DOI: 10.24412/2077-8481-2025-3-100-109

УДК 629.114.2

Э. И. ЯСЮКОВИЧ, *канд. техн. наук*, *доц.*
Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОБИЛЬНОСТИ БЕСПИЛОТНОГО КУРСОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА

Аннотация
Разработана имитационная математическая модель курсового движения колесного трактора с передними управляемыми колесами и программное обеспечение для оценки его мобильности и показателей курсовой устойчивости.

Ключевые слова:
беспилотный колесный трактор, имитационная математическая модель, курсовое движение, мобильность, вертикальная динамика, курсовая устойчивость, управляемость.

Для цитирования:
Ясюкович, Э. И. Имитационное моделирование мобильности беспилотного курсового движения колесного трактора / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2025. – № 3 (88). – С. 100–109.

Введение

Курсовое движение колесных тракторов по дорогам, содержащим различные неровности и препятствия, требует совершения ими маневров, необходимых для устойчивого криволинейного управляемого движения, а также для обгона движущихся в том же направлении транспортных средств.

В работе для исследования мобильности курсового движения колесных тракторов используется такое понятие, как траекторная устойчивость, под которой понимается способность поддерживать ими задаваемые траектории движения и курсовую устойчивость. Для исследования устойчивости названных тракторов используется разработанная имитационная математическая модель их курсового движения.

В последнее время при выполнении имитационного моделирования курсового движения колесных машин используется понятие их беспилотного движения классического и нейросетевого подходов.

При использовании классического подхода для исследования беспилотного движения колесных машин могут использоваться специальные формы, представляемые в виде следующих модулей:

– локализации, используемые для определения места нахождения колесной машины;

– распознавания находящихся на проезжей части других транспортных средств;

– управления движением, используемые для построения траектории движения и технологии проезда по задаваемому маршруту.

В нейросетевом подходе используются нейронные сети, содержащие такие элементы, как данные из камер и команды управления, в которых используется машинное обучение с использованием компьютерных программ, работающих по принципу человеческого мозга с сетями различных нейронных связей.

Под нейронной сетью понимается обучаемая система, которая может быть самообучаемой с помощью задаваемых алгоритмов распознавания и получаемых данных, необходимых для поддер-

© Ясюкович Э. И., 2025

жания устойчивого курсового движения [1].

В работе рассматриваются разработанная математическая модель и программное обеспечение имитационного моделирования, используемые для оценки показателей курсовой устойчивости беспилотного движения колесного трактора с передними управляемыми колесами. При этом используется также такой показатель, как траекторная устойчивость криволинейного движения.

Основная часть

В последнее время мобильное беспилотное управляемое курсовое движение колесных машин получает все более широкое применение, поэтому указанные машины должны соответствовать требованиям безопасности дорожного движения, т. е. курсовой устойчивости, управляемости и маневренности. На указанные показатели курсового движения названных колесных машин оказывают влияние их массогеометрические параметры, а также упругие характеристики подвески и шин [2]. Поэтому в работе для оценки мобильности беспилотного управляемого курсового движения колесного трактора с передними управляемыми колесами поставлена задача разработки имитационной математической модели его курсового движения. Общий вид указанного трактора представлен на рис. 1.

Рис. 1. Общий вид колесного трактора

Оценку зависимости указанных параметров колесного трактора на показатели его курсовой устойчивости и управляемости можно выполнить с использованием имитационного моделирования. В работе была поставлена задача разработки математической модели, содержащей дифференциальные уравнения курсового движения и вертикальной динамики колесного трактора с

передними управляемыми колесами, а также программного обеспечения имитационного моделирования его управляемого курсового движения. Для вывода указанных дифференциальных уравнений разработана расчетная схема, представленная на рис. 2.

