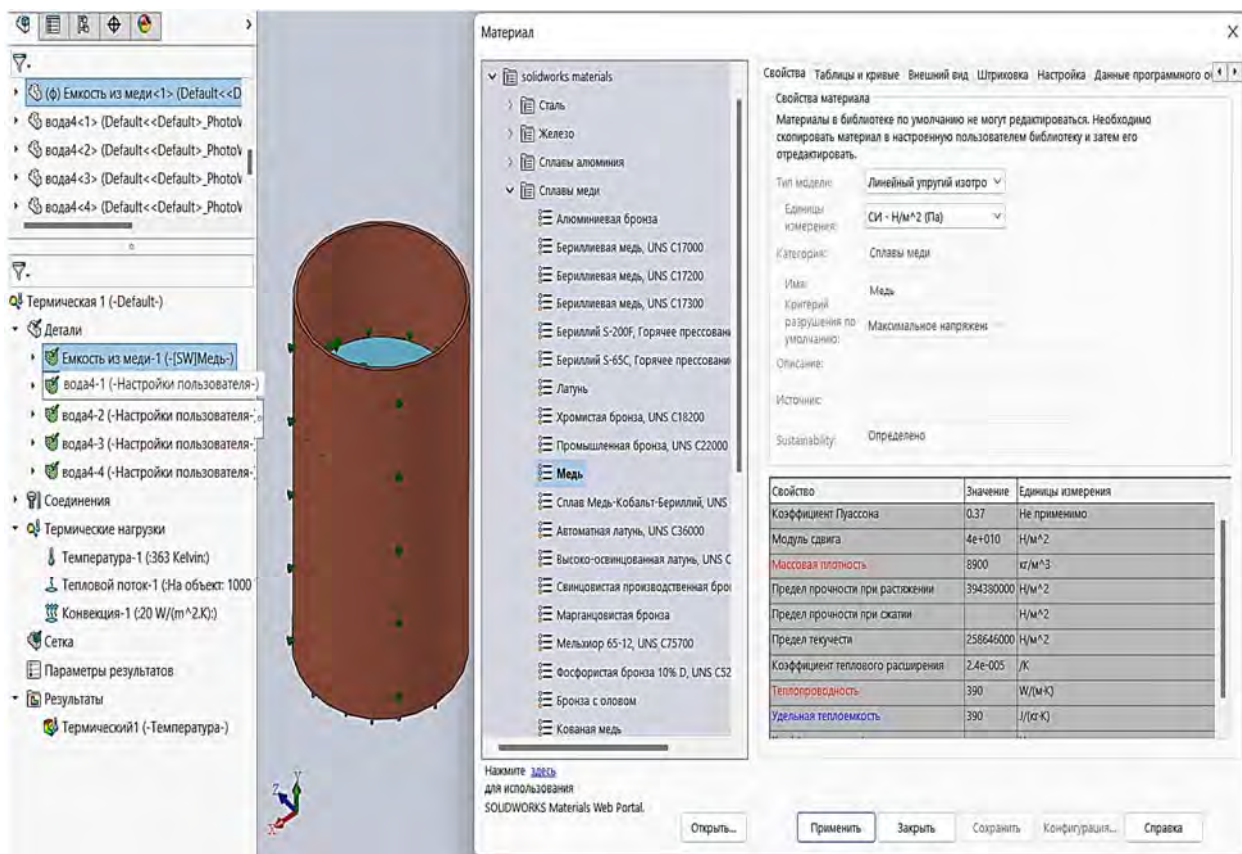


Рис. 3.200. Теплофизические свойства меди

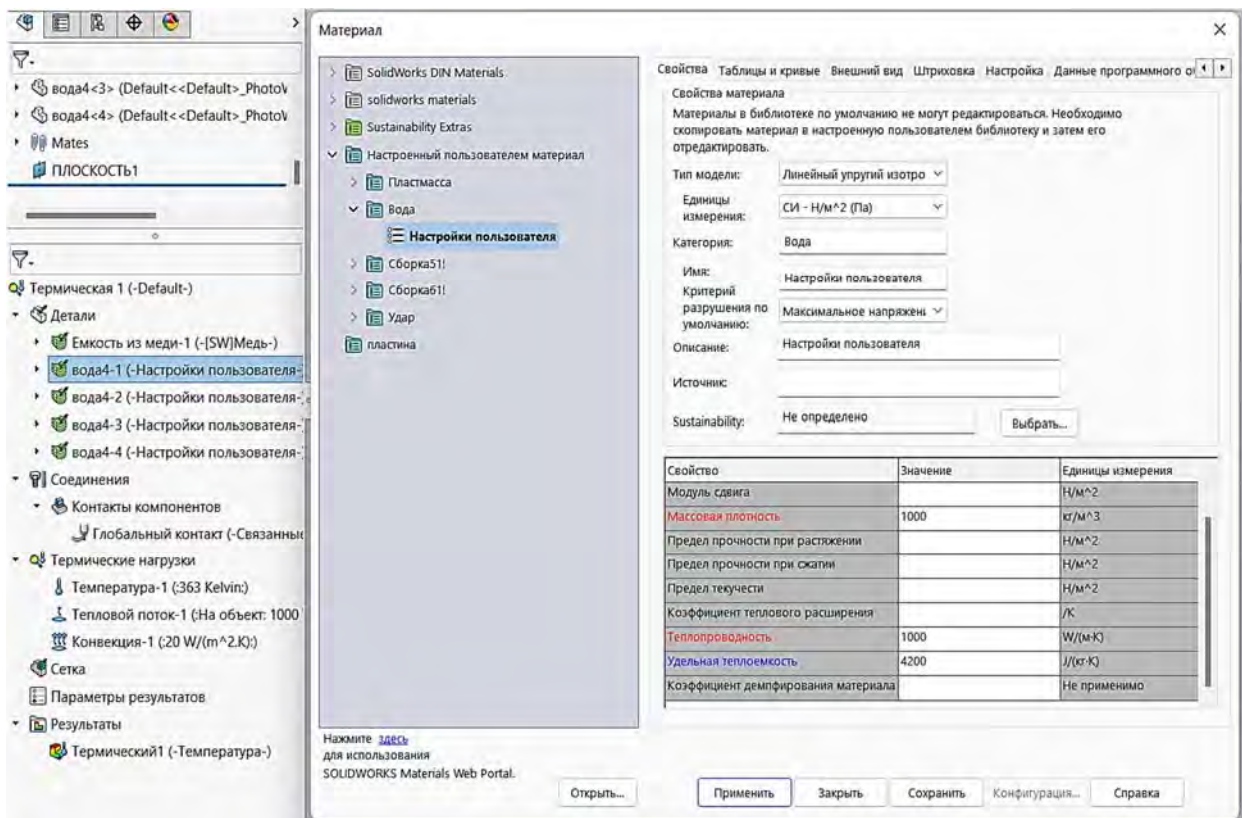


Рис. 3.201. Теплофизические свойства воды, принятые в рассматриваемом учебном примере

При рассмотрении сборок необходимо учитывать свойства контактов сопрягаемых деталей, в данном примере *Соединения* описываются как *Глобальный связанный контакт* (см. рис. 3.201) по умолчанию.

Следующим этапом препроцессорной подготовки анализа является задание *Термических нагрузок* (рис. 3.202). В соответствии с исходными данными начальная температура всех составляющих рассматриваемой сборки равна 90 °С (363 К). Для введения этой информации в базу данных к расчету необходимо щелкнуть правой клавишей мыши по опции *Термические нагрузки*, в результате высветится меню, представленное на рис. 3.202.

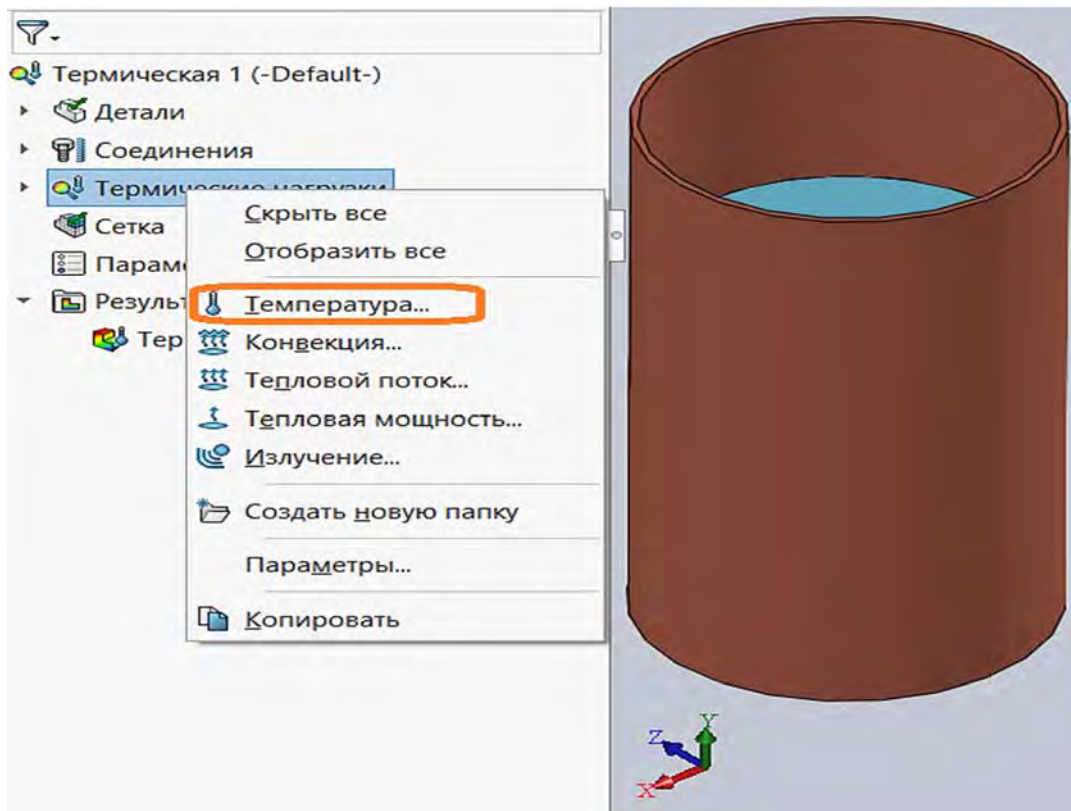


Рис. 3.202. Меню термических нагрузок

Начальные температуры объектов исследования могут быть заданы опцией, представленной на рис. 3.202 в оранжевой рамке. Щелкнув по ней левой клавишей мыши, высветится следующее меню (рис. 3.203).

В этом меню необходимо указать объекты, которым присваивается начальная температура и ее величина. В меню также присутствует опция *Температура*, при использовании которой назначается постоянная во времени температура для указанных объектов.

Конвективный теплообмен с поверхностями назначается посредством использования опции *Конвекция ...* (см. рис. 3.202). В результате задействования этой опции появится меню, отображенное на рис. 3.204.

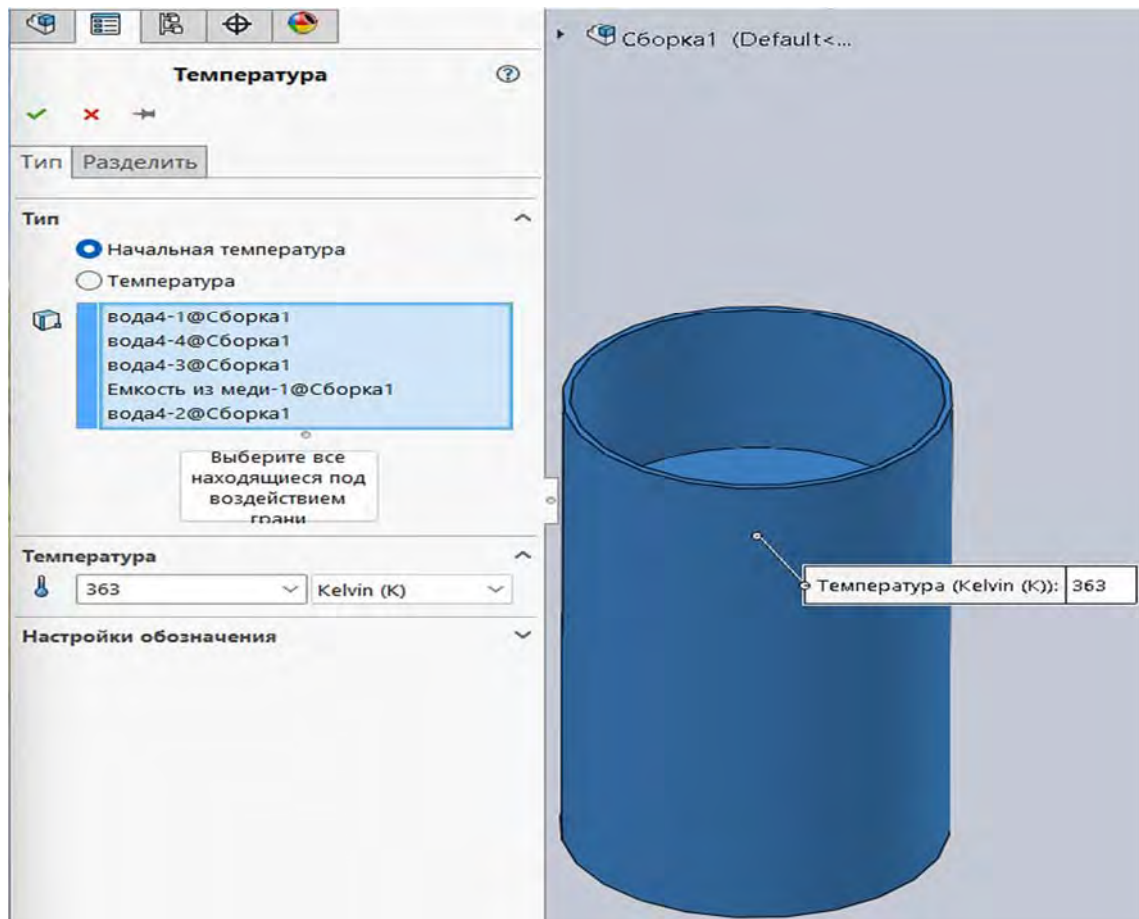


Рис. 3.203. Меню назначения начальной температуры

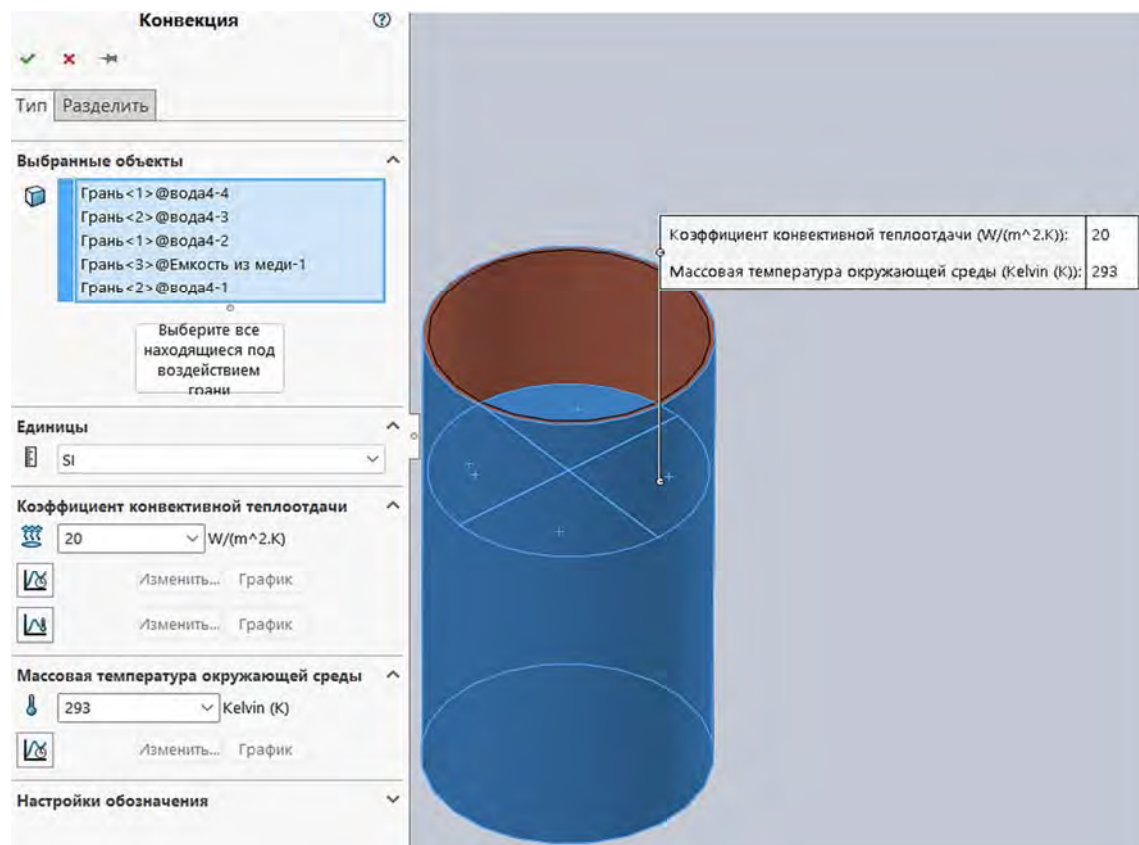


Рис. 3.204. Меню конвективного теплообмена

В данном меню необходимо указать поверхности, с которых осуществляется конвективная теплоотдача, коэффициент конвективной теплоотдачи (в соответствии с табл. 3.19) и *Массовую температуру окружающей среды*.

Следующий момент, который необходимо отразить на препроцессорной стадии, – описать работу термостата. Описание работы этого объекта осуществляется с помощью опций *Тепловая мощность ...* и *Тепловой поток ...*. В рассматриваемом примере использовалась опция *Тепловая мощность ...*, меню которой показано на рис. 3.205.

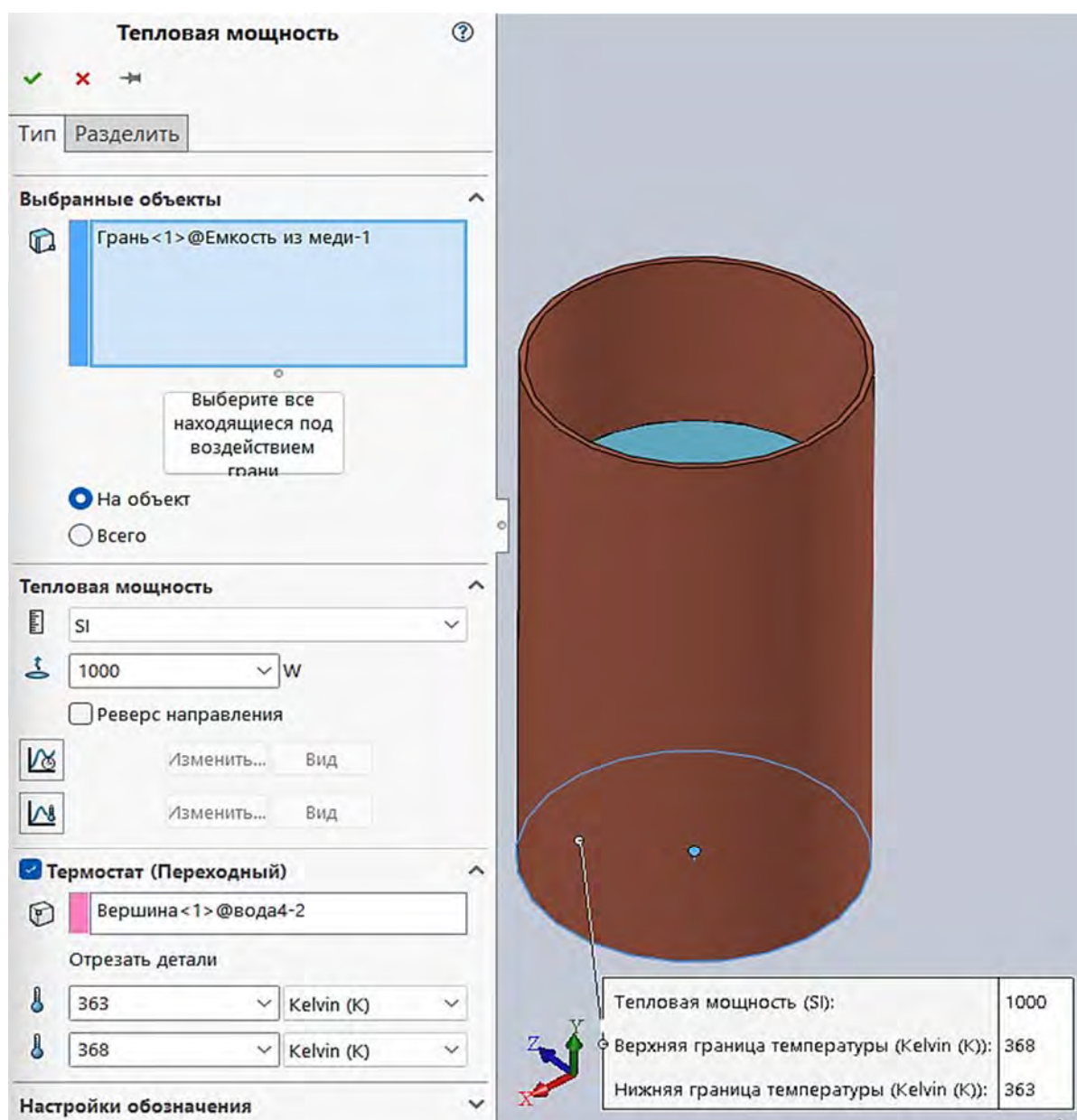


Рис. 3.205. Информация о характеристиках термостата

Это меню должно содержать информацию о грани, к которой подводится тепловая мощность, ее величине, наличии или отсутствии

термостата (отмечается наличием или отсутствием галочки в окошке), вершине детали, где расположен термостат, минимальном и максимальном значениях срабатывания термостата. На рис. 3.205 показаны грань, к которой в рассматриваемом примере подводится тепловая мощность (нижняя поверхность дна медной емкости), и в центре – место расположения термостата, а также указаны значения соответствующих параметров.

Процедура построения сетки конечных элементов для данного типа задач носит стандартный характер и может быть выполнена по умолчанию.

В результате проведения завершающего расчета и создания базы данных переходим к построению соответствующих эпюр и графиков, характеризующих температурное поле рассматриваемого объекта в различные моменты времени. Эта информация содержится в опции *Результаты*. В качестве результатов компьютерная система SolidWorks Simulation применительно к анализу тепловых процессов может представить информацию об эпюрах температур, эпюрах градиентов температур по различным направлениям и эпюрах тепловых потоков.

Существенного различия между характером визуализации результатов расчета в механике твердого деформируемого тела и анализе тепловых процессов не обнаружено. На рис. 3.206 представлена эпюра распределения температур по объему емкости с водой в один из моментов времени.

