УДК 531.3; 796.01

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

А. Е. ПОКАТИЛОВ, М. А. КИРКОР, В. Н. ПОПОВ
Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОДОВОЛЬСТВИЯ»
Могилев, Беларусь

По результатам исследования предложено рассматривать произвольное конечное движение биомеханической системы (БМС) в целом и отдельных ее звеньев как сумму поступательного перемещения, связанного с некоторой произвольно выбранной точкой и вращением относительно этой точки. Такой подход для каждого звена биомеханической системы дает шесть независимых координат, описывающих движение звена: три координаты задают перемещение некоторой фиксированной точки звена в пространстве, а три координаты характеризуют его вращение. Вращение является отдельной задачей и, в общем случае, не зависит от поступательного перемещения звена. Такой подход позволяет рассматривать как движения всей биомеханической системы, например, относительно ее центра масс, так и каждого звена по отдельности. В качестве звеньев выступают конечности (руки, ноги), туловище, голова, или отдельные участки этих звеньев. Количество звеньев зависит от принятой модели пространственной биомеханической системы, представляющей опорно-двигательный аппарат человека.Известен ряд кинематических параметров, предназначенных для описания движения твердого тела: направляющие косинусы, углы Эйлера и Крылова, параметры Кейли-Клейна, параметры Родрига-Гамильтона. Анализ и предварительные расчеты показывают параметры Родрига-Гамильтона, представляющие собой компоненты кватерниона, как наиболее удобные. Они не вырождаются при любом положении биомеханической системы. Последнее означает, что ни параметры, ни скорости их изменения не обращаются в бесконечность, в отличие от углов Эйлера. Кроме этого, число параметров Родрига-Гамельтона равняется четырем, что дает всего одно уравнение связи. В случае применения направляющих косинусов получают шесть уравнений. Данный факт значительно упрощает задачу численного интегрирования кинематических уравнений в первом случае.

Важным фактором является то, что применение кватернионов позволяет создать весьма удобный и наглядный формализм, использующий параметры Родрига-Гамельтона. Конечное вращение звена можно представить как движение с одной неподвижной в пространстве осью. В этом смысле вектор конечного поворота является инвариантом произвольного перемещения звена. В частности, произвольное перемещение можно разложить на два поступательных перемещения – вдоль оси вектора поворота и в плоскости вращения – собственно вращение. При выборе оси (или центра) плоского вращения можно поступательное перемещение в плоскости вращения свести к нулю (объединить с его вращением; при этом ось становится центром вращения); в этом случае произвольное движение звена сводится к винтовому движению.

Выбором оси (или центра) плоского вращения можно поступательное перемещение в плоскости вращения свести к нулю (объединить с его вращением; при этом ось становится центром вращения); в этом случае произвольное движение звена сводится к винтовому движению.

Таким образом следует, что применение такого рода кинематических параметров естественным образом приводит к использованию кватернионов. Кватернионы дают аппарат, позволяющий наиболее удобным образом записывать все операции, связанные с описанием и исследованием движения биомеханической системы и ее звеньев.Кроме того, анализ современных технологий, применяемых в компь- ютерных играх, позволил сделать следующие практические выводы: в компьютерных играх критичным является скорость обработки видеоизоб- ражения. Несмотря на растущую вычислительную мощность процессоров, этот параметр до сих является критичным для компьютера, поэтому для обсчета изображения применяются специальные меры, вплоть до отдельных плат, предназначенных только для этих целей. Вторым приемом ускорения расчета изображения в динамичных компьютерных играх является использование алгебры кватернионов: угловые координаты звеньев в каждом положении (на каждом кадре) хранятся в углах Эйлера, а пересчет ведется с помощью аппарата алгебры кватернионов. Это наиболее быстрый и экономичный, с вычислительной точки зрения, способ получения координат объекта, в т. ч. и человека в каждом кадре.

Используя технологию «компьютерного зрения» для измерения координат БМС, мы получим их в виде углов Эйлера. Тогда наиболее приемлемым является разработка математических моделей на основе алгебры кватернионов.

Для отображения движения в BVH-файле для каждой кости, в каждом кадре рассчитывается ее локальная матрица трансформации:

$$M=TRS, \qquad (1)$$

где T, R, S – матрицы перемещения (*translation*), вращения (*rotation*), масштабирования (*scale*), соответственно, в координатах родительского элемента.

Чтобы получить глобальную матрицу трансформации для конкретного узла скелета, локальную матрицу необходимо умножить на матрицу трансформации родительского элемента, для которого работает этот же принцип. Глобальную матрицу трансформации для каждого элемента скелета можно рассчитать по формуле

$$_{\text{глоб}} \quad \prod_{i\ 0} \quad ^{i}_{\text{локал}} \qquad (2)$$