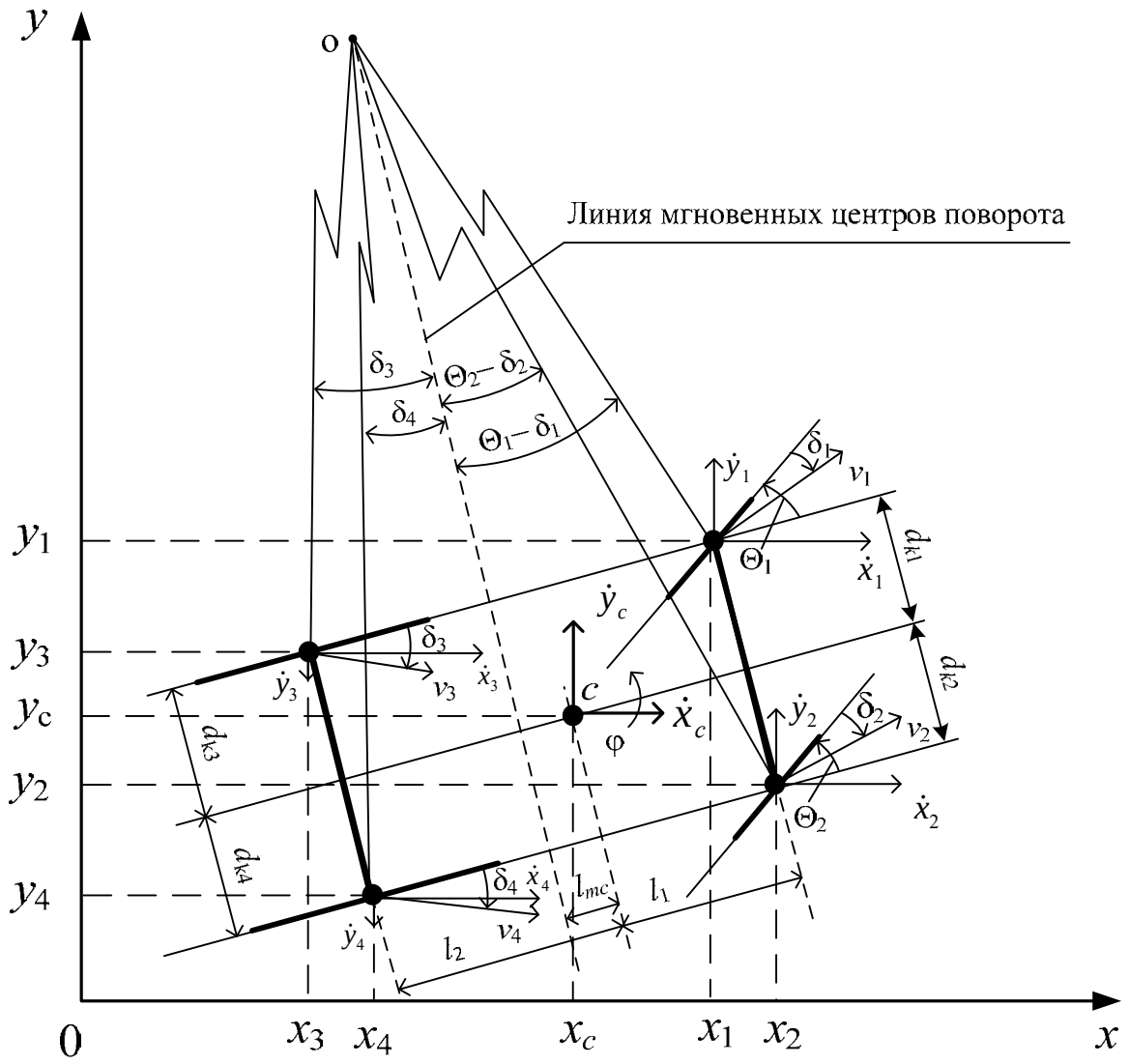

Рис. 2. Расчетная схема управляемого курсового движения колесного трактора

В расчетной схеме, приведенной на рис. 2, используются следующие геометрические параметры: l_1, l_2, l_{mc} – расстояния от центра масс трактора до его передней, задней осей и до линии мгновенных центров поворота; $d_{k1}...d_{k4}$ – половины передней левой, передней правой, задней левой и задней правой осей трактора; $x_1...x_4$ – координаты проекций на ось OX центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; $y_1...y_4$ – координаты проекций на ось OY центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; $\dot{x}_1 ... \dot{x}_4$ – продольные скорости центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; $\dot{y}_1 ... \dot{y}_4$ – скорости поперечных перемещений центров переднего левого, переднего правого, зад-

него левого и заднего правого колес трактора; φ – курсовой угол остова трактора; $\delta_1...\delta_4$ – углы увода шин переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; $v_1...v_4$ – продольные скорости центров переднего левого, переднего правого, заднего левого и заднего правого колес трактора; Θ_1, Θ_2 – углы поворота левого и правого передних управляемых колес.

В качество независимых обобщенных координат курсового движения колесного трактора были выбраны следующие независимые обобщенные координаты: x_c, y_c, z_c – перемещения центра масс трактора по продольной, поперечной и вертикальной осям; φ, Ψ, Ф – курсовой угол, угол крена и угол тангажа остова трактора.