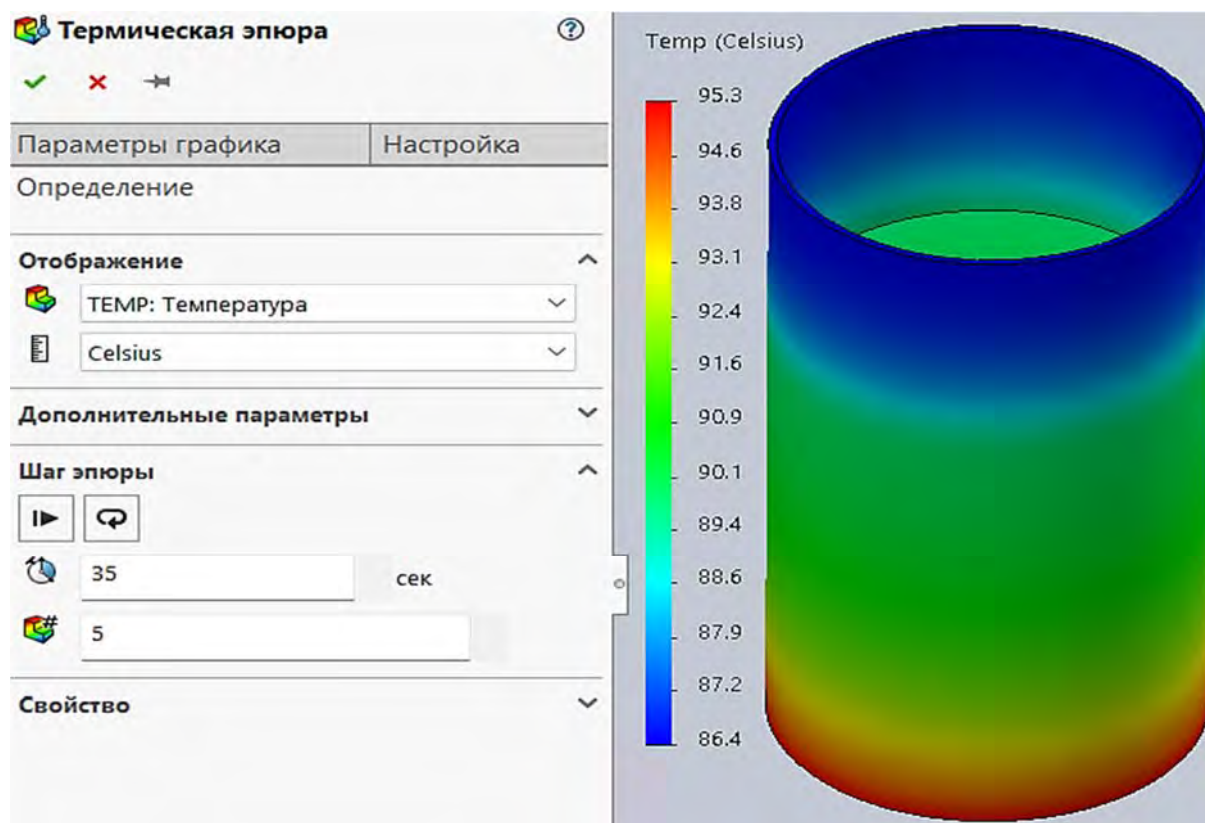


Рис. 3.206. Распределение температуры в объеме емкости с водой на 35-й секунде после начала анализа

Иногда для наглядности имеется необходимость в определении эпюры рассматриваемого параметра не только по внешнему контуру исследуемого объекта, но и в различных сечениях изделия. На рис. 3.207 приведены распределения температур по объему и сечениям резервуара с водой.

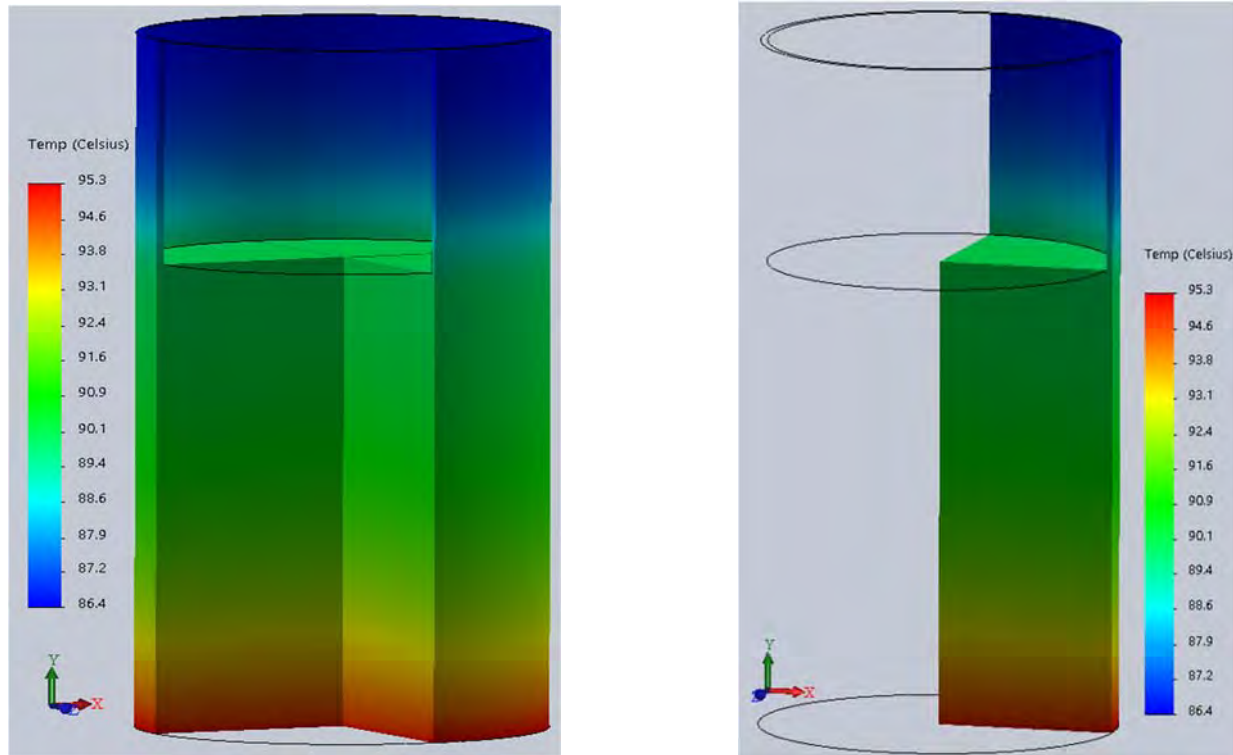


Рис. 3.207. Распределение температуры по объему емкости с водой и соответствующим сечениям

Для такого рода построений используется опция *Ограничение сечения* (рис. 3.208) и вспомогательные справочные плоскости.

Поскольку рассматривается переходной процесс и работа термостата, желательно иметь общую картину изменения температур во времени в характерных точках изделия. Такое изображение можно получить, воспользовавшись командой *Зондирование*, выделенной оранжевой рамкой (рис. 3.209). Данная процедура уже рассматривалась при решении задач механики твердого деформируемого тела.

На рис. 3.210 приведены: картина распределения температуры по объему медной емкости с водой; узловые точки, в которых осуществлялось зондирование; графики изменения температуры в точках зондирования во времени.

Анализ приведенных кривых (см. рис. 3.210) показал, что период срабатывания термостата составляет 210 с.

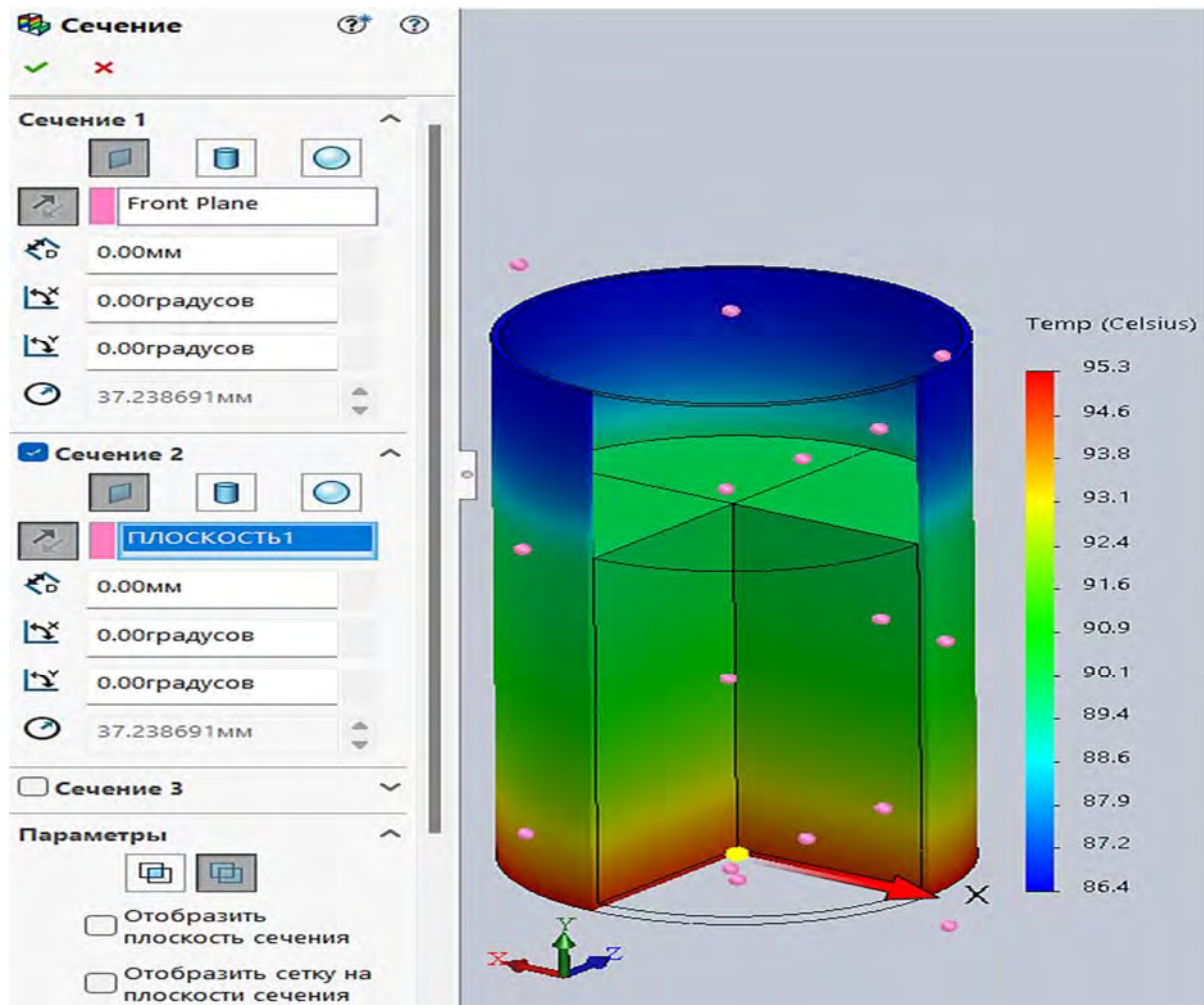


Рис. 3.208. Меню опции *Ограничение сечения*

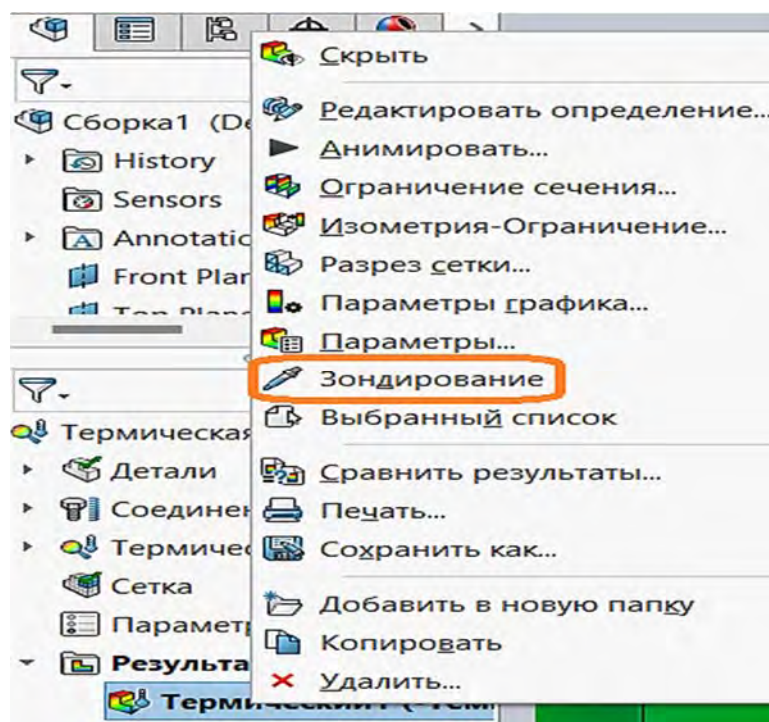


Рис. 3.209. Активация операции *Зондирование*

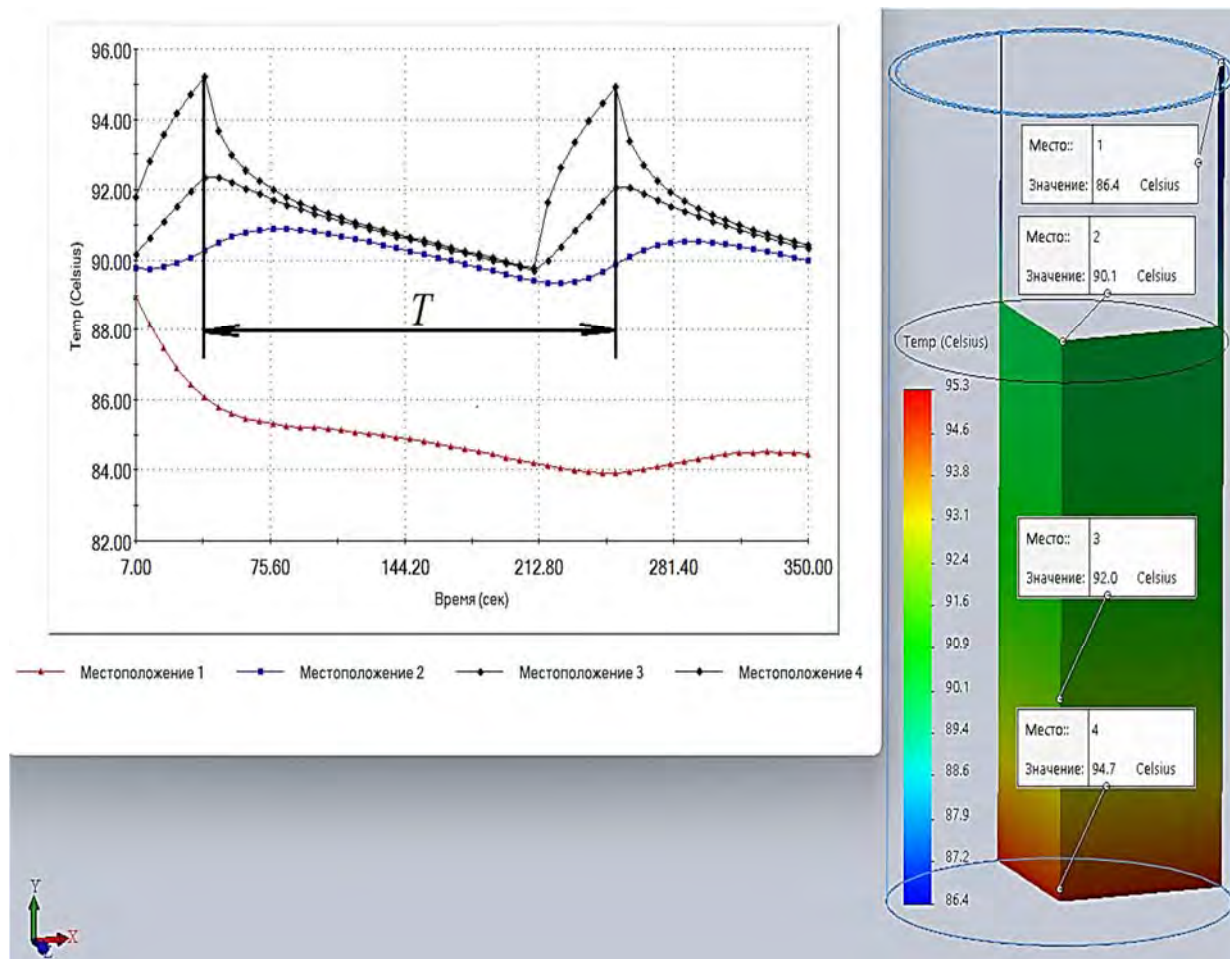


Рис. 3.210. Графики изменения температуры в точках зондирования во времени и период  $T$  циклического срабатывания термостата

### Контрольные вопросы

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Что подразумевается под термином «теплообмен»?
3. Какими факторами обусловлен *теплообмен* в природе?
4. Поясните природу *теплопроводности*.
5. Поясните природу теплообмена *конвекцией* (*конвективный теплообмен*).
6. Поясните природу теплообмена *электромагнитным излучением* (*лучистый теплообмен*).
7. В чем состоит различие в процессах *теплообмена диффузией* и *адвекцией*?
8. В чем состоит различие между *свободной* и *принудительной конвекциями*?
9. Какой объект называется *абсолютно черным телом*?
10. От каких факторов зависит излучательная способность поверхности тела?

11. В чем заключается специфика теплопроводности изделий из металла?

12. Как коррелируются между собой *теплопроводность* и *электропроводность*?

13. Какая характеристика материала называется *коэффициентом теплопроводности*?

14. Каким образом отражается температура материала на величине *коэффициента теплопроводности*?

15. Поясните физический смысл параметра *коэффициент температуропроводности*.

16. Поясните физический смысл параметра *удельная массовая теплоемкость тела*.

17. В чем состоит различие между *стационарными* и *нестационарными температурными полями*?

18. Что подразумевается под термином «*термостат*» в SolidWorks Simulation?

19. Как изменяется во времени температура изделия, использующего *термостат*?

20. Поясните такие понятия, как «*изотермы*» и «*изотермические поверхности*».

21. Расшифруйте понятие «*градиент температуры*».

22. Какие факторы превалируют при остывании металлических изделий в зависимости от температуры?

23. Если на границе изделия не задана информация о конвективном и лучистом теплообмене и на ней не действует тепловой источник, то к какому физическому состоянию данная граница относится?

24. Какой параметр нестационарного температурного поля необходимо определить в результате выполнения лабораторной работы?

### **3.11. Лабораторная работа № 11. Комплексная оценка работоспособности проектируемого объекта**

**Цель работы:** демонстрация проведения полного цикла компьютерного анализа работоспособности проектируемого изделия.

С учетом условий эксплуатации консольной опоры электродвигателя производилось имитационное моделирование объекта проектирования на следующие виды анализа:

– анализ напряженно-деформированного состояния объекта при статическом нагружении;

- оптимизация конструктивных форм и типоразмеров проектируемого изделия;
- определение собственных форм и частот колебаний оптимизированной конструкции объекта исследований;
- проверка состояния устойчивости проектируемого изделия;
- анализ усталостной прочности рассматриваемого объекта.

По результатам проведенных видов анализа сделаны соответствующие выводы.

### ***3.11.1. Анализ условий эксплуатации консольной опоры электродвигателя***

На рис. 3.211 приведен объект проектирования – консольная опора электродвигателя.



Рис. 3.211. Консольная опора электродвигателя

Как видно из приведенного рисунка, рассматриваемое изделие представляет собой сборку, состоящую из трех деталей – двух консольных кронштейнов и опорной плиты.

Материал, из которого изготовлены указанные детали, *простая углеродистая сталь* с механическими свойствами, приведенными на рис. 3.212.

На рис. 3.213 и 3.214 приведены эскизы рассматриваемых деталей с указанием габаритных размеров.

Закрепление консольного кронштейна осуществляется по контуру отверстий, находящихся на заднем фрагменте кронштейна, но запреща-

ются перемещения перпендикулярно задней поверхности этого фрагмента (см. рис. 3.214).

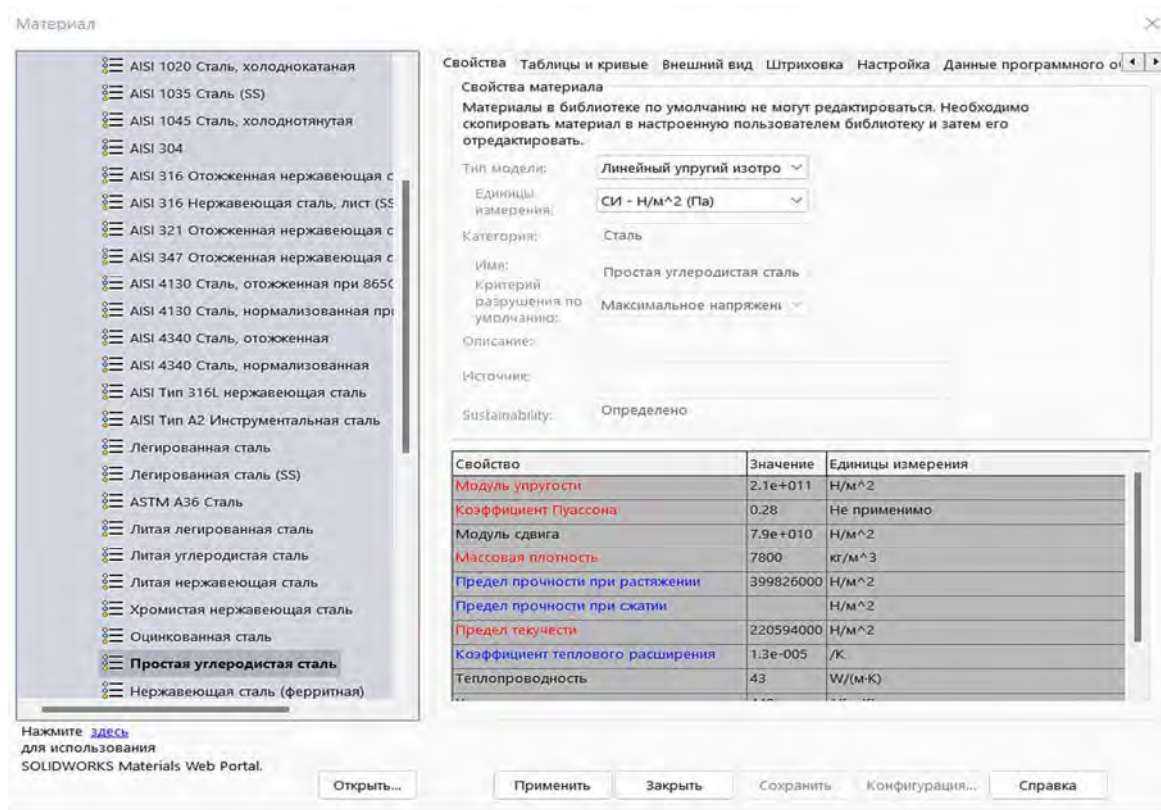


Рис. 3.212. Механические свойства используемых материалов

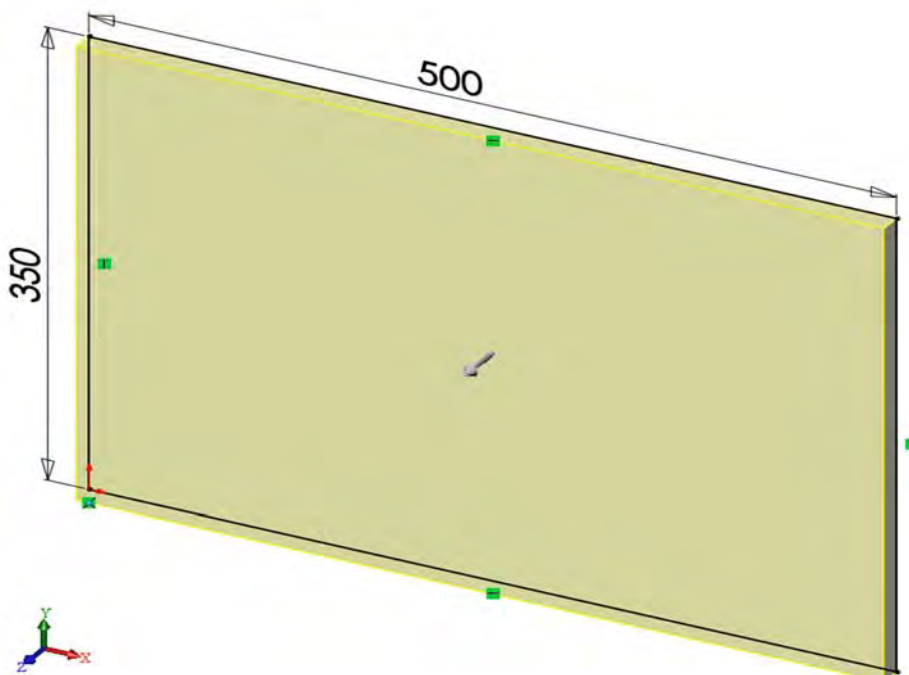


Рис. 3.213. Габаритные размеры опорной плиты (толщина составляет 15 мм)

