

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ АДДИТИВНОГО СИНТЕЗА

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности
6-05-0722-05 «Производство изделий
на основе трехмерных технологий» дневной формы обучения*



Могилев 2025

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
М55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «22» мая 2025 г.,
протокол № 16

Составитель канд. техн. наук, доц. И. М. Кузменко

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. С. Федосенко

Методические рекомендации к практическим занятиям составлены в соответствии с учебной программой по дисциплине «Механика материалов аддитивного синтеза» и предназначены для студентов специальности 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» дневной формы обучения.

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ АДДИТИВНОГО СИНТЕЗА

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев

© Белорусско-Российский
университет, 2025

Содержание

Введение	4
1 Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности точки нагруженного тела	5
2 Решение плоской задачи с использованием функции напряжений Эри	15
3 Расчет упругих и теплофизических характеристик и прочности однонаправленного слоя композитного материала	22
4 Предельные поверхности. Построение кругов Мора	33
5 Расчетная оценка сопротивления элементов конструкций хрупкому разрушению	39
6 Прогнозирование трещиностойкости детали, в которой обнаружен дефект в виде трещины	45
Список литературы	46

Введение

Материал аддитивного синтеза – это сплошная среда (твердое деформируемое тело: упругое, вязкопластичное или пластичное), которая заполняет определенный объем, образуя конструктивный элемент сложной формы. Изделие при этом обладает заданной структурой, механическими и другими свойствами.

Для исследования поведения таких материалов (неоднородных и анизотропных) теоретических сведений, рассмотренных в курсе «Механика материалов и конструкций», недостаточно. Поэтому при выполнении расчетов необходимо использовать методы, которые рассматриваются в других разделах механики сплошной среды: теория упругости, теория ползучести, теория вязкоупругости, основы реологии, механика разрушения. Математический аппарат указанных дисциплин основан на использовании векторной алгебры, тензорного исчисления и других методов, изложение которых в традиционном курсе высшей математики для студентов инженерных специальностей недостаточно по своему содержанию с прикладной точки зрения. Учебной программой дисциплины «Механика материалов аддитивного синтеза» предусматривается изучение на учебных занятиях прикладной стороны теоретических вопросов и методов, которые рассматриваются в упомянутых выше разделах механики сплошной среды.

Знания, полученные в процессе изучения дисциплины «Механика материалов аддитивного синтеза», являются теоретической базой при выполнении курсовых работ и дипломного проекта, а также для овладения студентами последующих дисциплин (конструирование и расчет изделий, компьютерное моделирование и инженерный анализ, компьютерные системы конечно-элементных расчетов, аддитивные технологии в производстве). Эти знания позволят студентам в дальнейшем принимать оптимальные инженерные решения при прогнозировании свойств материалов в конечных изделиях с целью управления структурой и эксплуатационными свойствами материалов в изделиях.

Цель методических рекомендаций – дать возможность студентам закрепить полученные теоретические знания и приобрести навыки для применения этих знаний к конкретным задачам инженерной практики.

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения, решения типовых задач, материалы для самостоятельной подготовки обучающихся к практическим занятиям, контрольным работам и к зачету по курсу. Приводится обширный перечень рекомендуемой литературы.

1 Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности точки нагруженного тела

1.1 Понятия и определения векторной алгебры

1.1.1 Скаляр, вектор, направляющие косинусы [1–4]. Под нагрузкой тело изменяет свои размеры и форму за счет перемещения его отдельных точек. Движение сплошной среды в механике описывается перемещениями и деформациями, т. е. векторными величинами (сила, пара сил, радиус-вектор точки, скорость точки или тела, силы инерции и т. п.). Для описания состояния сплошной среды, заполняющей исследуемое тело, необходимо также учитывать время, температуру, свойства внешней среды, которые являются скалярными величинами.

Скаляр – это любое число. Скалярная величина (от лат. *scalaris* – ступенчатый) – величина, каждое значение которой может быть выражено одним числом (как правило, действительным). Обозначается малыми строчными обычно латинскими буквами: $a, b, c, \dots$.

Вектор – это направленный отрезок (отрезок, у которого одна граничная точка считается начальной, другая – конечной). Обозначается латинскими буквами со стрелкой или чертой над ней, а также может обозначаться буквами с начертанием полужирным шрифтом: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ или с чертой: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Координаты вектора плоскости или вектора пространства $\overline{AB} = \overline{a}$ определяются координатами начальной и конечной точек этого вектора по формулам

$$\overline{AB} = \overline{a} = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1);$$

$$\overline{AB} = \overline{a} = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1). \quad (1.1)$$

где $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ – координаты начальной и конечной точек вектора.