Для выбранных обобщенных координат была разработана имитационная математическая модель, содержащая шесть обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка управляемого курсового движения трактора по опорной поверхности, одним из которых является уравнение вертикальной динамики его центра масс.

В процессе курсового движения колесного трактора по дорогам с микропрофилем его остов совершает угловые, продольно-поперечные и вертикальные колебания, в результате чего изменяются сцепления шин его колес с опорной поверхностью, поэтому вертикальные реакции опорной поверхности на шины колес не являются постоянными. В связи с этим для повышения точности имитационного моделирования динамические уравнения курсового движения трактора разработаны с учетом упругодиссипативных характеристик его шин, а имитационная математическая модель, кроме уравнений курсового движения, дополнена динамическими уравнениями вертикальной динамики.

Разработанная имитационная математическая модель, кроме динамических уравнений курсового движения, содержит четыре дифференциальные уравнения первого порядка кинематических связей шин колес трактора с опорной поверхностью, которые используются для определения изменяющихся при криволинейном движении углов увода $\delta_1...\delta_4$, необходимых для моделирования управляемого криволинейного курсового движения. Эти уравнения используются также для имитации процессов обгона транспортных средств, движущихся в том же направлении, но с меньшей скоростью.

Для управления мобильным беспилотным курсовым движением колесного трактора по траектории, формируемой на основе данных, получаемых из установленных видеокамер, в математическую модель и в программное обеспечение был добавлен блок обгона, который в момент времени начала маневра задает рулевому колесу ускорение угла его поворота, действующее до достижения им заданных скорости и угла поворота. После завершения обгона углу поворота рулевого колеса задаются значения, возвращающие трактор в исходное положение для продолжения его дальнейшего движения. В результате была получена имитационная математическая модель, позволяющая моделировать управляемое курсовое движение трактора по дорожным магистралям без водителя.

Дифференциальные уравнения вертикальных, продольных и поперечно-угловых колебаний трактора, а также уравнения его вертикальных колебаний были получены на основе приведенной на рис. 3 расчетной схемы.