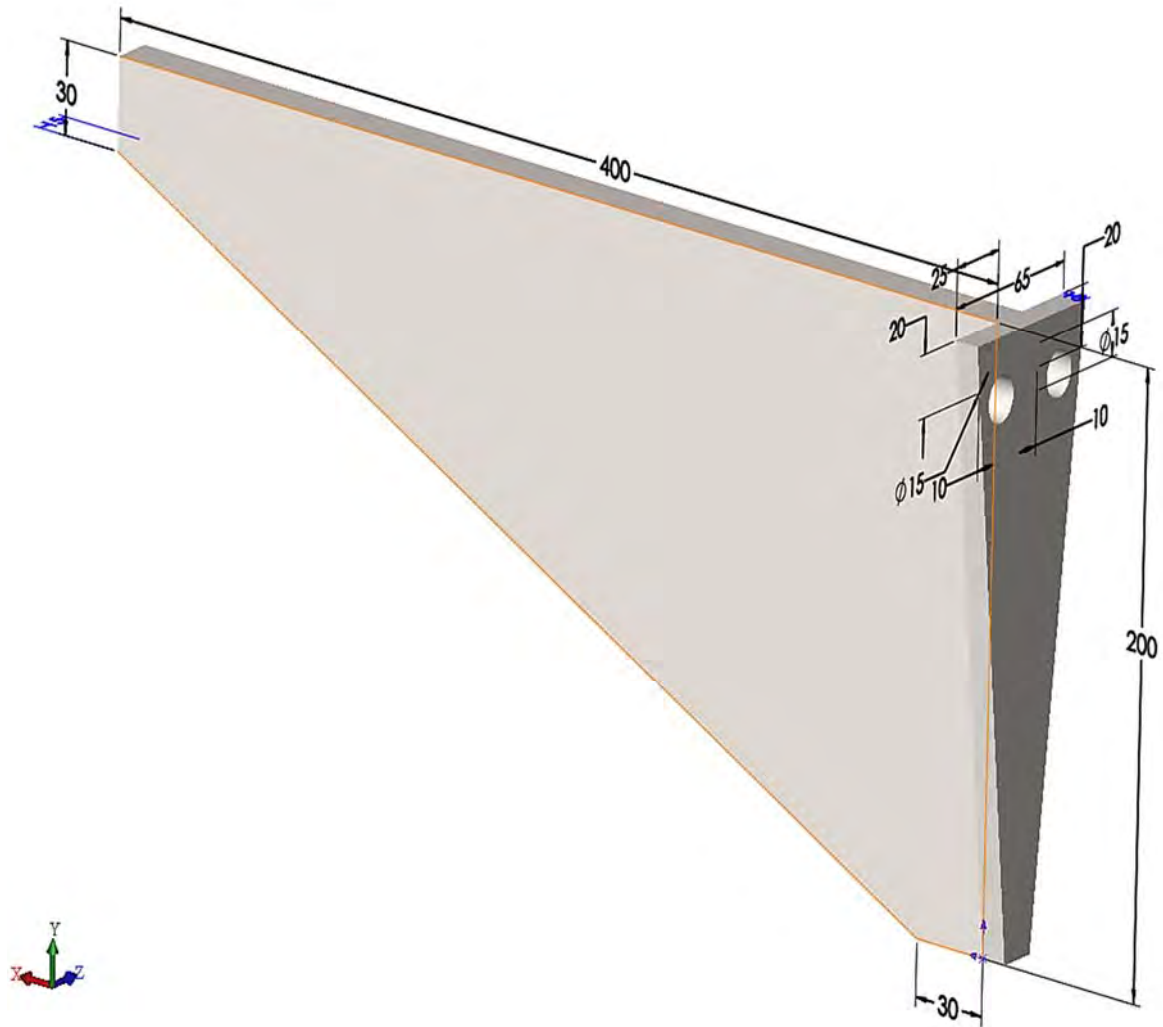


Рис. 3.214. Размеры консольного кронштейна

Источником внешней нагрузки на консольную опору является вес электродвигателя (см. рис. 3.211) и закрепленного на валу оборудования. Кроме того, имеется циклическое нагружение, возникающее в результате использования оборудования, при частоте вращения вала двигателя 5000 об/мин. Внешняя нагрузка принимается равномерно распределенной по верхней поверхности части опорной плиты, на которой расположен электродвигатель, и равной 1000 кг (с учетом возможного биения от наличия эксцентрика). При этом коэффициент асимметрии цикла нагружения составляет

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1,$$

как наиболее неблагоприятный с точки зрения усталостной прочности изделия.

Учитывая условия эксплуатации консольного кронштейна, а также поставленную задачу проектирования – определение оптимальных типоразмеров этого изделия с позиций минимизации материалоемкости, целесообразно провести следующие виды имитационного моделирования.

1. Статический анализ консольной опоры электродвигателя. На базе данного анализа разработать пути оптимизации конструкции консольного кронштейна.

2. Провести оптимизацию конструктивных форм и типоразмеров консольного кронштейна.

3. Учитывая, что в результате проведенной оптимизации жесткостные свойства консольного кронштейна и всей опоры электродвигателя в целом могут существенно измениться, необходимо провести анализ по определению собственных форм и частот колебаний. Этот анализ позволит убедиться в отсутствии резонансных явлений.

4. Снижение жесткостных характеристик может также негативно сказаться на устойчивости рассматриваемого объекта, поэтому анализ на устойчивость вполне уместен.

5. Поскольку в процессе эксплуатации изделия имеется циклическое нагружение, необходимо также провести анализ по проверке усталостной прочности.

### ***3.11.2. Разработка твердотельной модели консольной опоры электродвигателя***

При разработке твердотельной модели консольной опоры электродвигателя были применены следующие допущения:

1) отверстия в опорной пластине для крепления электродвигателя удалены, поскольку их влияние несущественно с точки зрения напряженно-деформированного состояния изделия в целом;

2) сам электродвигатель заменен массивным телом (параллелепипедом), имеющим схожие массогабаритные размеры;

3) материал деталей сборки – *простая углеродистая сталь*;

4) консольные кронштейны и опорная плита жестко соединены друг с другом посредством сварки.

В результате использования указанных допущений, а также исходных данных, приведенных в п. 3.11.1, была создана твердотельная модель анализируемого объекта (рис. 3.215).

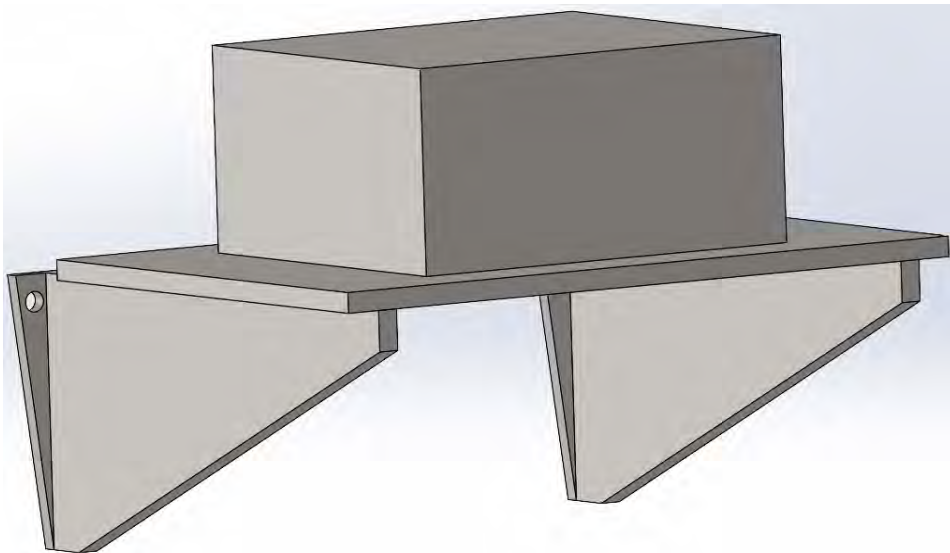


Рис. 3.215. Твёрдотельная модель разрабатываемого объекта

### ***3.11.3. Проведение статического анализа напряженно-деформированного состояния разрабатываемого объекта***

Для приведенной твердотельной модели в соответствии с исходными данными были заданы условия закрепления и нагружения (рис. 3.216).

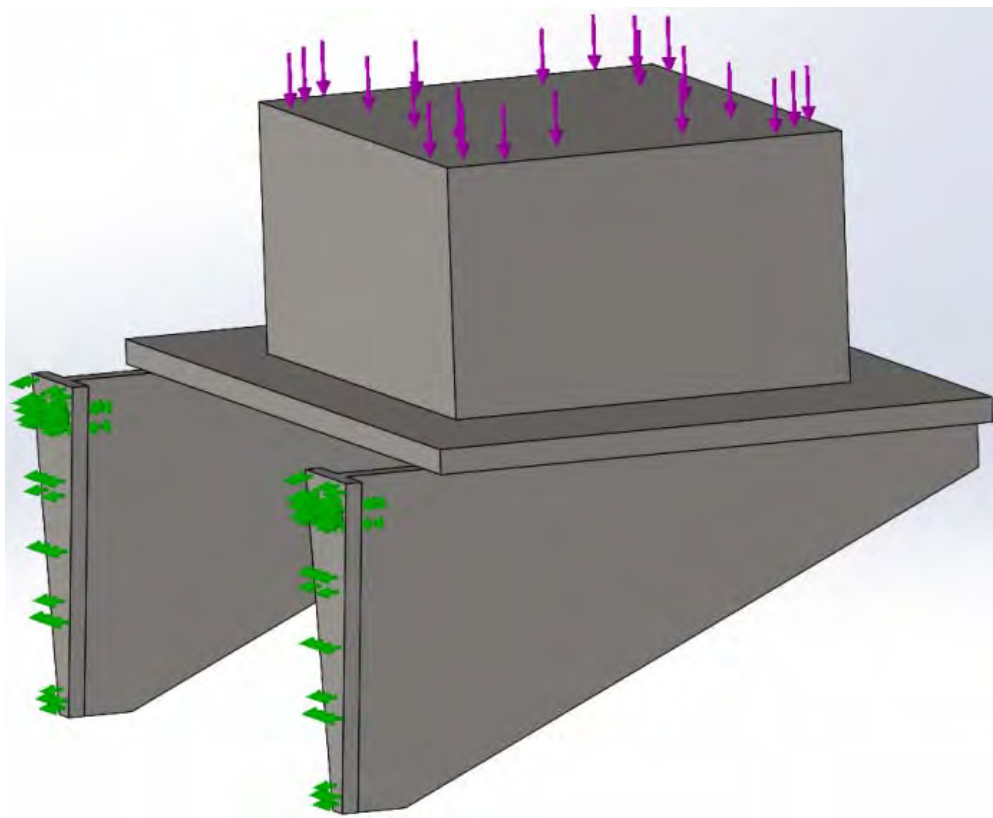


Рис. 3.216. Условия закрепления и нагружения анализируемого объекта

На рис. 3.217 представлена конечно-элементная модель консольной опоры и имитации электродвигателя.

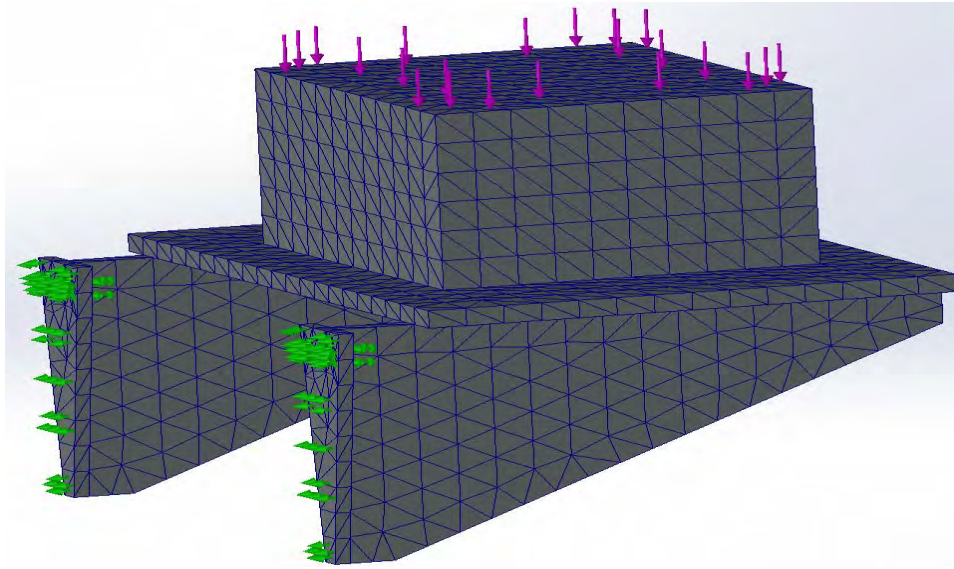


Рис. 3.217. Конечно-элементная модель консольной опоры и имитации электродвигателя

В последующем на базе разработанной конечно-элементной модели был проведен расчет и определены данные о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемого объекта. На рис. 3.218 показана эпюра распределения напряжений Von Mises по наружной поверхности изделия.

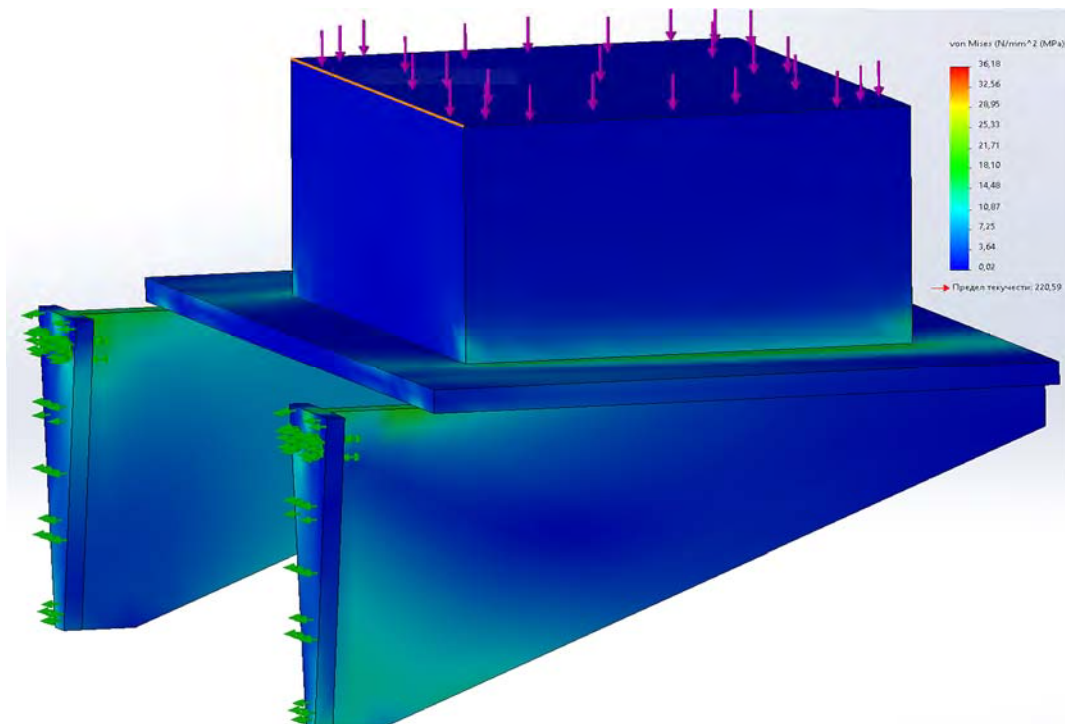


Рис. 3.218. Распределение напряжений Von Mises по наружной поверхности изделия

Здесь следует отметить, что напряжения Von Mises это интегральный показатель, который учитывает все шесть компонент напряжений и определяется следующим выражением:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

Эпюра напряжений Von Mises позволяет в целом оценивать уровень нагруженности материала изделия во всех точках его объема. Как видно из эпюры (см. рис. 3.218), напряжения в исследуемом объекте не превышают значения 36,18 МПа при значении предела текучести материала  $\sigma_T = 220,59$  МПа. Из этого обстоятельства можно сделать вывод о том, что консольный кронштейн является явно недогруженной деталью и нуждается в реконструкции.

Для анализа жесткостных показателей консольной опоры электродвигателя приведена эпюра вертикальных перемещений объекта от действия заданной нагрузки (рис. 3.219). Как видно, максимальные прогибы (см. рис. 3.219) не превышают 0,073 мм, что вполне приемлемо.

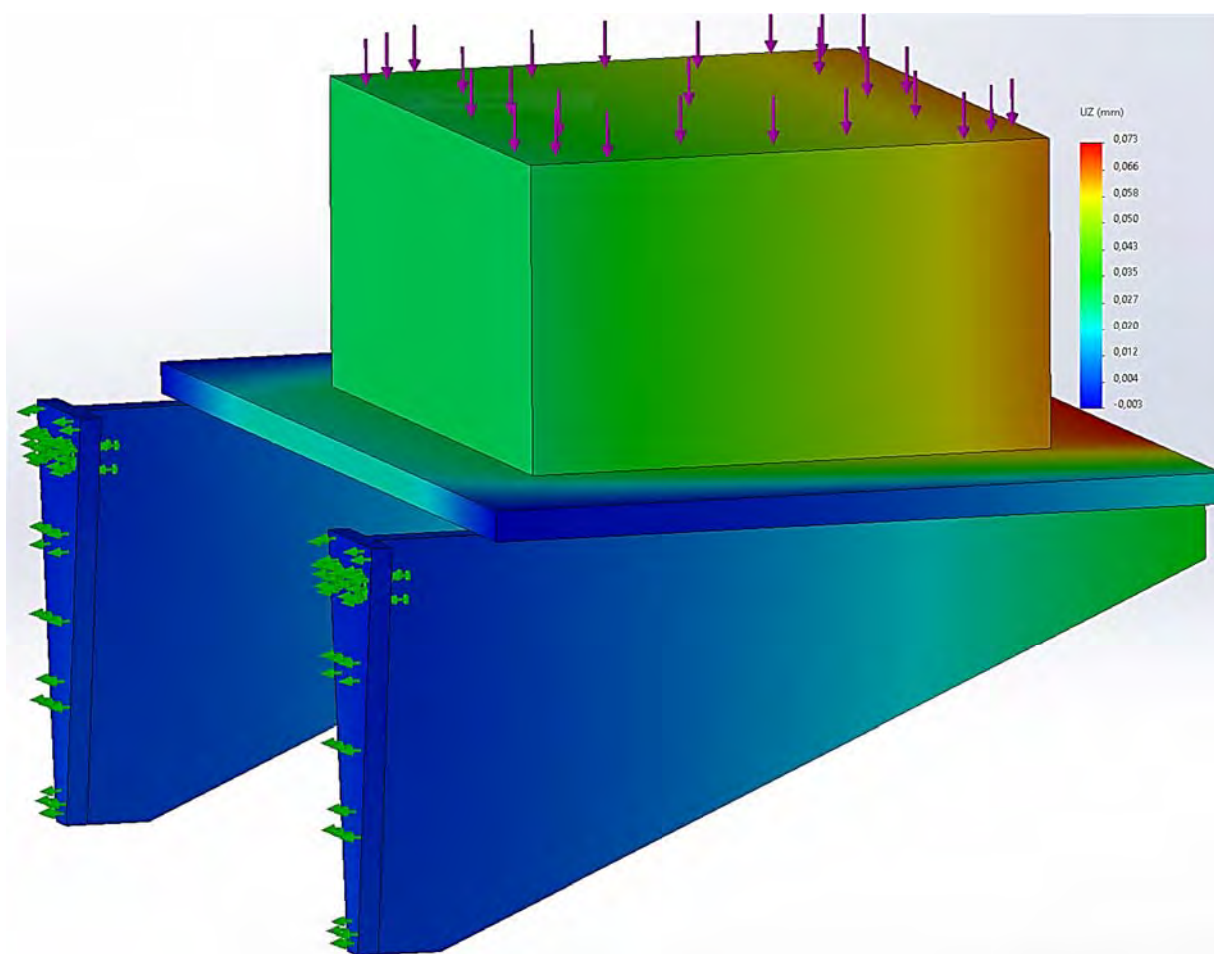


Рис. 3.219. Перемещения рассматриваемого объекта в вертикальном направлении

### 3.11.4. Разработка мероприятий по усовершенствованию конструктивно-технологических параметров изделия

Минимизация массы консольных кронштейнов, подверженных воздействию заданной нагрузки, представлена на рис. 3.219. В связи с этим, используя инструментарий SolidWorks, были определены весовые характеристики рассматриваемого изделия (рис. 3.220) на начальном этапе проектирования, в результате чего установлено, что масса данного объекта составляет 6,277 кг.

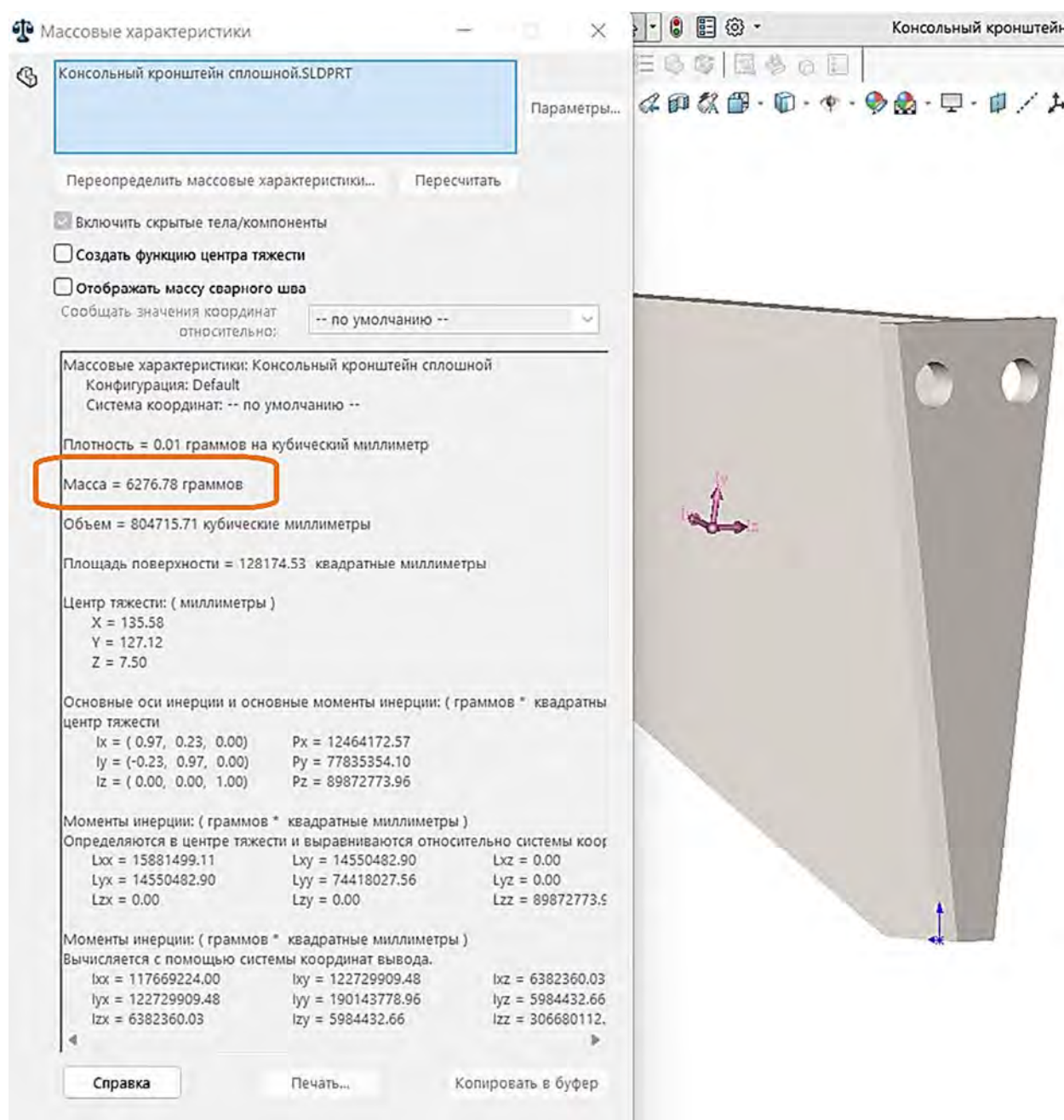


Рис. 3.220. Массовые характеристики консольного кронштейна до начала процесса оптимизации

Как видно из рис. 3.218, объект, подлежащий усовершенствованию, – консольный кронштейн, является слабо нагруженной деталью, поэтому вполне очевидно, что без особого ущерба для жесткостных и прочностных показателей его конструкцию можно изменить согласно рис. 3.221.

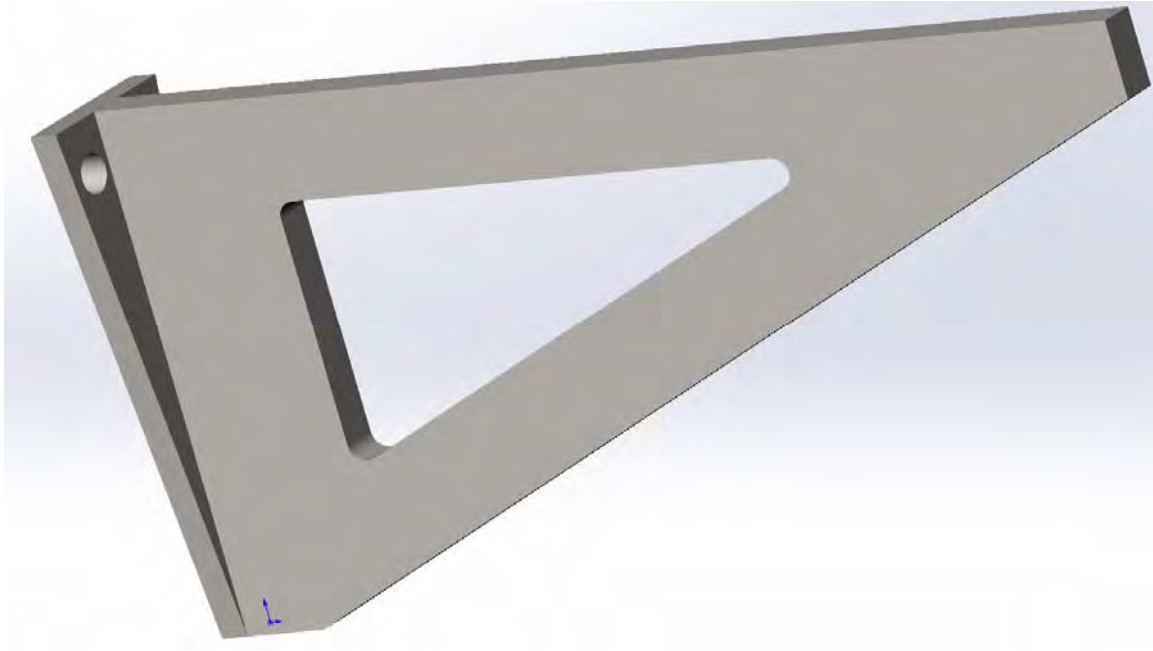


Рис. 3.221. Новая конструкция консольного кронштейна

Для определения габаритных размеров полости в консольном кронштейне необходимо провести дополнительный анализ по параметрической оптимизации с целью минимизации его материалоемкости.

При проведении параметрической оптимизации для экономии машинного времени и оперативной памяти ЭВМ консольный кронштейн рассматривался отдельно, а прикладываемая к нему нагрузка равнялась половине, приложенной ко всей сборке (рис. 3.222).

Варьируемыми параметрами для проведения оптимизационных испытаний предлагается назначить размеры кронштейна, выделенные оранжевым цветом (см. рис. 3.222). Эти размеры выбраны предварительно и они в результате оптимизационной процедуры будут редактироваться. Данные размеры характеризуют расстояния между параллельными линиями наружного контура кронштейна и линиями внутренней полости.

Согласно процедуре параметрической оптимизации первоначально необходимо провести анализ напряженно-деформированного состояния объекта оптимизации с определением интегрального параметра – напряжений Von Mises (рис. 3.223).

Из анализа этой эпюры становится очевидным, что консольный кронштейн по-прежнему имеет явно избыточный запас прочности.

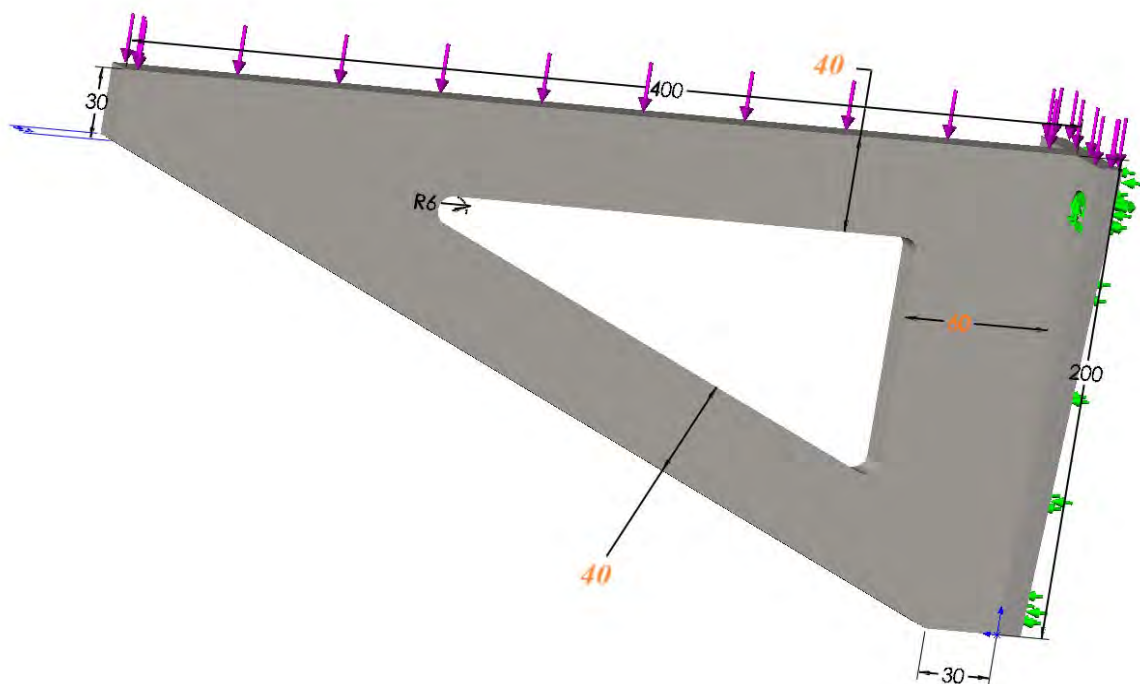


Рис. 3.222. Схема испытаний модифицированного консольного кронштейна

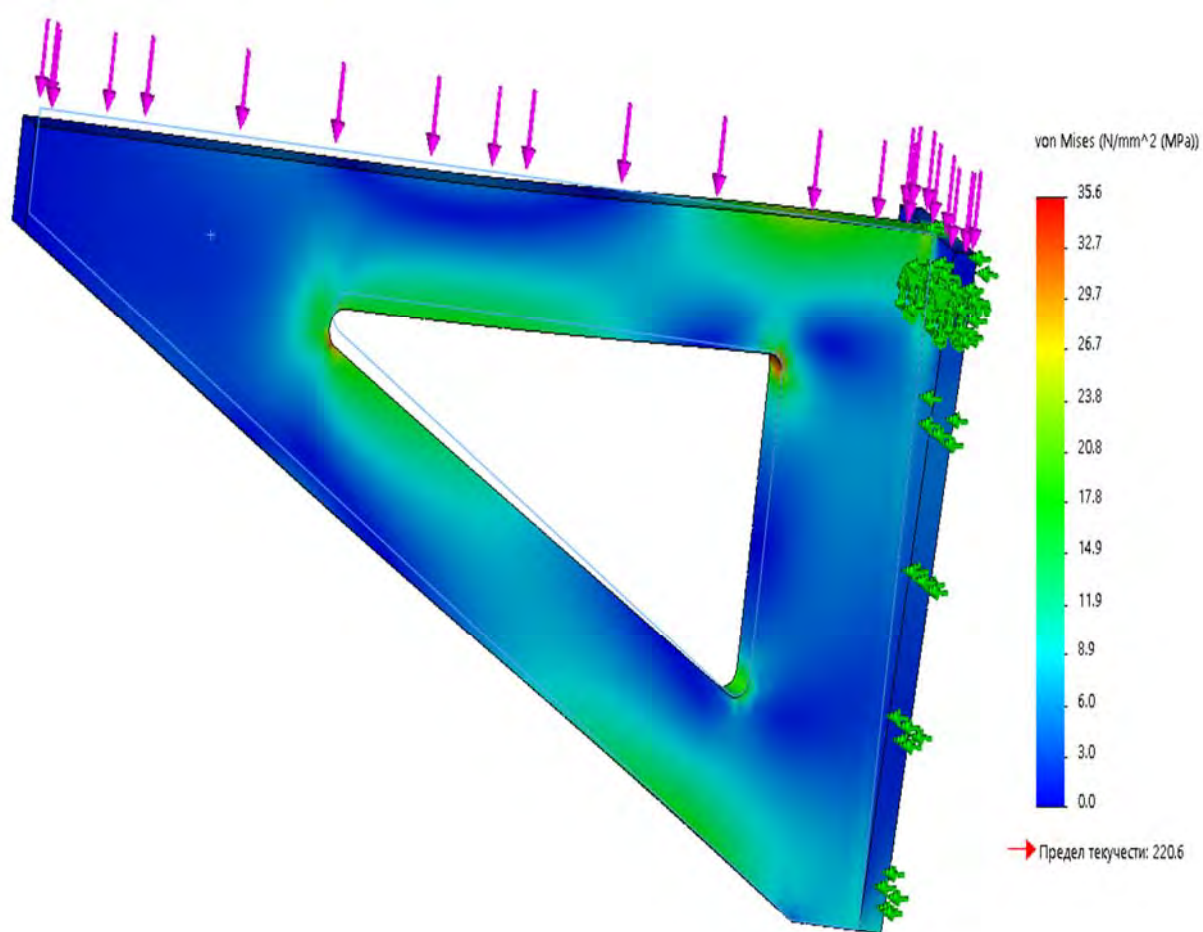


Рис. 3.223. Эпюра распределения напряжений Von Mises по поверхности консольного кронштейна с внутренней полостью

Для проведения в дальнейшем оптимизации переходим к новому исследованию (рис. 3.224). Следуя процедуре параметрической оптимизации, устанавливаются *Параметры исследования проектирования* (рис. 3.225).

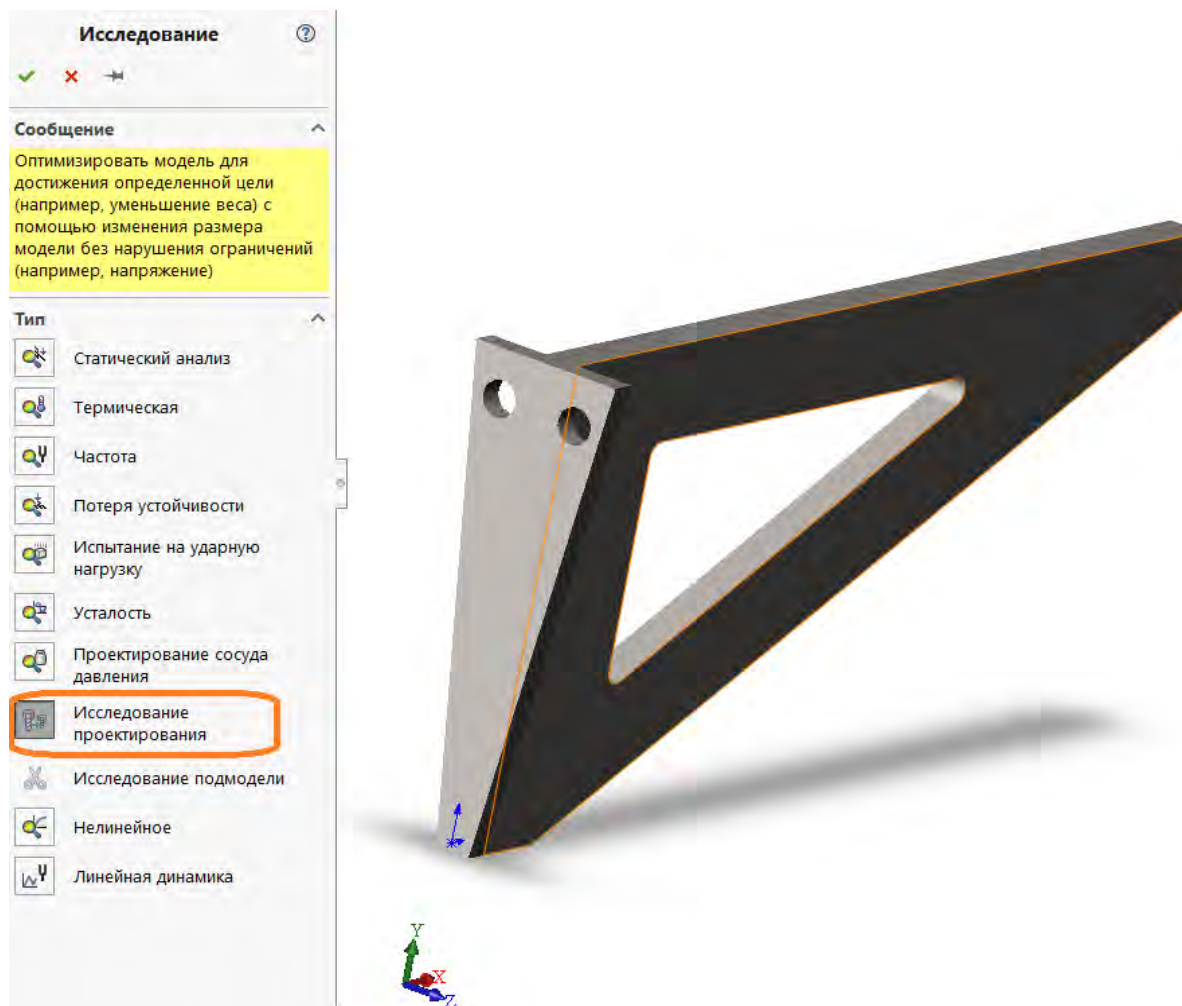


Рис. 3.224. Переход к новому исследованию – *Исследованию проектирования*

Проведение оптимизационных мероприятий осуществлялось на основании использования следующих исходных данных: целевой функцией являлось определение минимума материалоемкости консольного кронштейна; напряжения, возникающие в оптимизированном изделии, не должны превышать 60 МПа. Выполненная процедура оптимизации включала в себя 98 сценариев различных вариантов размеров кронштейна. В результате были установлены оптимальные размеры кронштейна (рис. 3.226).

Вес оптимизированного кронштейна составил 4,089 кг, что на 34,9 % меньше сплошного.

На рис. 3.227 приведена эпюра распределения напряжений Von Mises по поверхности оптимизированной конструкции консольного кронштейна.

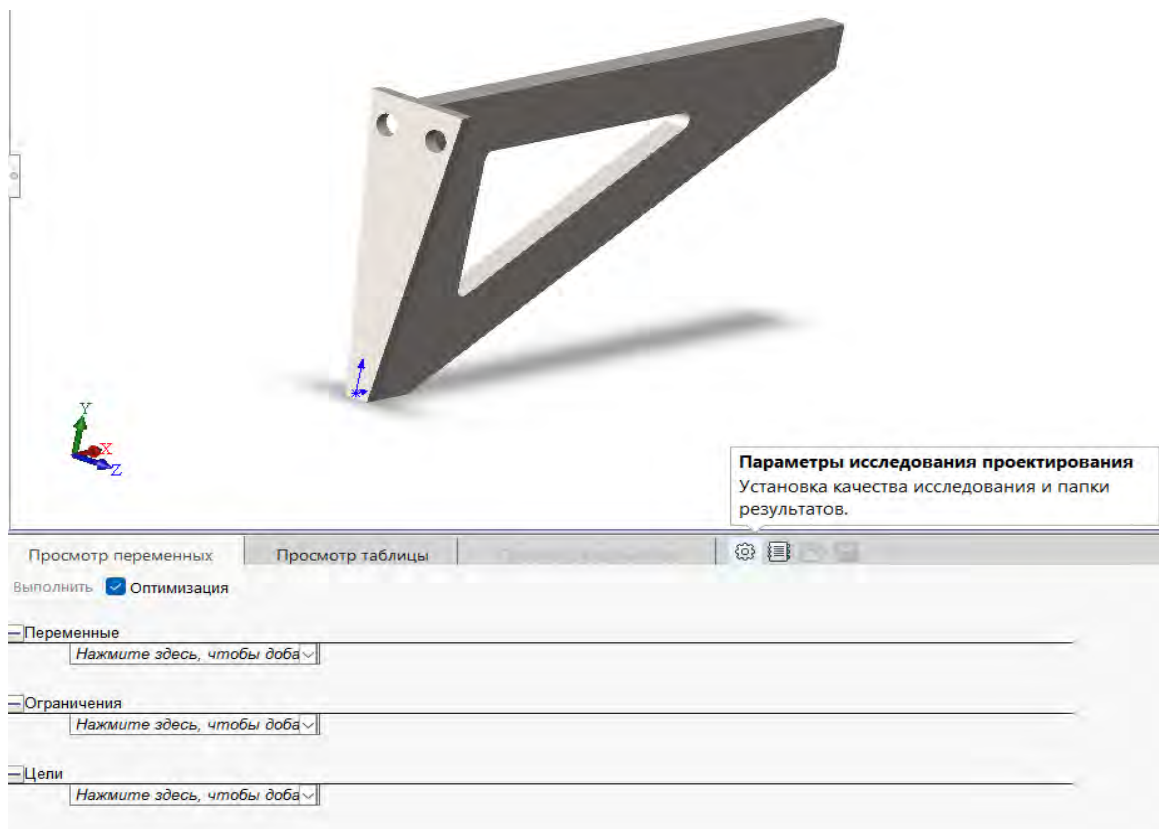
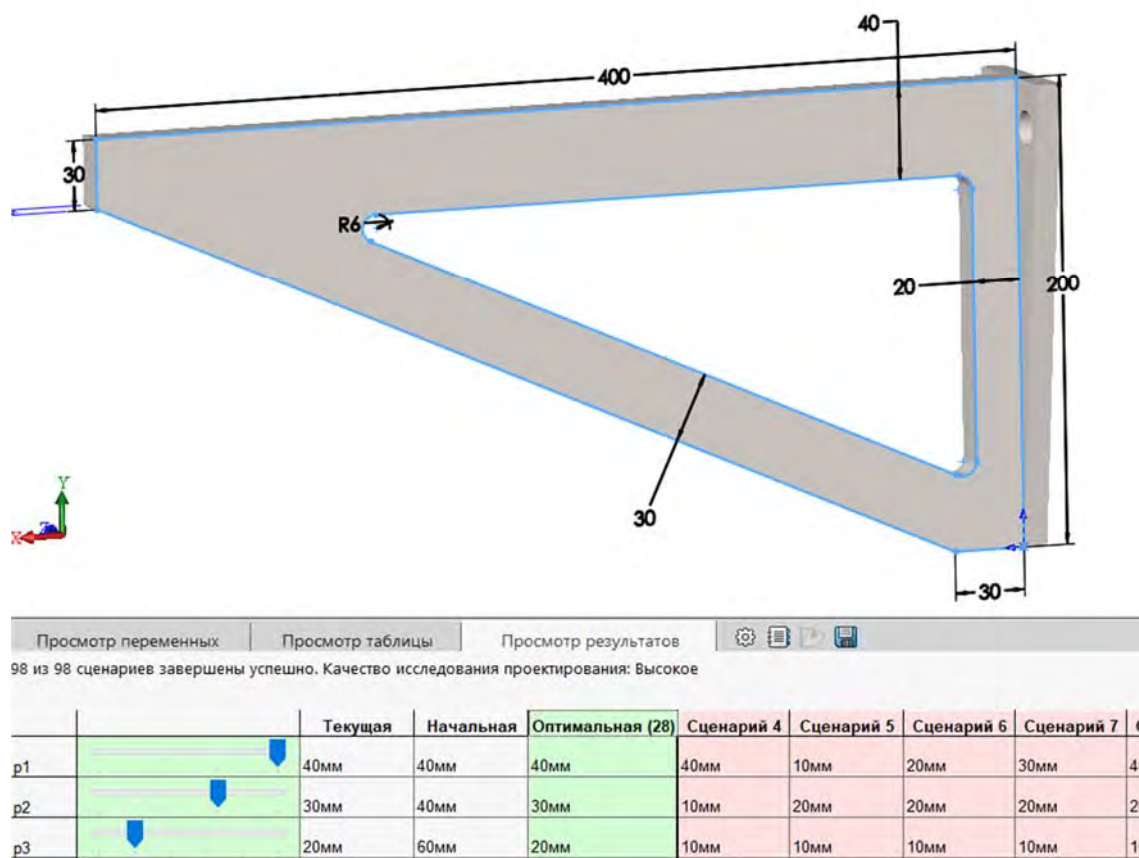
Рис. 3.225. Внешний вид экрана при проведении *Исследования проектирования*

Рис. 3.226. Оптимизированные размеры консольного кронштейна

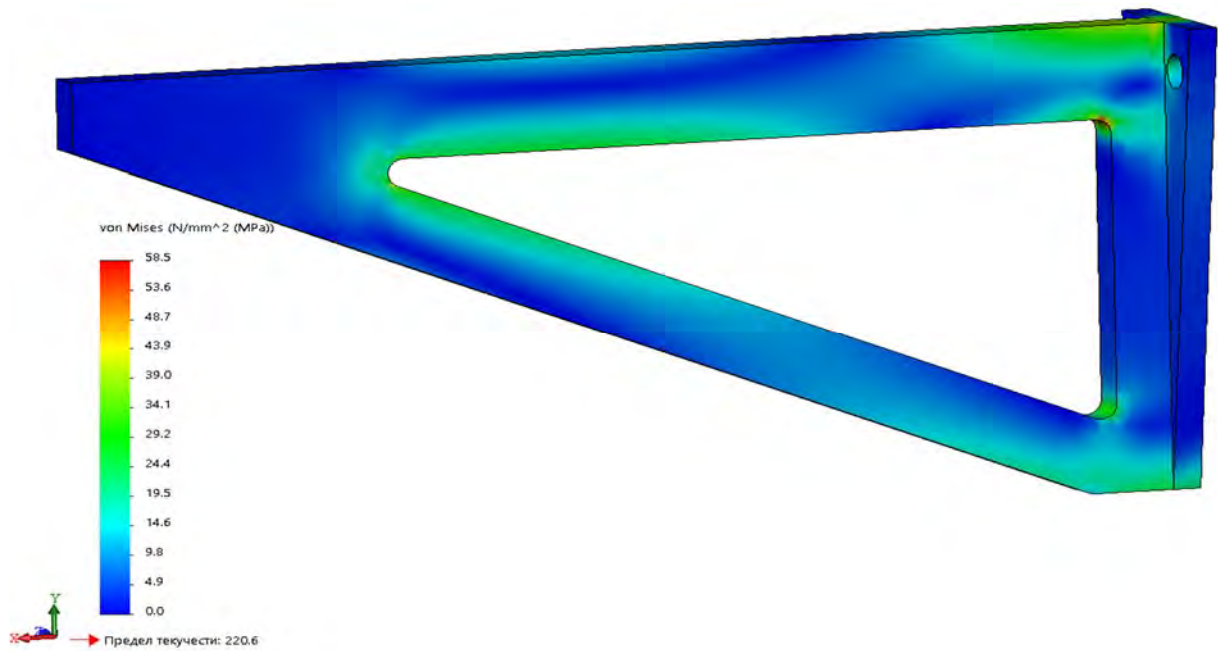


Рис. 3.227. Эпюра распределения напряжений Von Mises по поверхности оптимизированной конструкции консольного кронштейна

Как видно из приведенной эпюры (см. рис. 3.227), напряжения в изделии не превышают 58,5 МПа и, следовательно, с позиций требований прочности изделие может быть использовано на практике.