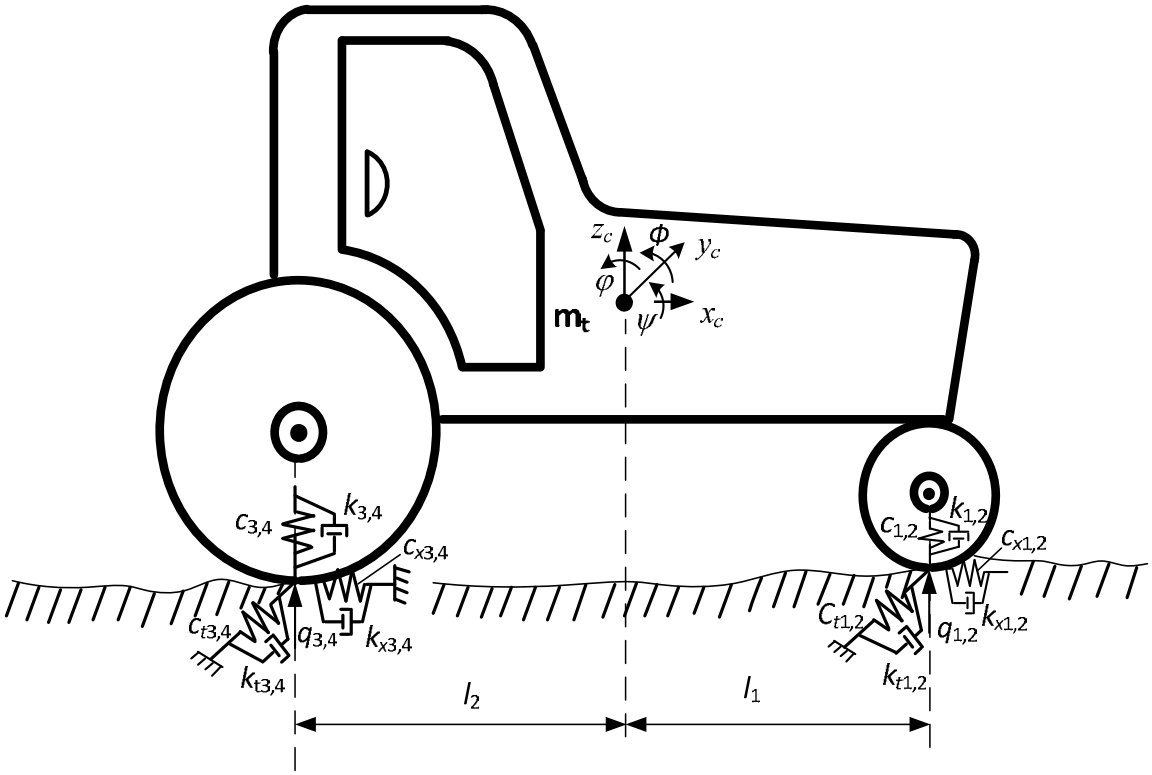

Рис. 3. Расчетная схема продольных, поперечных угловых колебаний и вертикальной динамики колесного трактора

На рис. 3 использованы следующие упругодиссипативные характеристики шин колес трактора: $c_1...c_4$ – коэффициенты вертикальной жесткости; $k_1...k_4$ – коэффициенты вертикального демпфирования; $c_{x1}...c_{x4}$ – коэффициенты боковых жесткостей; $k_{x1}...k_{x4}$ – коэффициенты бокового демпфирования.

Приведенные на рис. 2 и 3 расчетные схемы использовались для вывода дифференциальных уравнений управляемого курсового движения и вертикальной динамики трактора.

Моделирование управляемого курсового движения трактора выполнялось с использованием углов Θ_1 и Θ_2 поворота передних левого и правого управляемых колес вокруг их вертикальных осей (см. рис. 2).

Уравнения кинематических связей колес трактора с опорной поверхностью при движении без проскальзывания шин получены для случая, когда нормали к вертикальным плоскостям колес пересекаются в одной точке на линии мгновенных центров поворота – в точке O (см. рис. 2).

Эффективность управляемого курсового движения трактора зависит от углов увода его шин, а также от положения линии мгновенных центров поворота управляемых колес.

Таким образом, разработанная полная математическая модель курсового движения колесного трактора, полученная с учетом продольно-поперечных, вертикальных и угловых колебаний ее остова, содержит шесть обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и четыре дифференциальных уравнения кинематических связей шин его колес с опорной поверхностью первого порядка:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\ddot{x}_c = \{-\sum_{i=1}^{2}\{Y_i\sin(\varphi+\Theta_i\mp\delta_i)+(P_{ki}-P_{ti})\cos(\varphi+\Theta_i\mp\delta_i)\}+\\
&\quad+\sum_{i=3}^{4}\{Y_i\sin(\varphi\mp\delta_i)+(P_{ki}-P_{ti})\cos(\varphi\mp\delta_i)\}/m;\\
&\ddot{y}_c = \{\sum_{i=1}^{2}\{Y_i\cos(\varphi+\Theta_i-\delta_i)+(P_{ki}-P_{ti})\sin(\varphi+\Theta_i-\delta_i)\}+\\
&\quad+\sum_{i=3}^{4}\{Y_i\cos(\varphi\mp\delta_i)+(P_{ki}-P_{ti})\sin(\varphi\mp\delta_i)\}/m;\\
&\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{2}\{Y_i[l_1\cos(\Theta_i-\delta_i)\mp d_i\sin(\Theta_i-\delta_i)]+(P_{ki}+P_{ti})\times\\
&\quad\times[l_1\sin(\Theta_i-\delta_i)\pm d_i\cos(\Theta_i-\delta_i)]\}-\sum_{I=3}^{4}\{Y_i[l_2\cos\delta_i\pm d_i\sin\delta_i]-\\
&\quad-(P_{ki}+P_{ti})[l_2\sin\delta_i\mp d_i\cos\delta_i]\}/J_z;\\
&\ddot{z}_c = \sum_{i=1}^{4}P_{ni}/m;\\
&\ddot{\psi} = \sum_{i=1}^{4}(\mp P_i d_i - m v_c^2 h_c/r_{tr})/j_x; \qquad \ddot{\Phi} = \sum_{i=1}^{2}(P_{i1}l_i+P_{i2}l_2)/J_y;\\
&\dot{\delta}_i\{\dot{x}_c\cos(\varphi+\Theta_i-\delta_i)+\dot{y}_c\sin(\varphi+\Theta_i-\delta_i)+\ddot{\varphi}[l_1\sin(\Theta_i-\delta_i)\mp\\
&\quad\pm d_i\cos(\Theta_i-\delta_i)]\} = \ddot{x}_c\sin(\varphi+\Theta_i-\delta_i)-\ddot{y}_c\cos(\varphi+\Theta_i-\delta_i)-\\
&\quad-\ddot{\varphi}[l_1\cos(\Theta_i-\delta_i)\pm d_i\sin(\Theta_i-\delta_i)]-\dot{\varphi}^2[l_1\sin(\Theta_i-\delta_i)\mp\\
&\quad\mp d_i\cos(\Theta_i-\delta_i)]+(\dot{\varphi}+\dot{\Theta}_i)[\dot{x}_c\cos(\varphi+\Theta_i-\delta_i)+\\
&\quad+\dot{y}_c\sin(\varphi+\Theta_i-\delta_i)+\ddot{\varphi}[l_1\sin(\Theta_i-\delta_i)\mp d_i\cos(\Theta_i-\delta_i)],\ i=1,\ 2;\\
&\dot{\delta}_i\{\dot{x}_c\cos(\varphi-\delta_i)+\dot{y}_c\sin(\varphi-\delta_i)-\ddot{\varphi}[l_2\sin\delta_i\mp d_i\cos\delta_i]\}=\\
&\quad=\ddot{x}_c\sin(\varphi-\delta_i)-\ddot{y}_c\cos(\varphi-\delta_i)+\ddot{\varphi}[l_2\cos\delta_i\mp d_i\sin\delta_i]+\\
&\quad+\dot{\varphi}^2[l_2\sin\delta_i\pm d_i\cos\delta_i]+\dot{\varphi}[\dot{x}_c\cos(\varphi-\delta_i)+\dot{y}_c\sin(\varphi-\delta_i)-\\
&\quad-\ddot{\varphi}[l_2\sin\delta_i\pm d_i\cos\delta_i],\ i=3,4.
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