На рис. 3.228 приведена твердотельная модель консольной опоры электродвигателя с учетом произведенных усовершенствований.

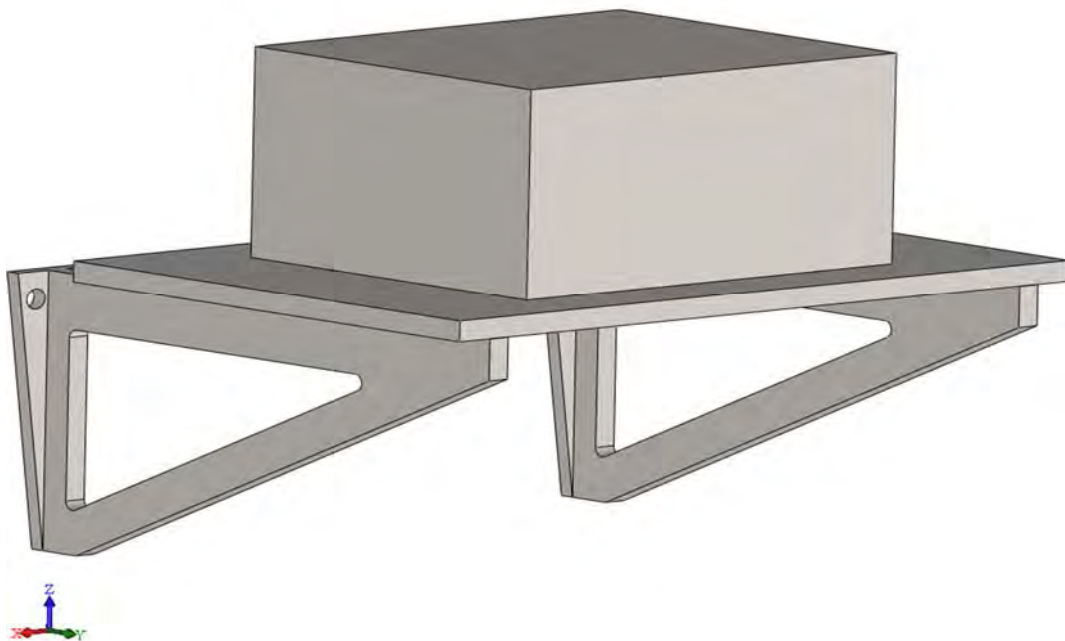


Рис. 3.228. Твердотельная модель консольной опоры электродвигателя с учетом произведенных усовершенствований

Проверим теперь, каким образом произведенные усовершенствования отразились на напряженно-деформированном состоянии сборки в целом. На рис. 3.229 приведена конечно-элементная модель модифицированной консольной опоры электродвигателя.

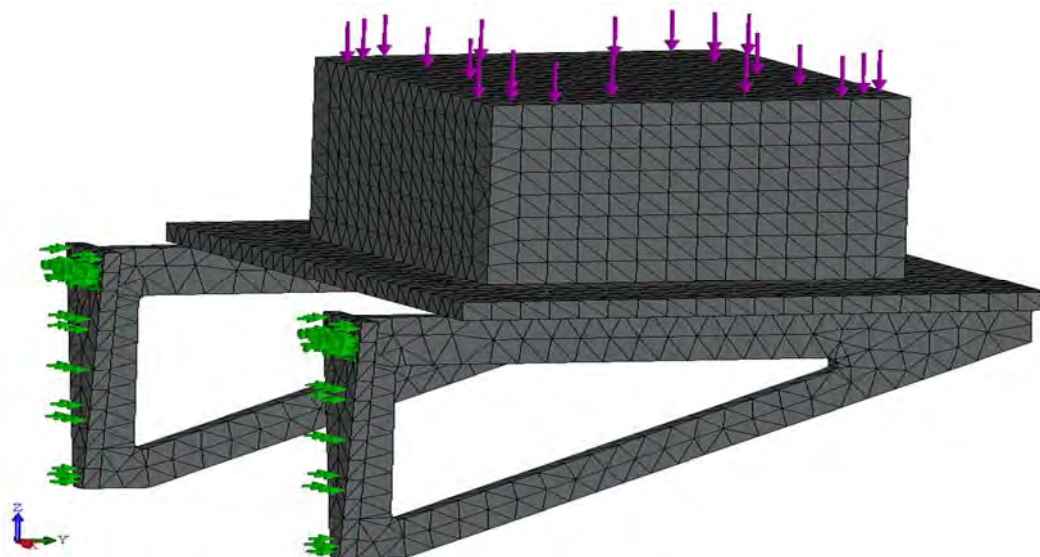


Рис. 3.229. Конечно-элементная модель модифицированной консольной опоры электродвигателя

На рис. 3.230 приведена эпюра напряжений Von Mises новой конструкции под нагрузкой.

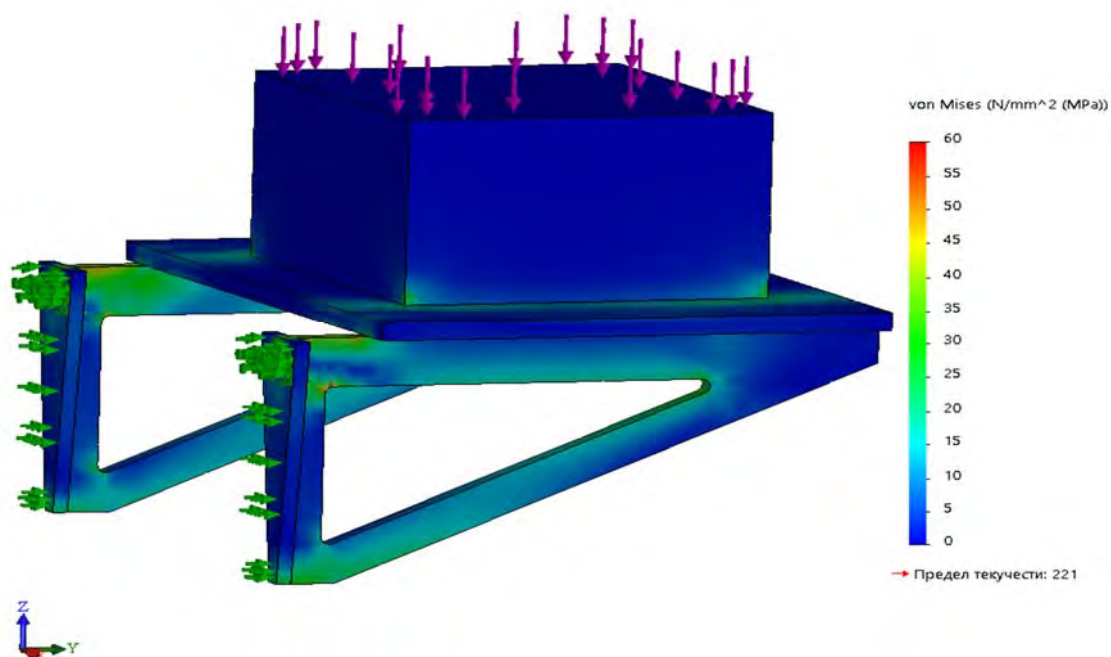


Рис. 3.230. Эпюра распределения напряжений по поверхности новой конструкции консольной опоры электродвигателя

Как видно из сопоставления рис. 3.227 и 3.230, величина действующих напряжений изменилась незначительно, и данная модель (см. рис. 3.229) может быть использована для проведения следующих видов имитационного моделирования.

Жесткостные свойства разрабатываемой конструкции в целом также удовлетворяют предъявляемым требованиям (рис. 3.231), максимальные перемещения конструкции в вертикальном направлении не превышают 0,15 мм.

Дальнейший имитационный анализ в среде SolidWorks Simulation будет осуществлен для определения собственных частот и форм колебаний, устойчивости элементов конструкции и выявления характеристик усталостной прочности изделия.

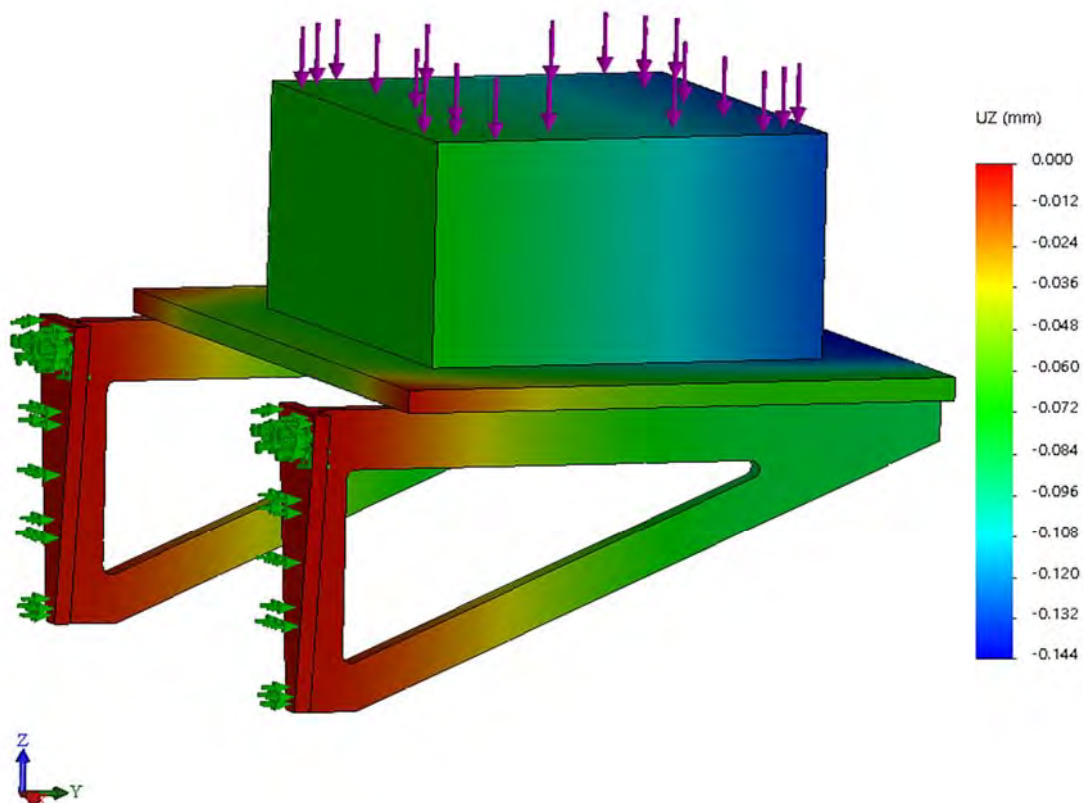


Рис. 3.231. Эпюра распределения перемещений конструкции в вертикальном направлении

### ***3.11.5. Определение собственных частот и форм колебаний объекта исследований***

Изделие состоит из двух кронштейнов, опорной плиты, расположенной на поверхности кронштейнов, а также электродвигателя, эксплуатирующегося с частотой  $n = 5000$  об/мин вала. При наличии неуравновешенных масс, зафиксированных на валу данного электродвигателя, он может

производить воздействие в виде возмущающей силы, циклически изменяющейся во времени. Это воздействие может оказывать негативное влияние на усталостную прочность изделия. Кроме того, при совпадении собственных частот конструкции с частотой вращения вала возможно возникновение резонансных явлений, в результате которых резко возрастают амплитуда колебаний системы (см. рис. 3.83) и действующие напряжения. Данные напряжения могут привести к преждевременному выходу оборудования из строя.

При проведении частотного анализа в SolidWorks Simulation необходимо запустить новое исследование *Частота* (рис. 3.232).

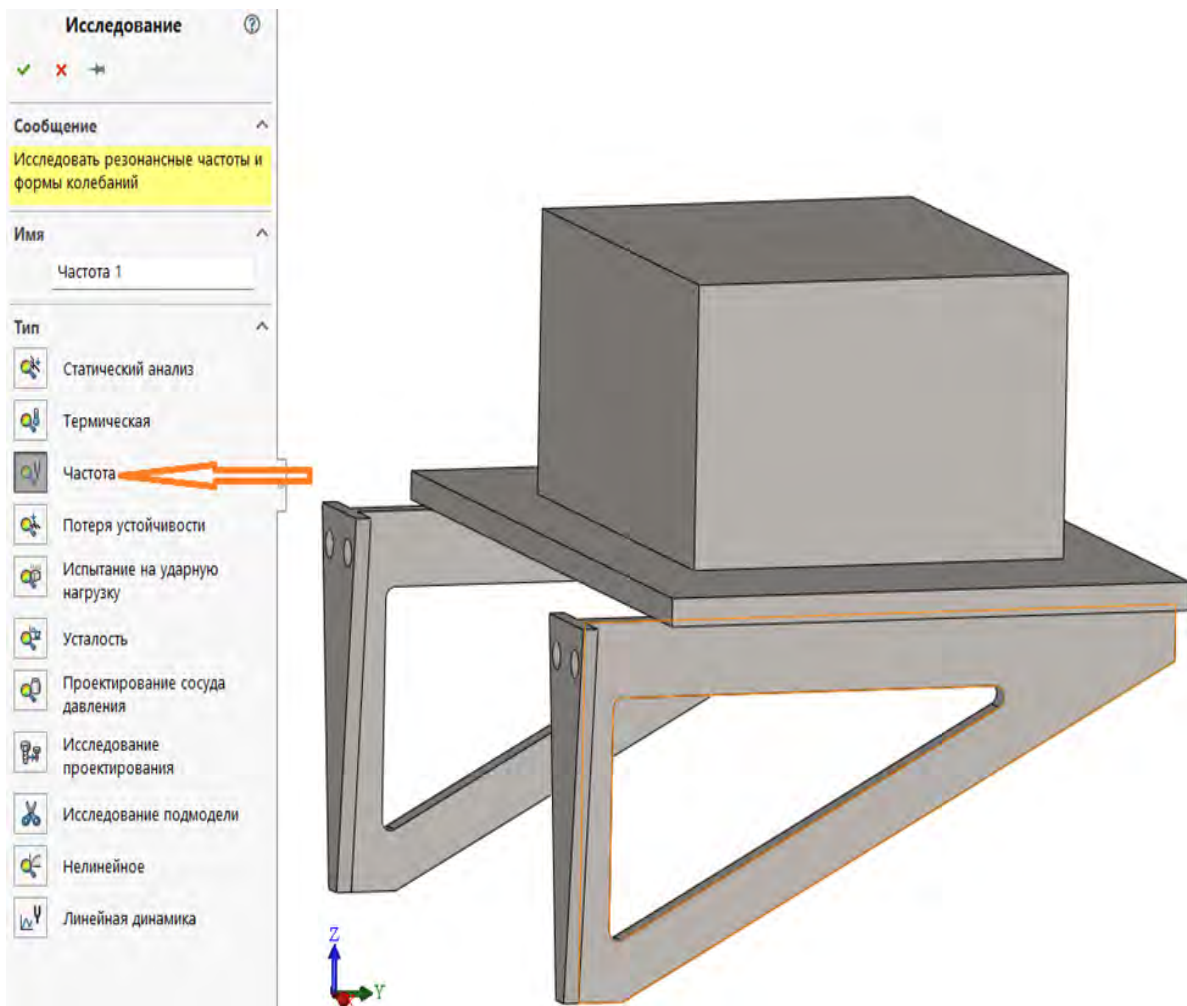


Рис. 3.232. Запуск нового исследования *Частота* в SolidWorks Simulation

Для определения собственных частот анализируемого объекта в разделе *Свойства* и подразделе *решающая программа* выбираем программу *Direct sparse*, либо устанавливаем параметр *автоматический выбор решающей программы* (рис. 3.233). Кроме того, в подразделе *параметры* (см. рис. 3.233) необходимо указать, какое количество собственных частот предполагается определить.

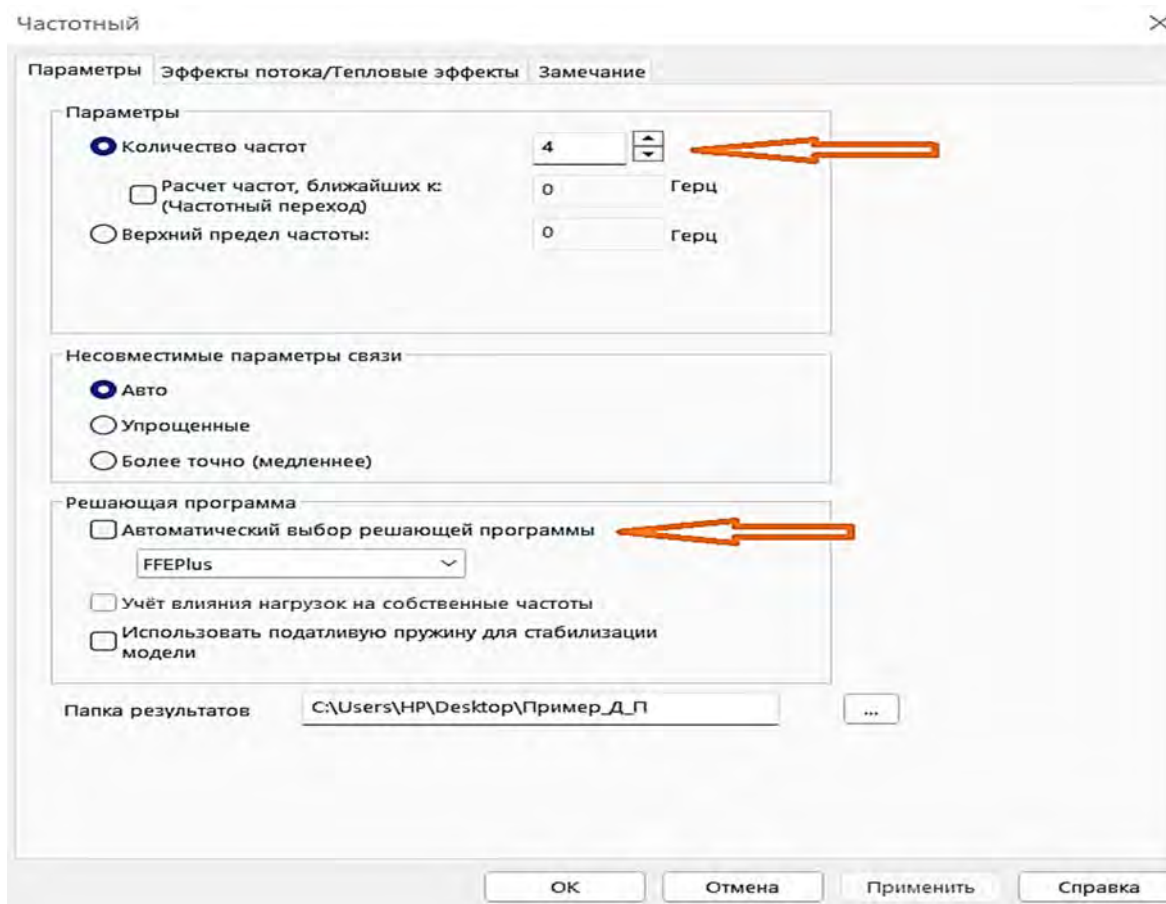


Рис. 3.233. Задание свойств частотного анализа

Следует отметить, что наибольший вклад в потенциальную энергию упругого деформирования вносят формы колебаний с наиболее низкими частотами. Этим формам соответствуют большие амплитуды, а следовательно, и большие напряжения и деформации. Поэтому в практике конечно-элементного анализа, как правило, ограничиваются тремя-пятью наиболее низкими частотами.

В дальнейшем процедура определения собственных частот и форм колебаний в SolidWorks Simulation носит стандартный характер – задание условий закрепления и нагружения, генерация сетки разбиения анализируемого изделия на конечные элементы. После выполнения этой процедуры запускается разрешающая программа *Выполнить*.

В результате выполнения данного расчета была сформирована база данных по определению четырех частот и форм колебаний (рис. 3.234).

На рис. 3.235–3.238 приведены формы и частоты соответствующих колебаний.

Как видно из рис. 3.235, первая собственная частота равна 136,9 Гц, а форма колебаний представлена эпюрой РЕЗАМП (результатирующая амплитуда колебаний).

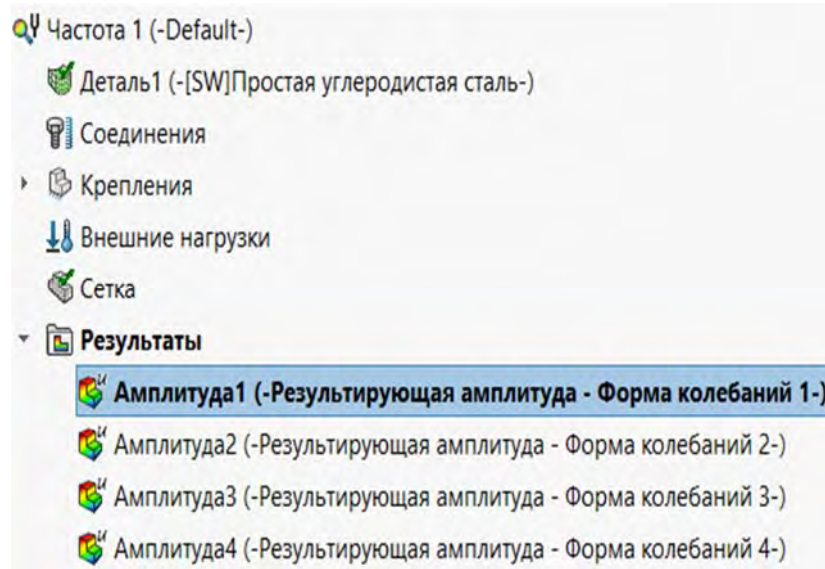


Рис. 3.234. Четыре собственные частоты и соответствующие им формы колебаний, занесенные в базу данных SolidWorks Simulation

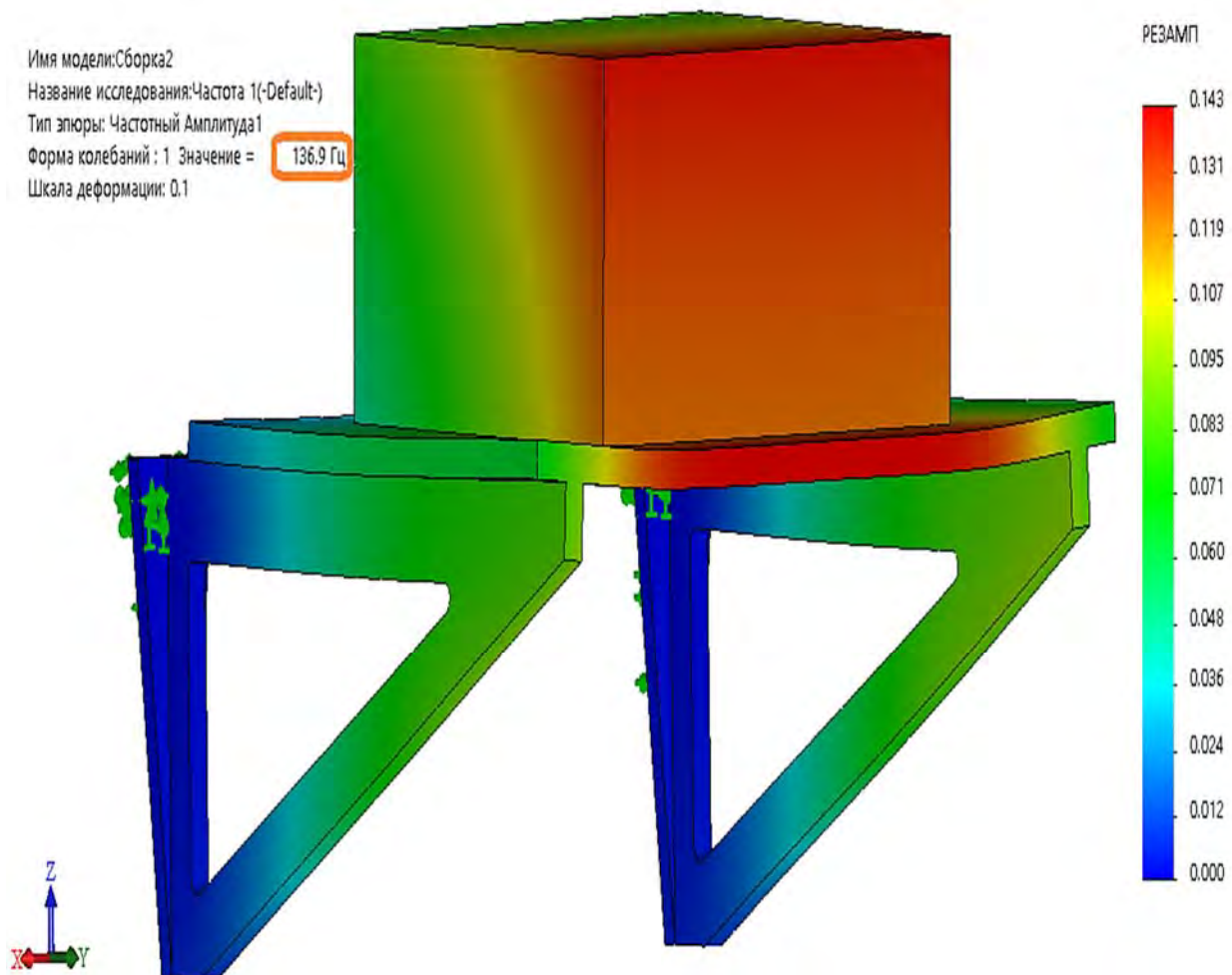


Рис. 3.235. Первая собственная частота и эпюра формы собственных колебаний

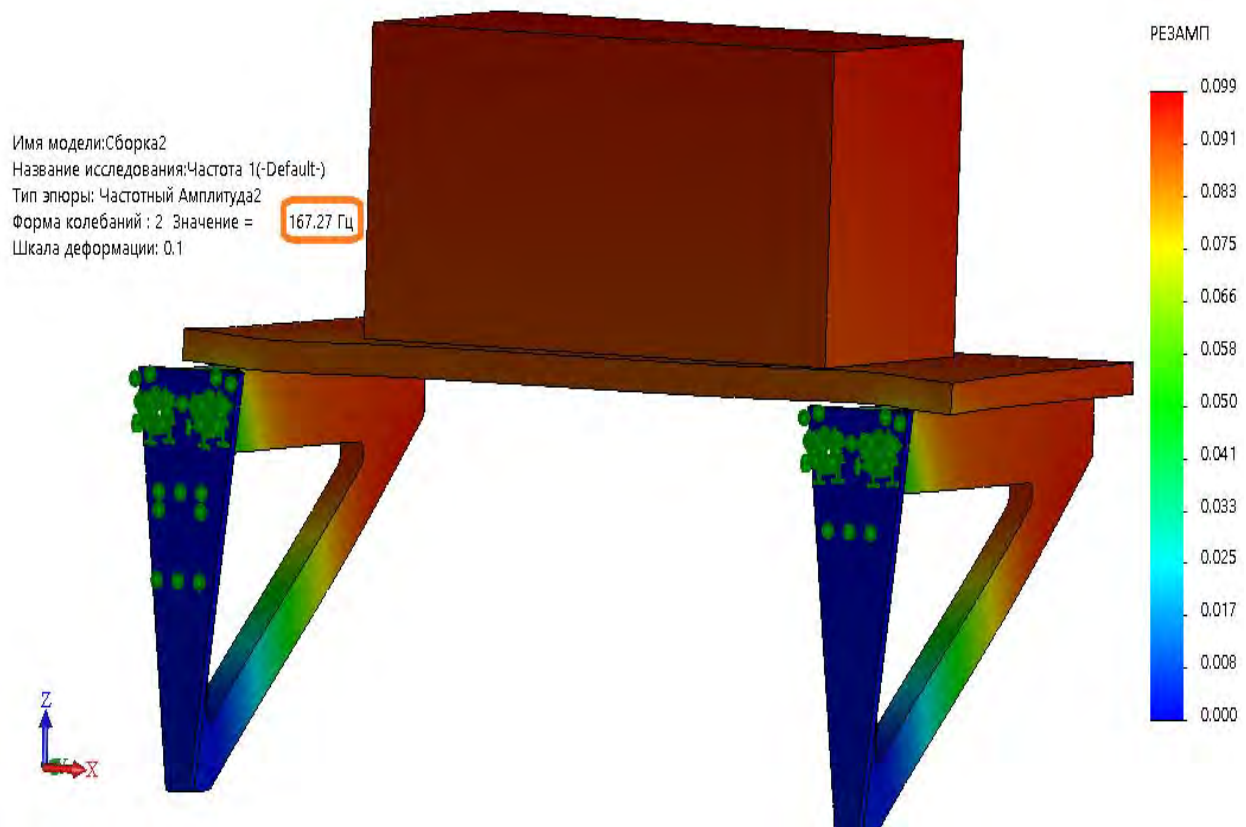


Рис. 3.236. Вторая собственная частота и форма колебаний консольной опоры электродвигателя

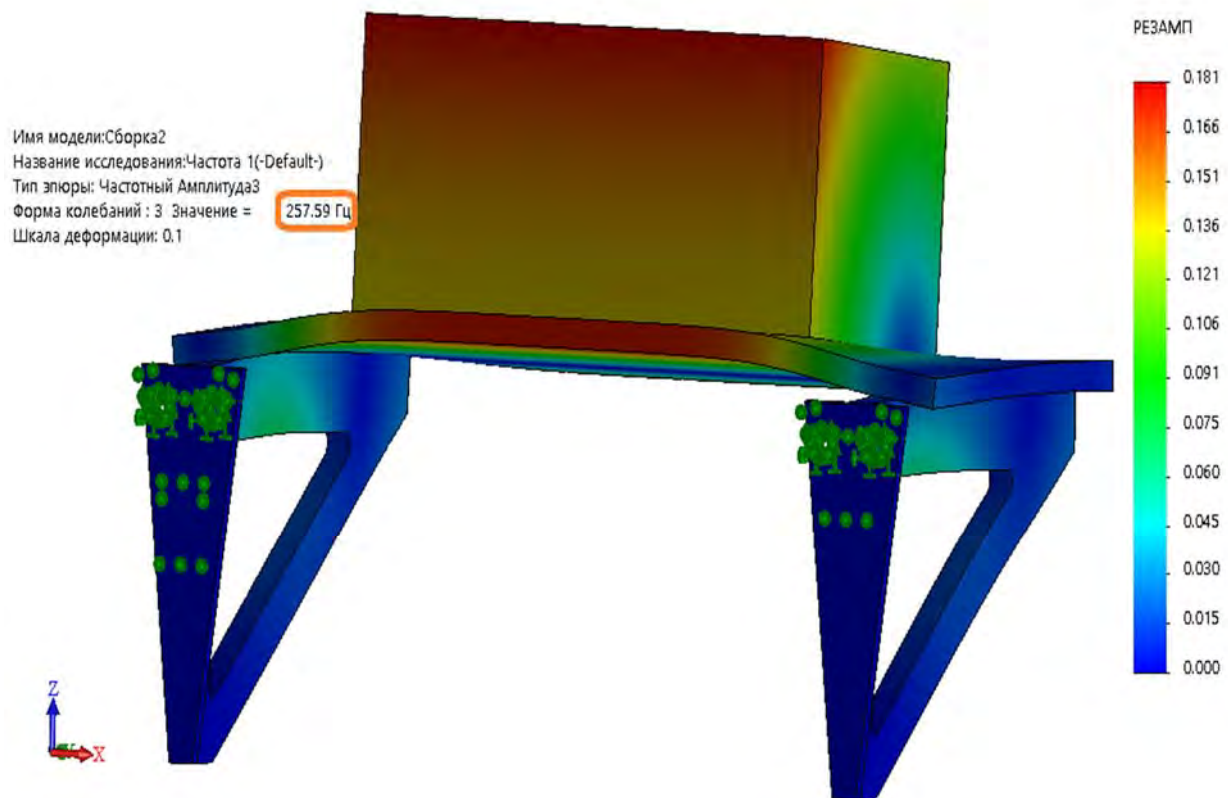


Рис. 3.237. Третья собственная частота и форма колебаний консольной опоры электродвигателя

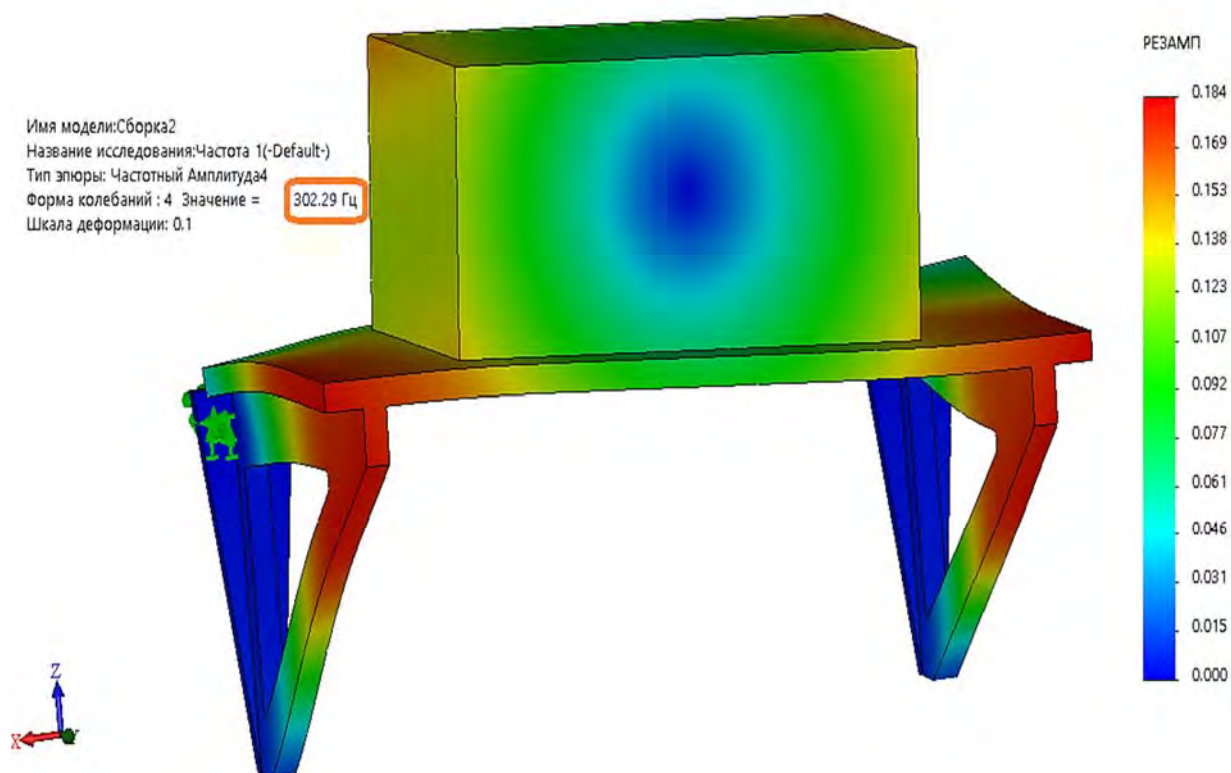


Рис. 3.238. Четвертая собственная частота и форма колебаний консольной опоры электродвигателя

Как видно из приведенных рис. 3.235–3.238, первые собственные частоты колебаний консольной опоры вместе с электродвигателем составляют 136,9; 167,27; 257,59 и 302,29 Гц соответственно, что существенно выше, чем частота (83,33 Гц) воздействия от неуравновешенных масс электродвигателя и зафиксированного на нем оборудования. Это обстоятельство исключает вероятность возникновения резонансных явлений в анализируемой системе.

### ***3.11.6. Проверка консольной опоры электродвигателя на устойчивость***

В результате коррекции конструкции консольного кронштейна посредством использования параметрической оптимизации жесткостные характеристики его претерпели существенное изменение. Такой фрагмент, как нижний раскос, испытывает существенные сжимающие нагрузки, поэтому в дополнение к уже проведенным анализам необходимо еще выполнить имитационное моделирование на устойчивость. Здесь следует отметить, что устойчивость является одним из основных параметров, характеризующих работоспособность анализируемого объекта. Под термином «устойчивость» подразумевается способность системы находиться в

состоянии устойчивого равновесия при возникновении в ее фрагментах сжимающих напряжений. К отмеченной формулировке следует добавить, что состояние объекта называется устойчивым, если малые возмущения вызовут малые отклонения системы от расчетного (невозмущенного) состояния. Наоборот, если при малых возмущениях возникнут большие отклонения системы от расчетного состояния, то последнее является неустойчивым. На рис. 3.53 проиллюстрированы три возможных состояния системы в зависимости от величины сжимающей нагрузки – устойчивое (см. рис. 3.53, а), безразличное равновесие (см. рис. 3.53, б) и неустойчивое (см. рис. 3.53, в).

Величина нагрузки, начиная с которой состояние анализируемого объекта становится неустойчивым, называется критической.

Явление потери устойчивости свойственно фрагментам конструкций, у которых один либо два габаритных размера существенно меньше третьего. К таким объектам относятся, например: пластинки, оболочки, стойки, раскосы ферм и т. д.

Форма, которую принимает объект при потере устойчивости, называется формой потери устойчивости, а само появление новых смежных равновесных форм – бифуркацией.

В результате проведения испытания на устойчивость определяется *коэффициент запаса устойчивости*, который вычисляется по формуле

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_{зАд}},$$

где  $P_{кр}$ ,  $P_{зАд}$  – критическая и заданная нагрузки соответственно.

Для устойчивости конструкций коэффициент запаса устойчивости должен удовлетворять требованию  $n_y > 1$ .

При проведении испытания на устойчивость в SolidWorks Simulation необходимо запустить новое исследование *Потеря устойчивости* (рис. 3.239).

Для проведения расчета на устойчивость в разделе контекстного меню *Свойства* (рис. 3.240) необходимо указать количество используемых форм потери устойчивости. Как правило, первые четыре формы потери устойчивости являются наиболее информативными с точки зрения определения наименьшей критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости. Остальные параметры можно оставить *по умолчанию*.

После проведения завершающего расчета в пункте *Результаты* (см. рис. 3.240) появятся итоги численного анализа на возможную потерю устойчивости объекта (для четырех форм потери устойчивости).

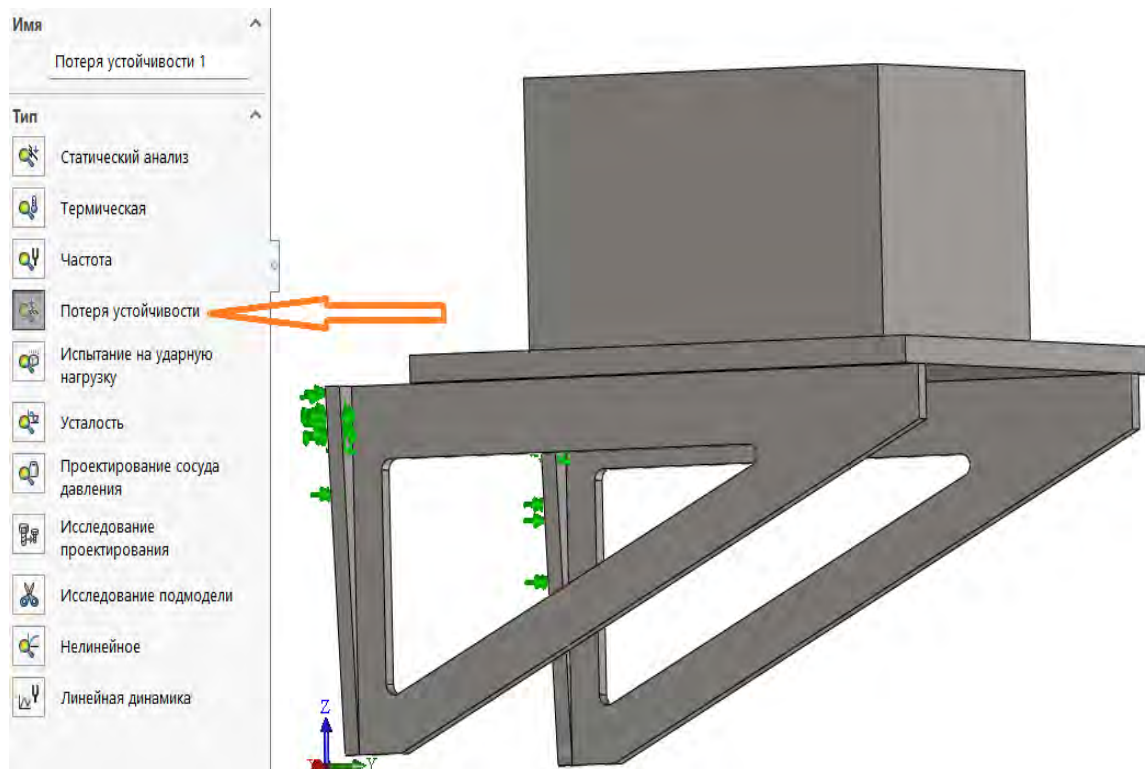


Рис. 3.239. Загрузка блока имитационного моделирования *Потеря устойчивости*

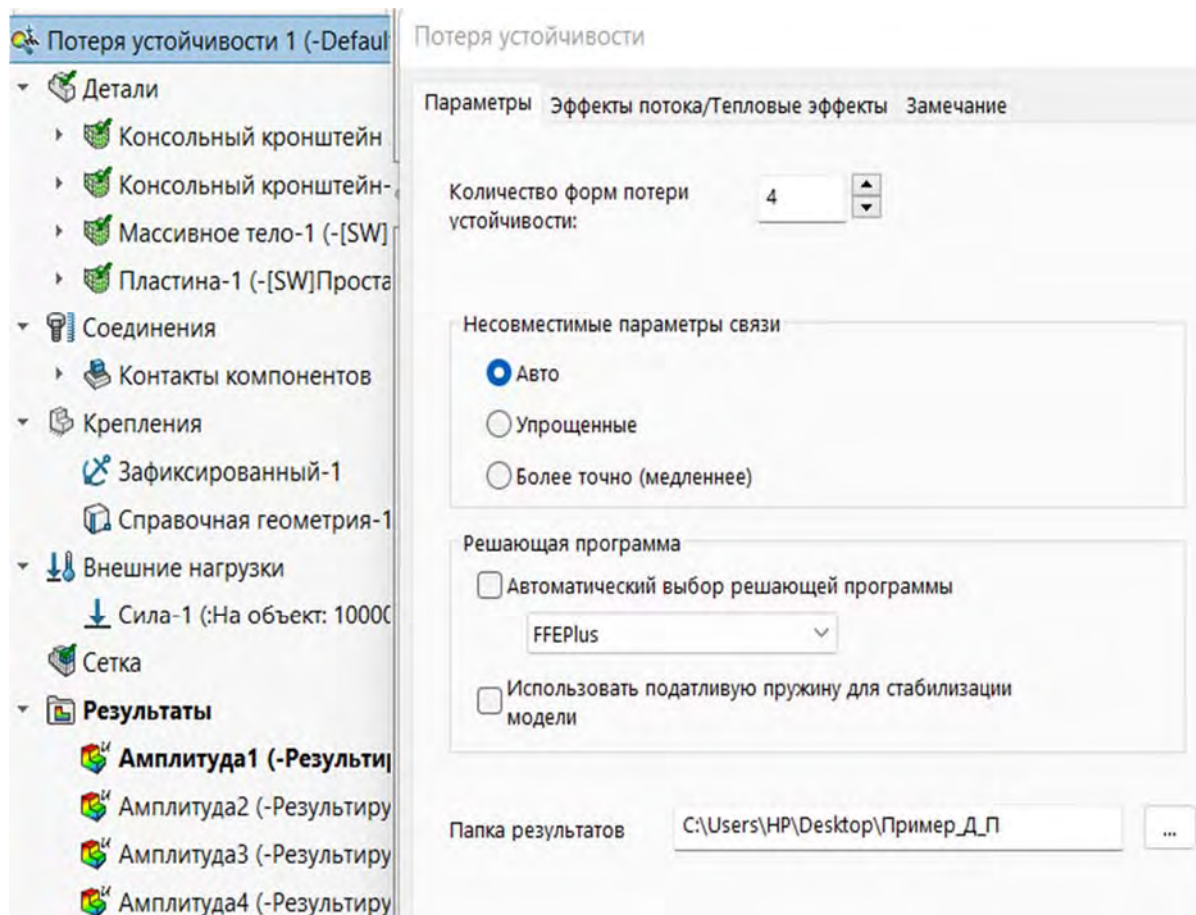


Рис. 3.240. Параметры контекстного меню *Свойства* при проведении расчетов на устойчивость

В результате раскрытия меню *Амплитуда 1* на мониторе появится картинка (рис. 3.241) с информацией о форме потери устойчивости и значении коэффициента запаса устойчивости  $n_y$  (в SolidWorks Simulation этот параметр назван *коэффициент нагрузки*). В рассматриваемом примере (см. рис. 3.241) коэффициент запаса устойчивости  $n_y = 84,401$ .