Приведенная система дифференциальных уравнений (1) содержит переменные v_c, r_{tr}, h_c – продольная скорость, радиус криволинейной траектории движения трактора и высота его центра масс.

В системе уравнений (1) первые три дифференциальных уравнения второго порядка – это уравнения курсового движения; четвертое – уравнение вертикального перемещения центра масс; пятое и шестое – уравнения поперечно- и продольно-угловых колебаний подрессоренной трактора. Седьмое уравнение математической модели используется для вычисления скоростей углов увода шин передних управляемых колес, а восьмое – углов увода шин задних колес.

На шины колес в процессе движе-

ния трактора действуют боковые реакции опорной поверхности Y_i, которые вычисляются по формуле

$$Y_i = k_{ui}\delta_i,\ i = 1...4, \qquad (2)$$

где k_{ui} – коэффициенты сопротивления боковому уводу шины i-го колеса.

Полученные дифференциальные уравнения (1) курсового движения трактора содержат переменные P_{ki}, P_{ti} – продольные реакции опорной поверхности на шины и силы тяги ведущих колес.

При криволинейном движении колесного трактора коэффициенты k_{ui} не являются постоянными величинами, т. к. они зависят от многих факторов и изменяются в зависимости от приложенных к шинам нормальных и тангенциальных реакций дороги, которые зависят от характеристик дорожной поверхности [3, 4].

Система дифференциальных уравнений (1) разработана для случая отсутствия бокового проскальзывания шин колес трактора при движении его по криволинейной траектории. Согласно этому условию нормали к проекциям средних линий вертикальных поверхностей шин на опорную поверхность должны пересекаться в одной точке O (см. рис. 2), а скорость поворота левого управляемого колоса Θ_2, зависящая от скорости поворота переднего правого колеса Θ_1, должна соответствовать значению, определяемому по формуле

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{l_{i/2}^2\dot{\Theta}_1}{(l_1 + d\ \mathrm{tg}\Theta_1)^2\cos^2\Theta_1 + l_1^2\sin^2\Theta_1}. \qquad (3)$$

Для моделирования беспилотного управляемого курсового движения колесного трактора по задаваемой траектории разработан алгоритм, предусматривающий расчет реальных условий мобильности беспилотного движения, интегрирование системы дифференциальных уравнений (1).

Угол Θ_1 поворота переднего левого управляемого колеса определяется по задаваемым значениям скорости и ускорения угла поворота рулевого колеса.

Результаты имитационного моделирования курсового движения, получаемые в процессе численного интегрирования системы уравнений (1) сохраняются в файле, содержащем строки со значениями моментов времени, численных значений обобщенных координат и их скоростей, углов увода шин колес и значений некоторых сил и моментов. Созданный таким образом файл используется для формирования графических зависимостей процессов управляемого курсового движения колесного трактора.

В процессе численного интегрирования системы уравнений (1) результаты имитационного моделирования сохраняются в файле, который используется для формирования графических зависимостей процессов управляемого курсового движения трактора.

Некоторые результаты моделирования мобильности беспилотного курсового движения колесного трактора на интервале времени от 0 до 10 с по дороге с микропрофилем представлены на рис. 4–7.

На рис. 4 приведен график перемещения центра масс трактора, движущегося со скоростью 11 м/с при совершении им обгона транспортного средства, движущегося с более низкой скоростью, на интервале времени от 0 до 20 с. Трактор совершил маневр обгона с момента времени 0,5 с и через 9,3 с переместился влево на 2,51 м, после чего начал маневр возвращения на исходную полосу движения.

На рис. 5 представлены результаты имитационного моделирования курсового движения трактора при совершении им маневра обгона, на котором представлены изменяющиеся во времени параметры: скорость движения, перемещение центра масс по горизонтали, изменение курсового угла, вертикальные колебания центра масс, углы увода

шин передних левого и правого управляемых колес, а также углы увода шин задних левого и правого неуправляемых колес.

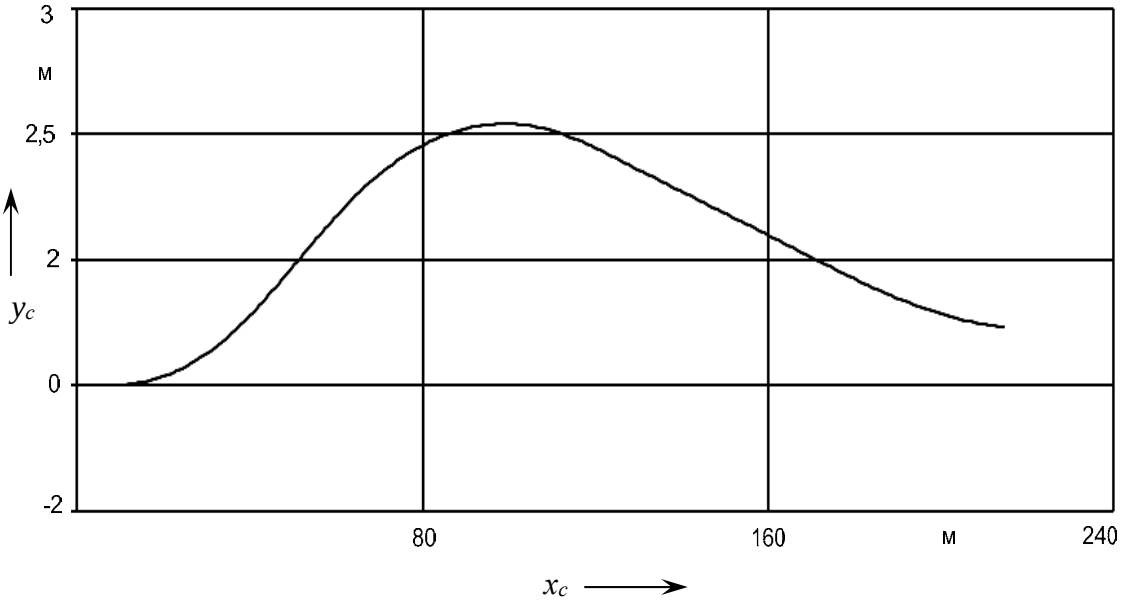

Рис. 4. Траектория перемещения центра масс трактора при совершении маневра обгона