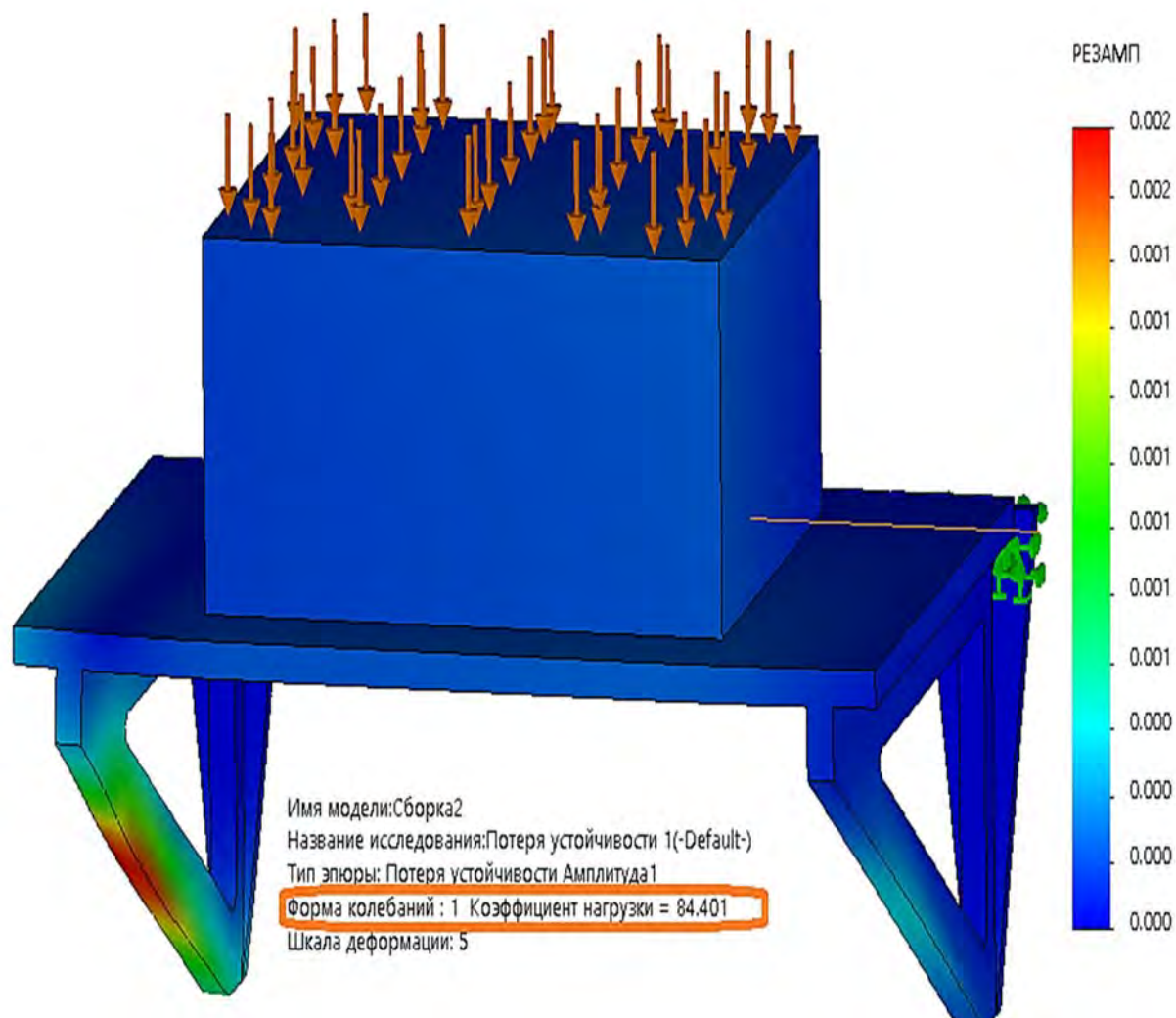


Рис. 3.241. Форма потери устойчивости и числовые значения эюры первой формы (колебаний/амплитуд РЕЗАМП)

Числовые значения эюры формы (колебаний/амплитуд РЕЗАМП) показывают относительные (безразмерные) значения амплитуд для рассматриваемой формы. Здесь параметр РЕЗАМП представляет собой результирующую амплитуду без привязки к какой-либо координатной оси.

Как видно из данных, приведенных на рис. 3.241, коэффициент запаса для этой формы потери устойчивости значительно превышает единичное значение и, следовательно, требование по устойчивости исследуемого объекта удовлетворяется. Для остальных форм потери устойчивости этот коэффициент еще больше.

### 3.11.7. Анализ усталостной прочности консольной опоры электродвигателя

В исходных данных к консольной опоре электродвигателя отмечалось, что в процессе эксплуатации изделия присутствует циклическое нагружение с коэффициентом асимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1.$$

Опыт эксплуатации различных конструкций показал, что изделия, испытывающие циклическое нагружение, могут разрушаться через определенный промежуток времени даже при напряжениях, значительно меньших предела прочности, без заметных остаточных деформаций. Это явление получило название *усталость материала*.

К сказанному можно добавить, что наиболее неблагоприятным с точки зрения усталостной прочности при прочих равных условиях является симметричный цикл нагружения ( $r = -1$ ).

Для проведения последующего усталостного испытания в качестве входного параметра используется выходной параметр статического анализа в виде одного из трех интегральных показателей – эпюры напряжений Von Mises, эпюры первого главного напряжения, интенсивности напряжений INT.

Следующим шагом выполнения усталостного анализа является непосредственно запуск программы усталостных испытаний (рис. 3.242).

После запуска исследования *Simulation Усталость* на экране монитора появится следующее дерево исследования (рис. 3.243).

В результате активации позиции *Усталость 1* (см. рис. 3.243) и в последующем позиции *Свойства* появилось всплывающее меню, в котором указаны параметры усталостного моделирования (рис. 3.244).

Последующие действия в проведении усталостного анализа состояли в активации раздела дерева исследований (PropertyManager) *Нагрузка* (см. рис. 3.243) и заполнении во всплывающем меню следующих исходных данных (рис. 3.245):

- количество циклов нагружения изделия;
- значение коэффициента асимметрии цикла нагружения изделия;
- присоединяемый к усталостному исследованию статический анализ.

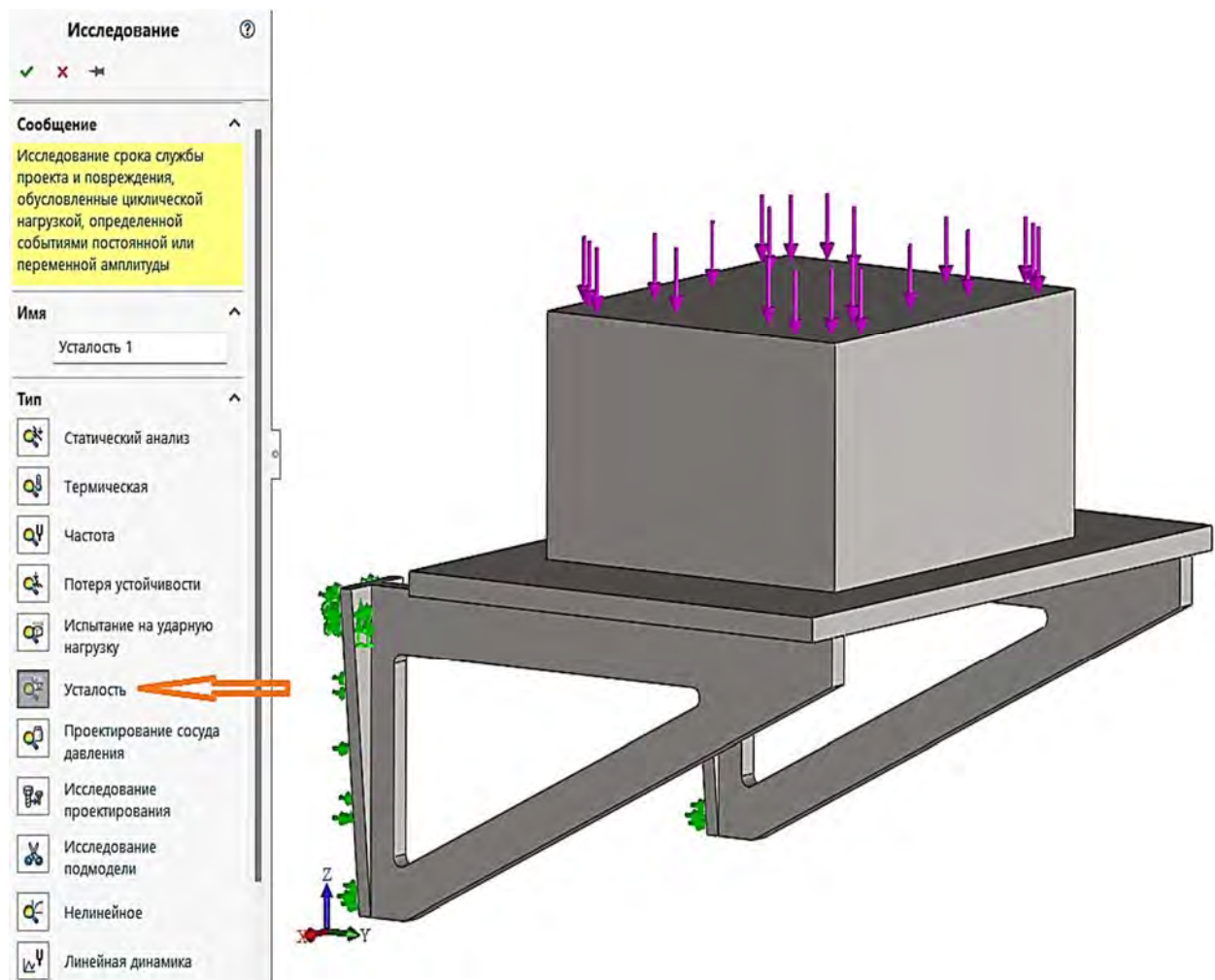
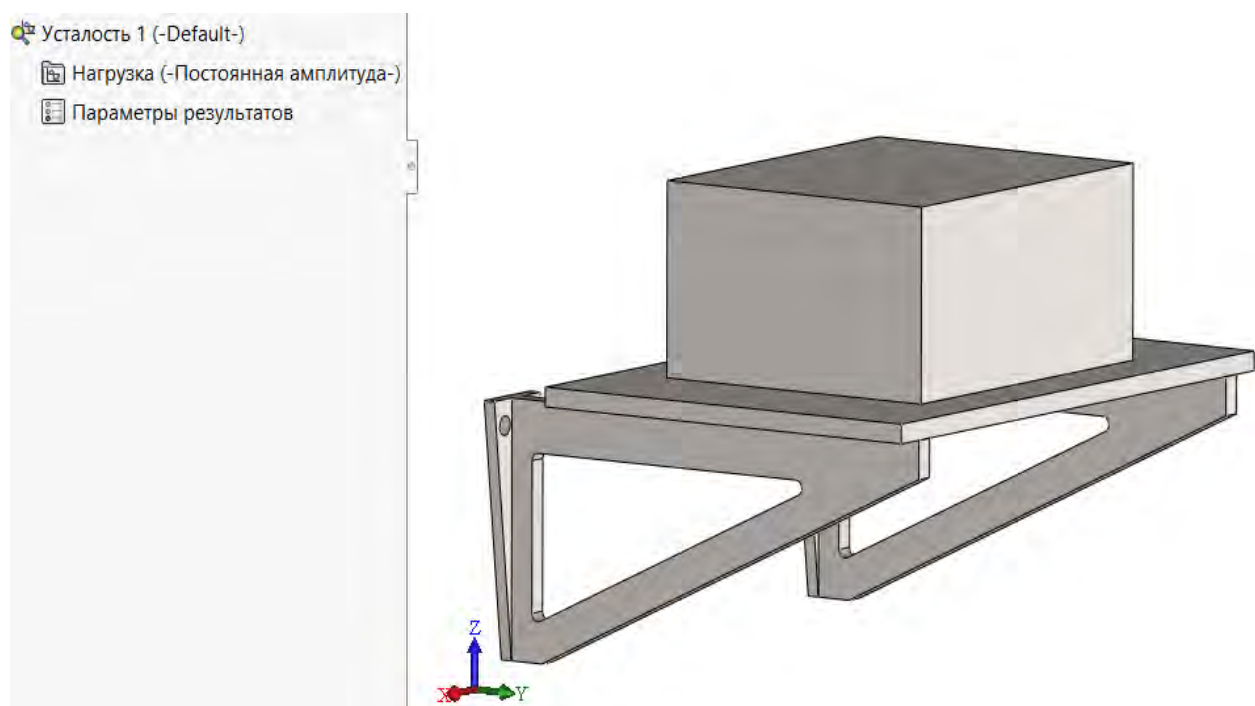


Рис. 3.242. Запуск программы усталостных испытаний

Рис. 3.243. Пункты всплывающего меню *Усталость 1*

Параметры    Замечание

Постоянная взаимосвязь событий амплитуд

☒ Случайная взаимосвязь  
☐ Без взаимосвязи

Вычисление альт. напряжения, используя

☐ Интенсивность напряжения (P1-P3)  
☒ Эквивалентное напряжение (von Mises)  
☐ Макс. абсолютное главное (P1)

Грань оболочки

☒ Сверху  
☐ Снизу

Коррекция среднего напряжения

☒ Нет  
☐ Гудмен  
☐ Гербер  
☐ Содерберг

Коэффициент местной концентрации напряжений (Kf)

☐ Неограниченный срок службы  циклы

Папка результатов  ...

OK    Отмена    Применить    Справка

Рис. 3.244. Параметры проводимого усталостного исследования

Нагрузка

количество циклов нагружения изделия

коэффициент асимметрии цикла  $r$

| Номер | Исследование         | Масштаб | Шаг |
|-------|----------------------|---------|-----|
| 1     | Статический анализ 1 |         |     |

присоединение исследований

Рис. 3.245. Необходимая информация для проведения усталостных исследований

Как видно из рис. 3.245, рассматриваемое изделие предполагается эксплуатировать при базовом числе циклов  $N = 100000000$  и коэффициенте асимметрии цикла  $r = -1$  с присоединением к усталостным испытаниям *Статического анализа 1*.

Для усталостного анализа изделия также необходимы данные об усталостных испытаниях образцов, изготовленных из материала изделия,

т. е. сведения о кривой Веллера (кривой SN). Данная информация вносится в базу данных проводимого анализа следующим образом. Щелкнув правой клавишей мыши по дереву исследований (рис. 3.246) и затем в месте *Применить данные усталости ко всем деталям*, переходим непосредственно к формированию данных для построения кривой SN (рис. 3.247).

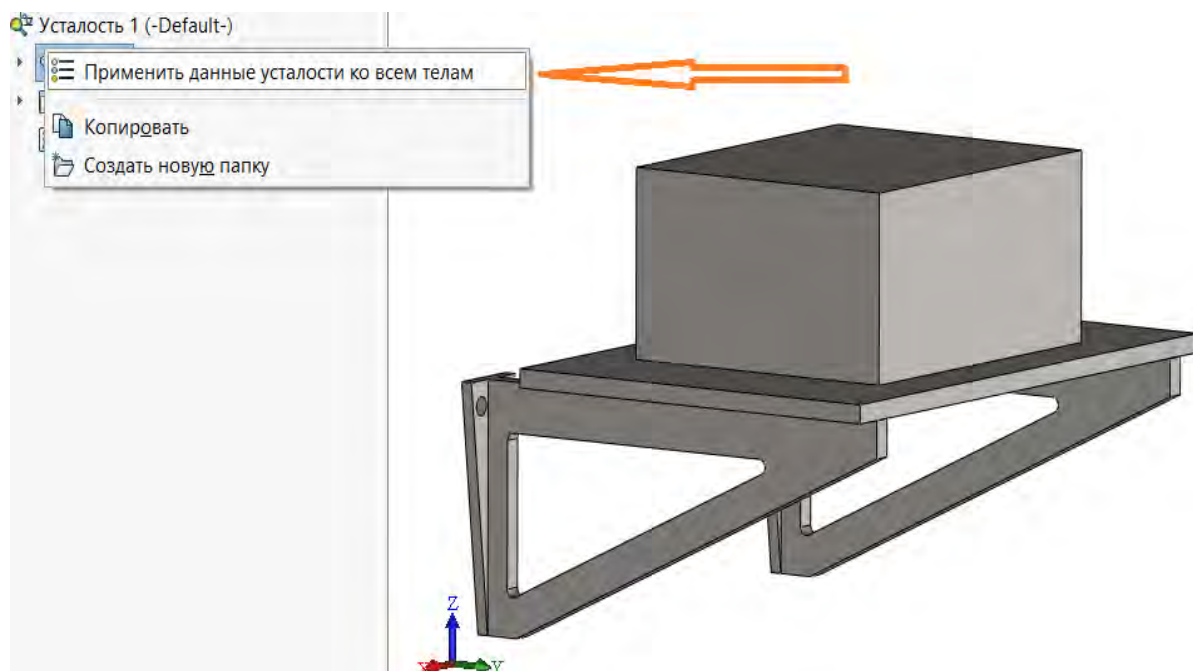


Рис. 3.246. Последовательность действий для ввода данных об усталостной кривой

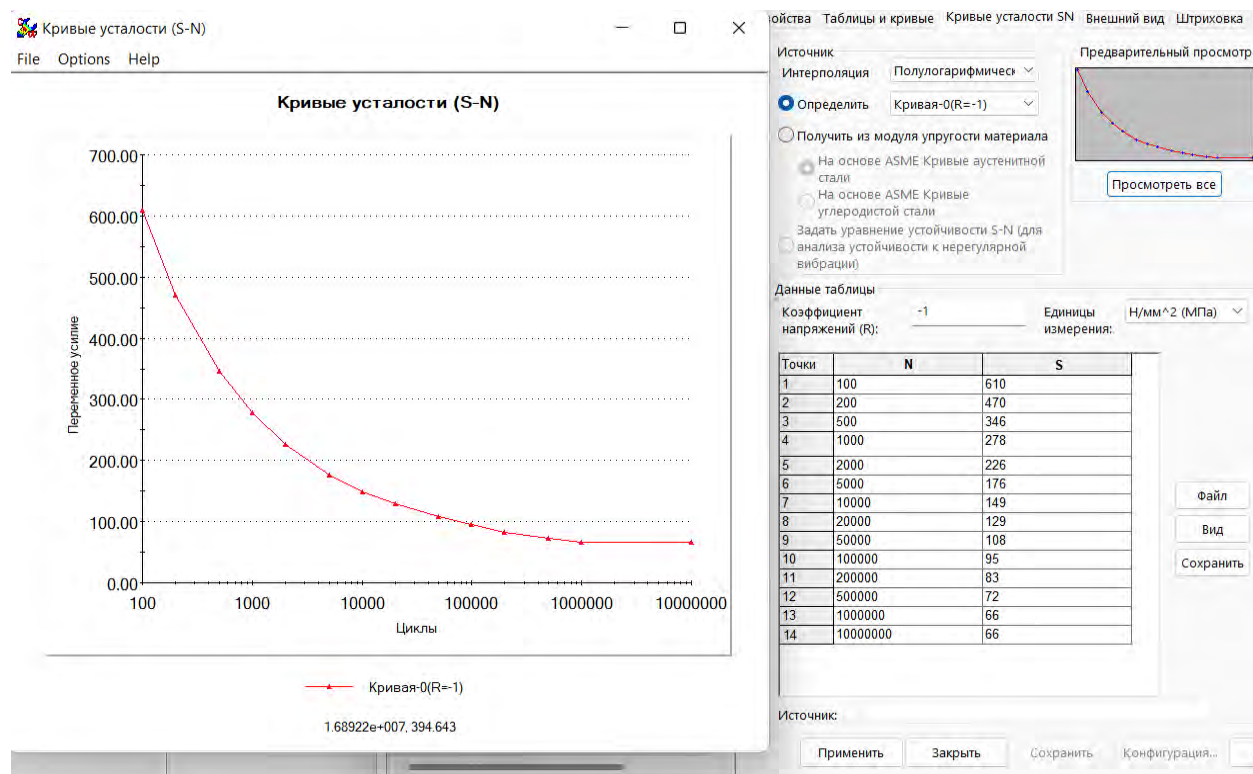


Рис. 3.247. Формирование кривой SN (кривой Веллера)

После выполнения этих действий дерево исследований стало выглядеть, как показано на рис. 3.248.

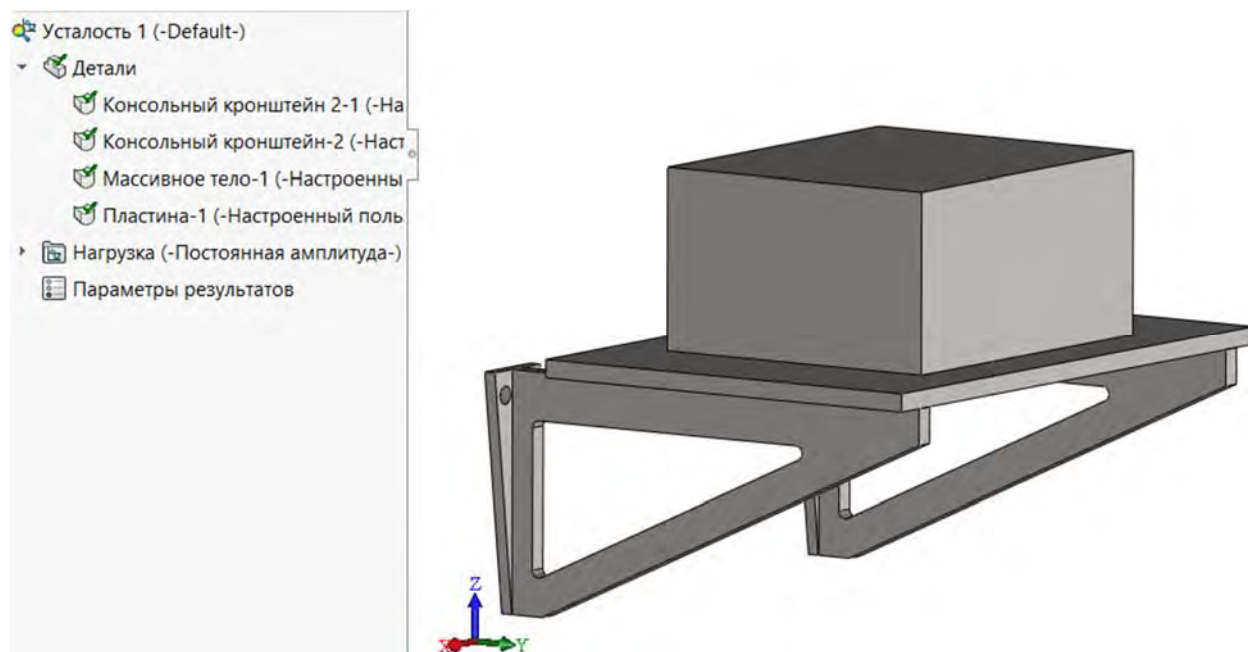


Рис. 3.248. Вид дерева исследований после ввода данных усталостных испытаний образцов

Теперь можно непосредственно перейти к исследованию усталостной прочности рассматриваемого изделия.

После команды *Выполнить* дерево исследований приняло вид, приведенный на рис. 3.249.

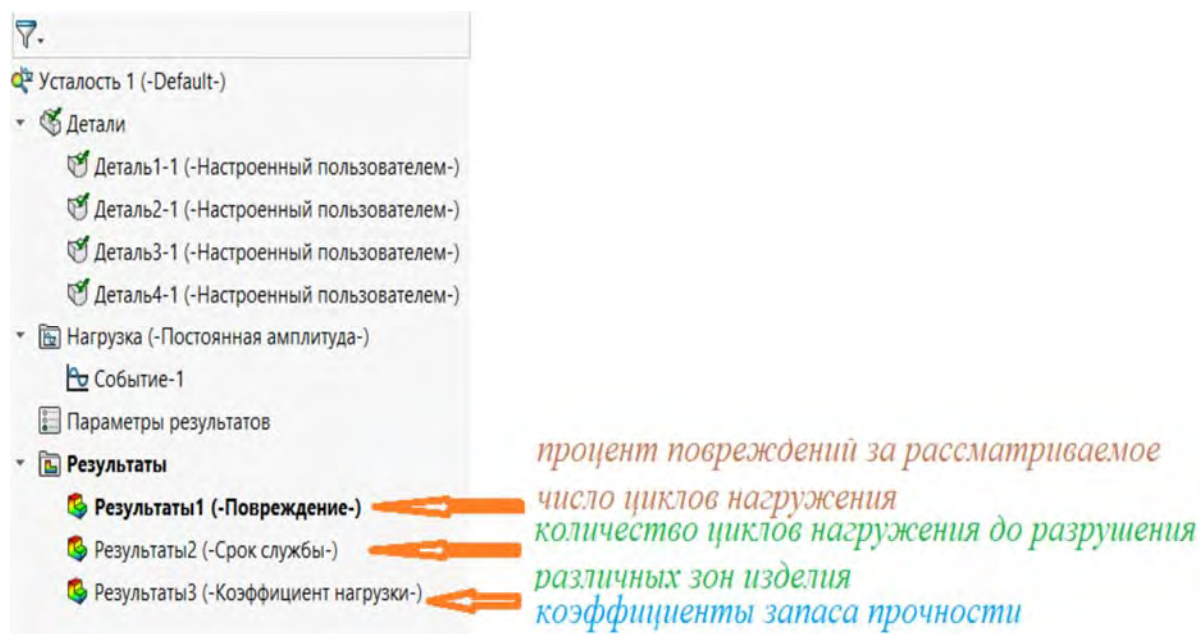


Рис. 3.249. Вид дерева исследований после проведения анализа на усталость

Как видно (см. рис. 3.249), дерево исследований уже содержит результаты проведенного анализа. В частности, *Результаты 3* включают в себя эпюру запасов прочности различных зон анализируемого изделия (рис. 3.250) за рассматриваемое число циклов нагружения (10000000 циклов).

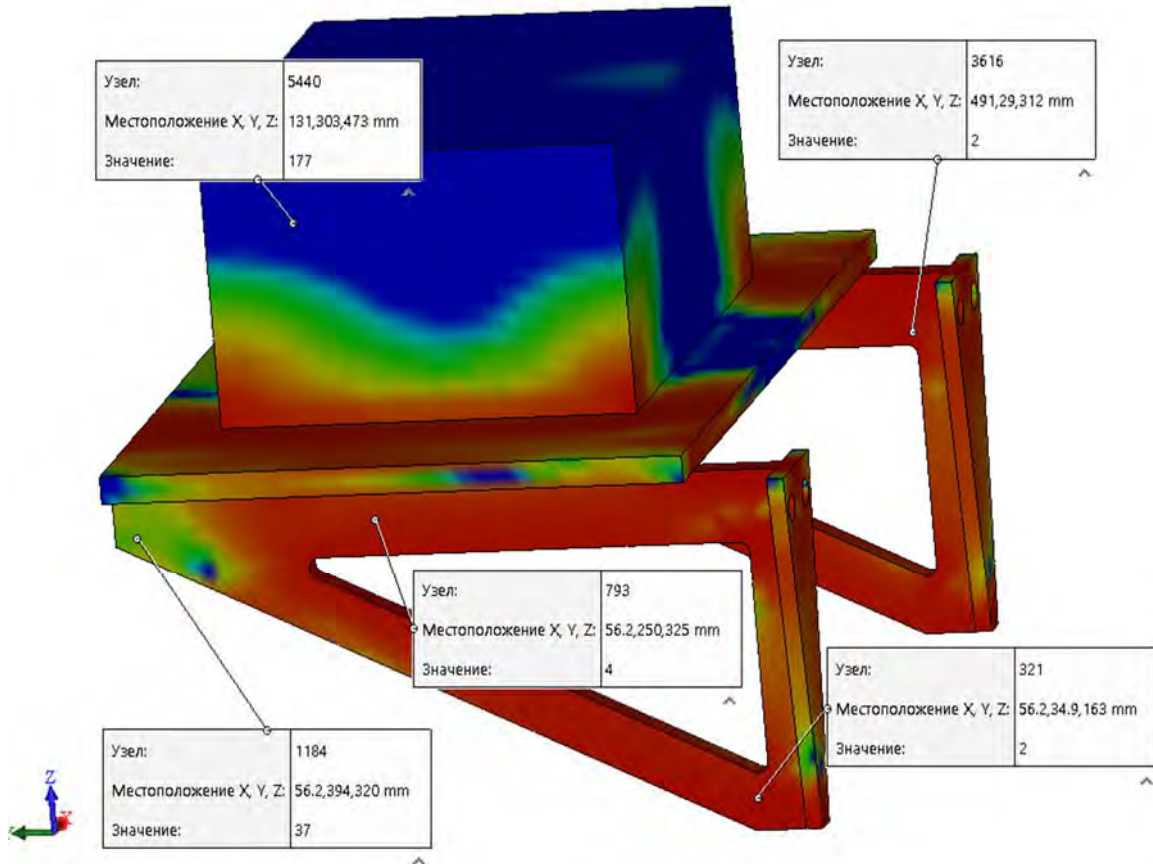


Рис. 3.250. Эпюра запасов прочности различных зон анализируемого изделия за рассматриваемое число циклов нагружения

Кроме того, на рис. 3.250 приведены коэффициенты запасов прочности конкретных точек рассматриваемого объекта. Эти данные получены посредством использования операции *Зондирование*.

С помощью использования раздела *Результаты 2* была получена эпюра (рис. 3.251), отображающая число циклов нагружения до разрушения различных зон изделия или окончания эксплуатации.

На рис. 3.252 представлена эпюра процентов повреждения различных зон изделия от действия заданной нагрузки за указанный срок. Эта информация содержится в разделе *Результаты 1*.

Кроме того, на рис. 3.252 приведены проценты повреждения различных зон консольной опоры электродвигателя, полученные зондированием.

Как видно из рис. 3.252, в зонах зондирования повреждения превышают 100 % и, следовательно, нуждаются в местном усилении.

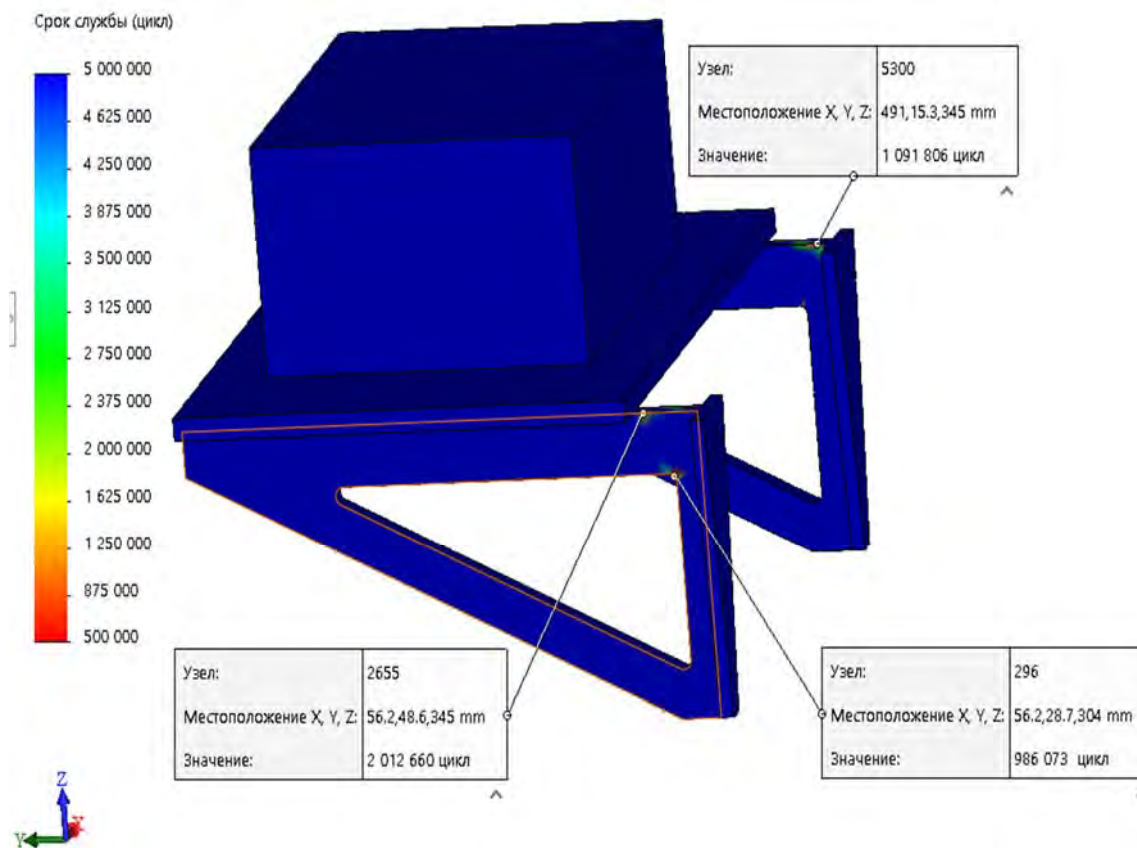


Рис. 3.251. Эпюра числа циклов нагружений до разрушения различных областей рассматриваемого изделия или окончания эксплуатации

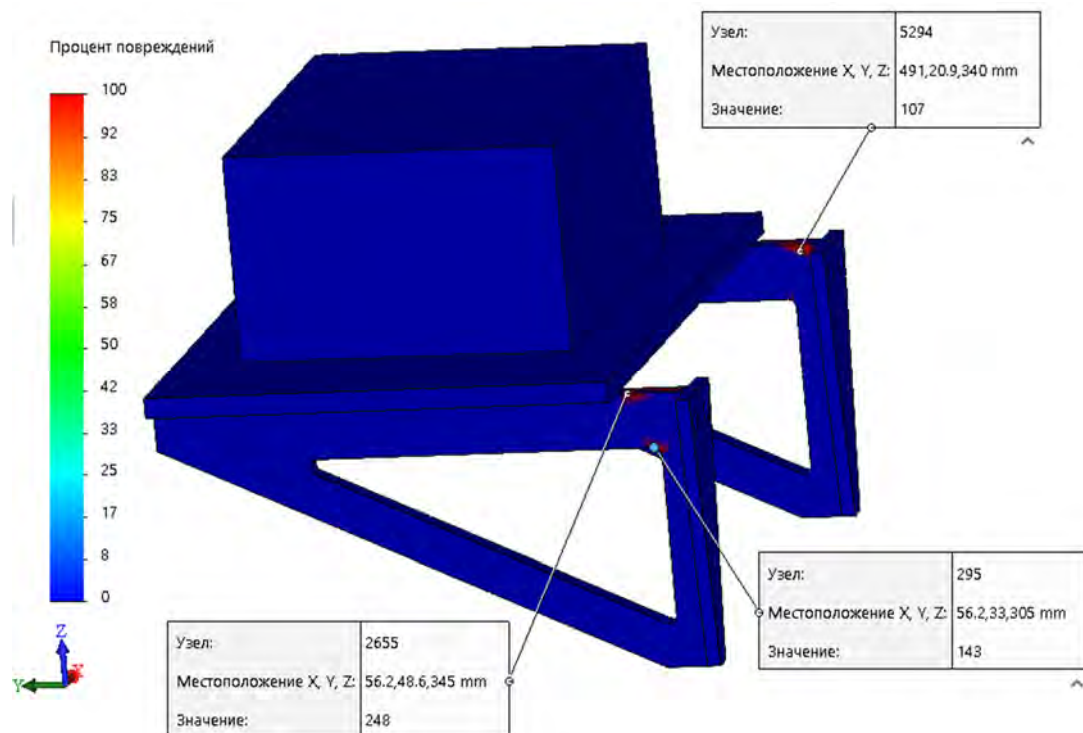


Рис. 3.252. Проценты повреждения различных зон консольной опоры электродвигателя за 10000000 циклов

### **3.11.8. Общие выводы по результатам комплексного имитационного моделирования проектируемого объекта**

По результатам проведенного имитационного моделирования можно сделать следующие выводы.

1. Подготовлены исходные данные к проведению компьютерного моделирования и последующего инженерного анализа консольной опоры электродвигателя в среде SolidWorks Simulation.

2. Разработаны 3D-модели деталей и сборки консольной опоры электродвигателя.

3. Создана конечно-элементная модель и проведен анализ напряженно-деформированного состояния анализируемого объекта.

4. Анализ напряженно-деформированного состояния показал, что напряжения в детали сборки *консольный кронштейн* не превышают значения 36,18 МПа при значении предела текучести материала  $\sigma_T = 220,59$  МПа. Из этого обстоятельства можно сделать вывод о том, что консольный кронштейн является явно недогруженной деталью и нуждается в реконструкции.

5. С целью минимизации материалоемкости консольного кронштейна при обеспечении требований прочности и жесткости изделия подготовлены необходимые исходные данные для параметрической оптимизации данного объекта.

6. Проведенная параметрическая оптимизация консольного кронштейна позволила снизить его материалоемкость на 34,9 %.

7. Последующий поверочный анализ реконструированного изделия показал, что требования жесткости и прочности соблюдаются.

8. Поскольку конструктивные типоразмеры консольного кронштейна претерпели существенные изменения, вполне уместно последующее имитационное моделирование данного объекта с целью определения собственных частот и форм колебаний, устойчивости элементов конструкции и выявления характеристик усталостной прочности изделия.

9. В результате проведения частотного анализа и определения четырех собственных форм колебаний установлено, что первые собственные частоты колебаний консольной опоры вместе с электродвигателем составляют 136,9; 167,27; 257,59 и 302,29 Гц соответственно. Это существенно выше, чем частота (83,33 Гц) воздействия от неуравновешенных масс электродвигателя и зафиксированного на нем оборудования. Данное обстоятельство исключает вероятность возникновения резонансных явлений в анализируемой системе.

10. Проведенное компьютерное моделирование спроектированной конструкции консольной опоры электродвигателя показало, что коэф-

коэффициент запаса устойчивости  $n_y = 84,401$  и, следовательно, удовлетворяет требованиям по устойчивости объекта.

11. По результатам имитационного моделирования определены эпюры распределения таких параметров усталостного анализа, как *процент повреждений за рассматриваемое число циклов нагружения, количество циклов нагружения до разрушения различных зон изделия, коэффициент запаса прочности*. Эти данные позволили установить места, нуждающиеся в усилении.

### ***Контрольные вопросы***

1. Какова цель лабораторной работы?
2. Какие типы имитационного моделирования проводились в лабораторной работе?
3. Какой вывод сделан в лабораторной работе в результате анализа напряженно-деформированного состояния объекта при статическом нагружении?
4. Какова цель оптимизации конструктивной формы и типоразмеров консольного кронштейна в лабораторной работе?
5. Какие *переменные* и *ограничения* использовались в лабораторной работе при проведении параметрической оптимизации?
6. Какого эффекта удалось достичь в результате проведения оптимизационной процедуры?
7. Какие причины обусловили проведение имитационного моделирования по определению собственных частот и форм колебаний рассматриваемого изделия в лабораторной работе?
8. Какой вывод сделан в лабораторной работе по результатам определения собственных частот?
9. Какой причиной обусловлена проверка консольной опоры на устойчивость?
10. Каков результат проведения проверки консольной опоры на устойчивость в лабораторной работе?
11. Какой причиной обусловлено проведение анализа усталостной прочности консольной опоры в лабораторной работе?
12. Какие исходные данные использовались при проведении анализа усталостной прочности консольной опоры в лабораторной работе?
13. Какое смысловое назначение кривой SN (кривой Веллера) при анализе усталостной прочности?
14. Какие результаты получены при проведении имитационных усталостных испытаний в лабораторной работе?
15. К какому заключению пришли в лабораторной работе по результатам имитационных усталостных испытаний?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алямовский, А. А.** SolidWorks Simulation. Инженерный анализ для профессионалов: задачи, методы, рекомендации / А. А. Алямовский. – М. : ДМК Пресс, 2015. – 562 с.
2. **Алямовский, А. А.** SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике / А. А. Алямовский. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 800 с.
3. **NX Advanced Simulation.** Инженерный анализ / П. С. Гончаров, И. А. Артамонов, Т. Ф. Халитов [и др.]. – М. : ДМК Пресс, 2012. – 504 с.
4. **Лукинских, С. В.** Компьютерное моделирование и инженерный анализ в конструкторско-технологической подготовке производства : учеб. пособие / С. В. Лукинских. – Екатеринбург : Урал. ун-т, 2020. – 168 с.
5. **Жолобов, А. А.** Прогнозирование поведения технологических систем на стадии их проектирования : монография / А. А. Жолобов, В. А. Попковский, Д. В. Попковский. – Могилев : МГТУ, 2000. – 150 с.
6. **Березиенко, В. П.** Совершенствование технологии контактной точечной и рельефной сварки : монография / В. П. Березиенко, В. А. Попковский, С. Ф. Мельников. – Минск : Выш. шк., 1990. – 120 с.
7. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
8. **Сегерлинд, Л.** Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
9. **Галагер, Р.** Метод конечных элементов. Основы / Р. Галагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
10. Численные методы анализа и метод конечных элементов : пер. с англ. / под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.
11. **Каменев, С. В.** Основы метода конечных элементов в инженерных приложениях : учеб. пособие / С. В. Каменев. – Оренбург : ОГУ, 2019. – 110 с.
12. **Миронов, Л. П.** Краткий курс сопротивления материалов : учеб. пособие / Л. П. Миронов. – Хабаровск : ДВГУПС, 2011. – 114 с.: ил.
13. **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.: ил.
14. **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.: ил.
15. Сопротивление материалов: учебник / под ред. А. Ф. Смирнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1975. – 480 с.: ил.
16. **Дьячков, Ю. А.** Прикладная оптимизация в проектировании колесных машин : учеб. пособие / Ю. А. Дьячков, А. А. Семенов, А. А. Генералова. – М. : Мир науки, 2016. – 210 с.
17. **Самуль, В. И.** Основы теории упругости и пластичности : учеб. пособие / В. И. Самуль. – М. : Высш. шк., 1970. – 288 с.: ил.

18. **Афаневич, В. В.** Моделирование процесса формирования микро-рельефа поверхности при инерционно-импульсной обработке / В. А. Афаневич, В. М. Пашкевич, В. А. Попковский // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2019. – № 4. – С. 5–14.

19. Расчет металлических конструкций подъемно-транспортных машин методом конечных элементов : учеб. пособие / А. В. Вершинский, И. А. Лагереv, А. Н. Шубин, А. В. Лагереv. – Брянск : Брян. гос. ун-т, 2015. – 210 с.

20. **Овчинников, С. В.** Введение в теорию теплообмена: теплопроводность в твердых телах : учеб. пособие / С. В. Овчинников. – Саратов : СГУ им. Н. Г. Чернышевского, 2015. – 104 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>                                                                                                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>1. АНАЛИЗ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ<br/>КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....</b>                                                                                                      | <b>5</b>  |
| 1.1. Основные положения метода конечных элементов.....                                                                                                                     | 6         |
| 1.2. Этапы решения задачи посредством использования конечно-<br>элементного анализа.....                                                                                   | 12        |
| 1.3. Конечно-элементная дискретизация исследуемого объекта.<br>Оценка точности результатов расчета. Факторы, оказывающие<br>существенное влияние на точность расчетов..... | 13        |
| 1.4. Генерация сетки разбиения конечно-элементной модели.....                                                                                                              | 18        |
| 1.5. Решение результирующей системы линейных алгебраических<br>уравнений.....                                                                                              | 20        |
| <b>2. ТВЕРДОТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ<br/>SOLIDWORKS.....</b>                                                                                                          | <b>27</b> |
| 2.1. Ознакомление с работой SolidWorks. Основные принципы<br>трехмерного проектирования изделий в среде SolidWorks.....                                                    | 28        |
| 2.2. Начало работы в SolidWorks и особенности интерфейса этого<br>объекта.....                                                                                             | 28        |
| 2.3. Построение твердотельной модели цилиндрического<br>объекта.....                                                                                                       | 32        |
| 2.4. Инструменты для изменения ориентации вида.....                                                                                                                        | 34        |
| 2.5. Инструменты для изменения масштаба, вращения<br>и перемещения вида.....                                                                                               | 34        |
| 2.6. Создание сборок.....                                                                                                                                                  | 36        |
| <b>3. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.....</b>                                                                                                                                      | <b>45</b> |
| 3.1. Лабораторная работа № 1. Проведение сопоставительного<br>анализа напряженно-деформированного состояния ступенчатого<br>бруса при центральном растяжении-сжатии.....   | 45        |
| 3.2. Лабораторная работа № 2. Осуществление сопоставительного<br>анализа балки при плоском поперечном изгибе.....                                                          | 77        |
| 3.3. Лабораторная работа № 3. Сопоставительный анализ стойки<br>на устойчивость.....                                                                                       | 102       |
| 3.4. Лабораторная работа № 4. Сопоставительный анализ балки,<br>подверженной удару падающим грузом.....                                                                    | 112       |
| 3.5. Лабораторная работа № 5. Проведение частотных<br>исследований различных объектов.....                                                                                 | 130       |

|                                                                                                                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.6. Лабораторная работа № 6. Анализ изделий с позиций усталостного разрушения.....                                                                                          | 148        |
| 3.7. Лабораторная работа № 7. Оптимизация конструктивных форм изделий в SolidWorks Simulation.....                                                                           | 170        |
| 3.8. Лабораторная работа № 8. Проведение нелинейного статического анализа балки при изгибе.....                                                                              | 189        |
| 3.9. Лабораторная работа № 9. Нелинейные динамические исследования процесса пластического деформирования поверхностного слоя изделий посредством дробеструйного наклепа..... | 208        |
| 3.10. Лабораторная работа № 10. Анализ тепловых процессов в исследуемом объекте.....                                                                                         | 226        |
| 3.11. Лабораторная работа № 11. Комплексная оценка работоспособности проектируемого объекта.....                                                                             | 254        |
| <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>                                                                                                                                                | <b>287</b> |

Учебное издание

**Попковский Виктор Александрович**

# **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЙ АНАЛИЗ**

**Лабораторный практикум**

*Пособие*

Редакторы *А. А. Подошевко, А. Т. Червинская*

Художественное оформление обложки *А. А. Емельянова*

Компьютерный дизайн *Н. П. Полевнича*

Подписано в печать 16.06.20225. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 16,97. Уч.-изд. л. 18,19. Тираж 100 экз. Заказ № 441.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.