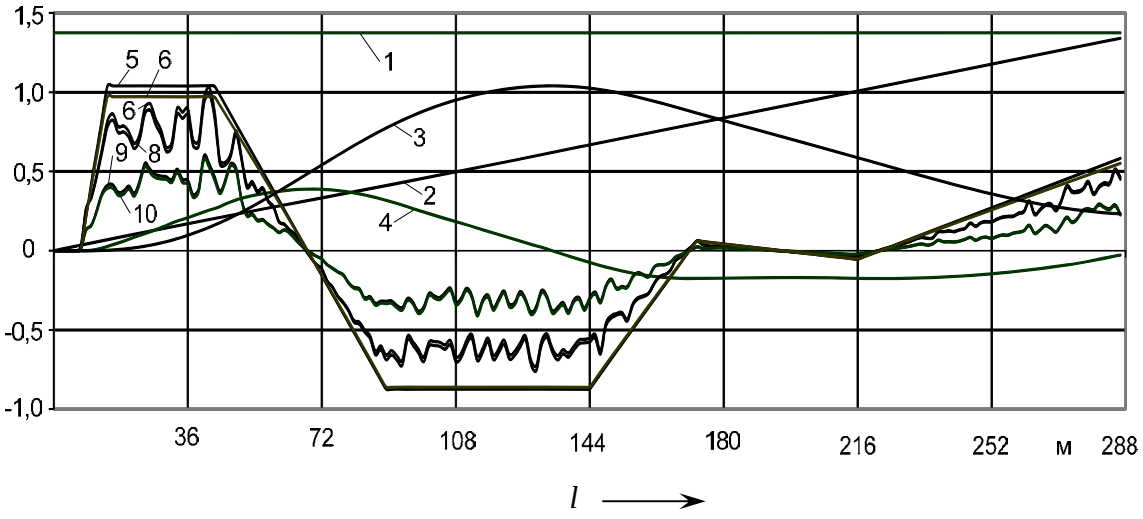

Рис. 5. Результаты имитационного моделирования курсового движения трактора с постоянной скоростью при совершении маневра обгона: 1 – скорость движения V_{dv} = 11 м/с; 2 – перемещение центра масс по горизонтали x_c от 0 до 288 м; 3 – курсовой угол φ, рад/с; 4 – вертикальные перемещения центра масс z_c от 0 до 0,025 м; 5, 6 – углы увода шин передних левого δ_1 и правого δ_2 управляемых колес от 0 до 0,018 рад; 7, 8 – углы увода шин задних левого δ_1 и правого δ_2 неуправляемых колес от 0 до 0,018 рад; 9, 10 – углы поворота передних левого t_{e1} и правого t_{e2} управляемых колес от 0 до 0,04 рад

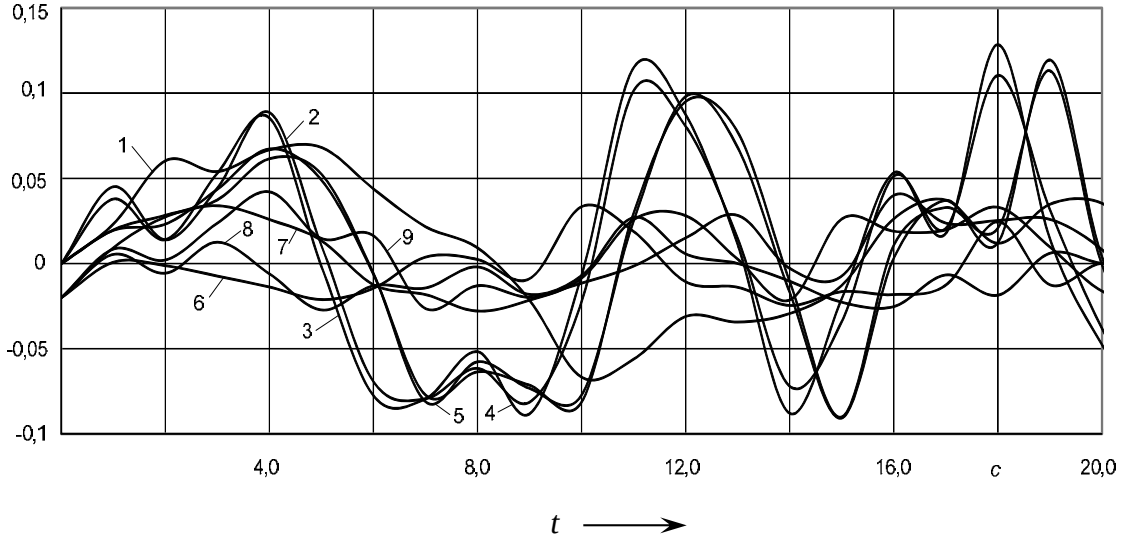

Рис. 6. Вертикальная динамика движения колесного трактора по дороге со случайным микропрофилем: 1 – вертикальное перемещение центра масс z_c, м; 2–5 – вертикальные перемещения центров масс колес $z_1 \ldots z_4$, м; 6–9 – углы увода шин колес $\delta_1 \ldots \delta_4$, рад

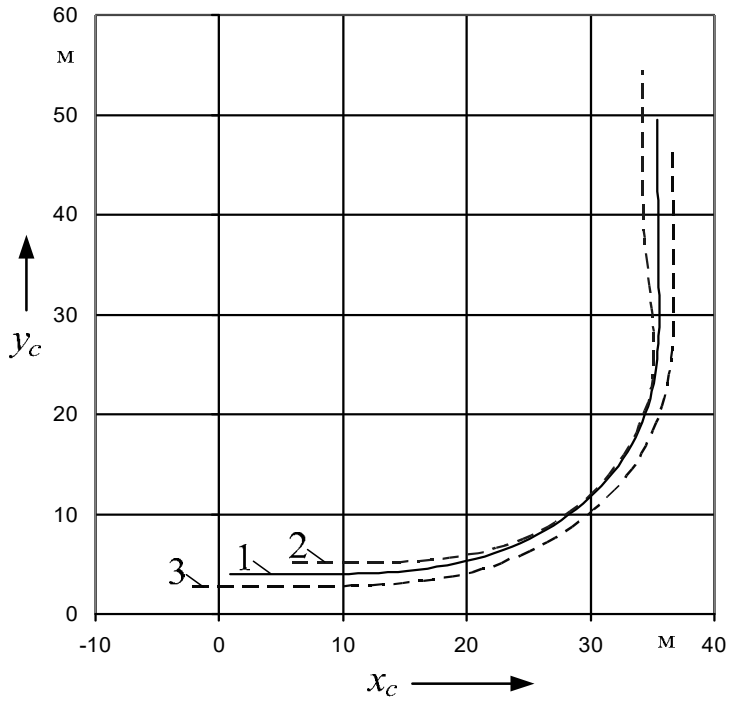

Рис. 7. Результаты имитационного моделирования процесса поворота трактора на угол 90 град против часовой стрелки: 1–3 – траектории движения центра масс трактора, передних левого и правого управляемых колес

На рис. 6 представлены результаты имитационного моделирования вертикальной динамики трактора, отображающие вертикальные перемещение центра масс трактора и центров его колес, а также изменения углов увода его шин при совершении управляемого курсового движения по дороге со случай-

ным микропрофилем.

На рис. 7 приведен результат моделирования управляемого курсового движения, на котором отображается процесс поворота трактора на 90 град против часовой стрелки.

Приведенные на рис. 4–7 результаты подтверждают работоспособность разработанной математической модели и программного обеспечения имитационного моделирования беспилотного управляемого курсового движения колесного трактора по дорогам со случайным микропрофилем.

Таким образом, разработанные математическая модель, алгоритм и программное обеспечение имитационного моделирования курсового движения могут успешно использоваться для оценки мобильности беспилотного курсового движения колесных тракторов.

Выводы

Разработанная динамическая имитационная математическая модель управляемого курсового движения колесного трактора может успешно использоваться для моделирования его беспилотного управляемого курсового движения с учетом вертикальной динамики, а также для оценки мобильности его беспилотного управляемого курсового движения по реальным траекториям.

Программное обеспечение, разработанное на основе полученной математической модели, позволяет выполнять расчетные исследования для повышения маневренности колесного трактора и оценки влияния его массогеометрических и упругодиссипативных характеристик подвески и шин на мобильность, курсовую устойчивость, управляемость и маневренность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Галушкин, А. И.** Нейронные сети: основы теории / А. И. Галушкин. – М. : РиС, 2015. – 496 с.

2. **Лурье, А. И.** Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.: ил.

3. **Ясюкович, Э. И.** Имитационное моделирование управляемого курсового движения трехосных колесных машин / Э. И. Ясюкович // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2024. – № 1. – С. 68–76.

4. Динамика колесных машин : монография / И. С. Сазонов, П. А. Амельченко, В. А. Ким [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2006. – 462 с.: ил.

Статья сдана в редакцию 15 апреля 2025 года

Контакты:
ed50m@mail.ru (Ясюкович Эдвард Игнатьевич).

E. I. YASYUKOVICH

SIMULATION MODELING OF MOBILITY OF UNMANNED COURSE MOVEMENT OF A WHEELED TRACTOR

Abstract

A mathematical simulation model of the course movement of a wheeled tractor with front steerable wheels has been developed, as well as software for assessing its mobility and course stability indicators.

Keywords:

unmanned wheeled tractor, mathematical simulation model, course movement, mobility, vertical dynamics, course stability, controllability.

For citation:

Yasyukovich, E. I. Simulation modeling of mobility of unmanned course movement of a wheeled tractor / E. I. Yasyukovich // Belarusian-Russian University Bulletin. – 2025. – № 3 (88). – P. 100–109.