Длина вектора $\overline{AB}$ (его модуль) определяется расстоянием между его началом (точка A) и концом (точка B). Обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$ и является скалярной величиной. Поэтому может обозначаться строчной буквой: a .

Модуль вектора плоскости и вектора пространства определяется, соответственно, по формулам

$$|\overline{AB}| = |\overline{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.2)$$

Единичный вектор (орт) – это вектор, абсолютная величина (модуль) которого равна единице: $|\bar{a}|=1$. Проекции единичного вектора на оси координат (рисунок 1.1, а, б): e_x, e_y, e_z или $\bar{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Над векторами выполняются различные алгебраические операции.

Сумма двух векторов определяется по правилу треугольника: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$.

Вычитание векторов определяется через их сложение: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Результат перемножения двух скаляров – произведение двух чисел. Скалярное произведение обозначается символом $(\cdot)$.

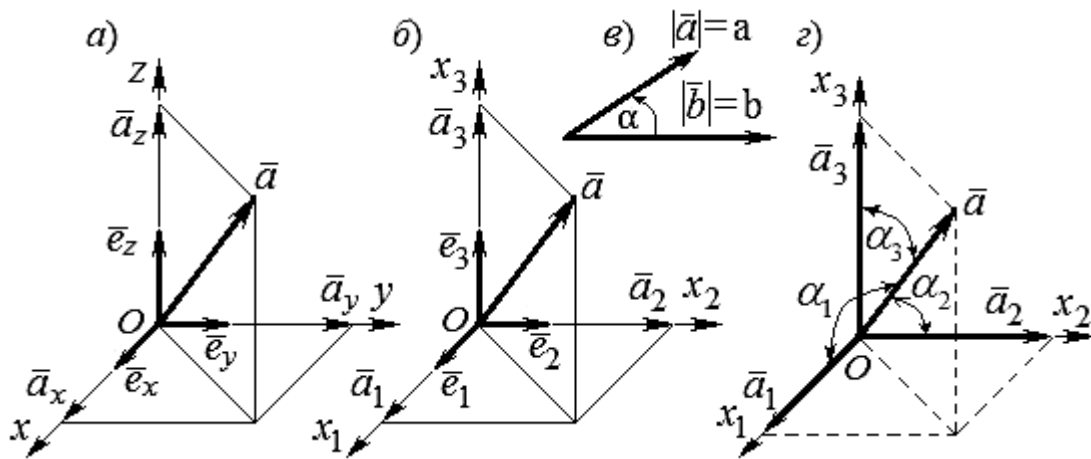


Рисунок 1.1 – Обозначения векторов и ортов (а, б); (в, г) – определение направляющих косинусов

Умножение ненулевого вектора на скаляр (на число λ) дает новый вектор, имеющий то же направление, но другую длину: $\bar{a} \cdot \lambda = \bar{b}$.

Результатом перемножения вектора на скаляр будет произведение модуля (длины) вектора на скаляр, т. е. изменится (увеличится или уменьшится) длина вектора.

Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть скалярная величина (например, число k). Для плоской системы координат (рисунок 1.1, в)

$$k = \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} = a \cdot b \cdot \cos \alpha, \quad (1.3)$$

где a, b – модули векторов $\bar{a}, \bar{b}$, т.е. $a = |\bar{a}|$, $b = |\bar{b}|$;

$\cos \alpha$ – косинус угла между направлениями этих векторов.

Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (обозначение $\times$) – третий вектор $\bar{c}$: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Модуль вектора $\bar{c}$ (рисунок 1.2): $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \alpha$.

Смешанное произведение векторов – скалярное произведение двух векторов, один из которых, в свою очередь, является векторным произведением:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \times \bar{c} = \lambda.$$

Относительно пространственной системы координат x_i ($i = 1, 2, 3$) вектор $\bar{a}$ может быть задан выражением (рисунок 1.1, з)

$$\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2 + a_3 \cdot \bar{e}_3, \quad (1.4)$$

где a_i – проекции вектора на координатные оси;

$\bar{e}_i$ – единичные векторы по направлению соответствующих координатных осей.

Таким образом,

$$\bar{a}_i = a \cos \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где α_i – угол между модулем вектора и соответствующей координатной осью.

В теории упругости для сокращения записи формул используется индексная форма. Тогда в индексной форме формула (1.2) запишется в виде

$$\bar{a} = \bar{a}_i \cdot \bar{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Положение вектора в плоскости или пространстве задается направляющими косинусами.

Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ – это косинусы углов, которые вектор образует с положительными направлениями осей координат (см. рисунок 1.1, в, з): направляющие косинусы однозначно задают направление вектора. Направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (a_1 + a_2 + a_3)$ для пространственных осей записываются в виде

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{|\bar{a}|}; \cos \alpha_2 = \frac{a_2}{|\bar{a}|}; \cos \alpha_3 = \frac{a_3}{|\bar{a}|}; \quad (1.5)$$

или, если вектор задан выражением $\bar{a} = (a_x + a_y + a_z)$,

$$\cos \alpha_x = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \cos \alpha_y = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \cos \alpha_z = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \quad (1.6)$$

Тогда $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

В теории упругости направляющие косинусы обозначаются как

$$\cos \alpha_x = l; \cos \alpha_y = m; \cos \alpha_z = n. \quad (1.7)$$

Для записи векторов и при построении их применяется разложение по базису. Совокупность единичных векторов $\bar{e}_i$ (см. рисунок 1.1) образует систему базисных векторов или базис данной системы координат x_i . Три взаимно перпендикулярных вектора с длинами, равными единице: $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$ – образуют ортонормированный базис в пространстве (рисунок 1.2). Базисные орты – это векторы, их обозначают $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

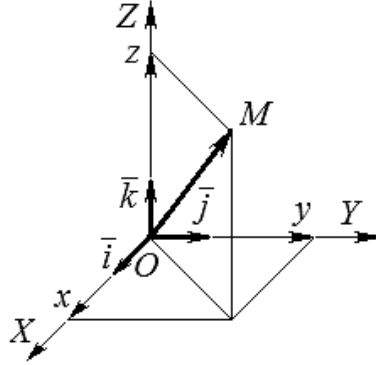


Рисунок 1.2 – Ортонормированный базис в декартовой системе координат

Их называют ортонормированным базисом плоскости или пространства: «орто» – координатные векторы ортогональны; «нормированный» – единичный. Базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых в строгой последовательности перечисляются базисные векторы: $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Координатные векторы нельзя переставлять местами.

Любой вектор $\bar{a}$, соответственно, плоскости либо пространства единственным образом выражается в виде

$$\bar{a} = a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k} \quad \text{либо} \quad \bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad (1.8)$$

где $a_i(1,2,3)$ или $a_i(x,y,z)$ – числа, которые являются координатами вектора в данном базисе.

Выражения (1.8) называются разложением вектора $\bar{a}$ по базису $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

Декартовы координаты вектора – это координаты любого вектора в данном базисе:

$$\bar{a} = (x, y, z) = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}. \quad (1.9)$$

Декартовы прямоугольные координаты (x, y, z) или (a_x, a_y, a_z) вектора $\bar{a}$ равны проекциям этого вектора на оси X, Y, Z соответственно. Эти координаты в записи через направляющие косинусы имеют вид

$$x = |\bar{a}| \cdot l; y = |\bar{a}| \cdot m; z = |\bar{a}| \cdot n; \quad a_x = |\bar{a}| \cdot l; a_y = |\bar{a}| \cdot m; a_z = |\bar{a}| \cdot n. \quad (1.10)$$

1.1.2 Матрицы и тензоры [5]. Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел или других математических величин. Величины, составляющие матрицу, называются ее элементами.

О матрице, имеющей m строк и n столбцов, говорят как о матрице строения $m \times n$, или размера $m \times n$, или порядка $m \times n$. Такая матрица состоит из mn элементов.

Например, матрица строения 2×3

$$\overbrace{\left\{ \begin{matrix} -3 & \sin x & a \\ \sqrt{\pi} & b & 0 \end{matrix} \right\}}^{3 \text{ столбца}} \xrightarrow{2 \text{ строки}} \begin{pmatrix} -3 & \sin x & a \\ \sqrt{\pi} & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_{mn} (m строк и n столбцов)

$$A_{mn} = A_{ij} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Индекс i принимает целочисленные значения от 1 до m , j – от 1 до n . Для квадратной матрицы $m = n$.

Определитель – это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A по определенному правилу.

Квадратная матрица первого порядка: $A = (a)$. Определитель матрицы – число, равное ее элементу:

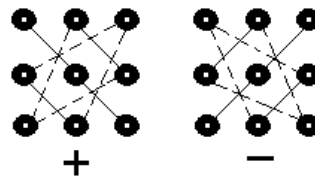
$$\Delta = \det A = a.$$

Определитель квадратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \Delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель квадратной матрицы третьего порядка – число, определяемое по правилу диагоналей и треугольников (см. схему):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.11)$$

Физические законы механики деформируемого твердого тела (МДТТ) выражаются тензорными уравнениями.

Название «тензор» происходит от лат. *tensus* – напряжённый и англ. *tension* – напряжение. В каждой системе координат тензор задается совокупностью чисел, которые при переходе к другой системе координат изменяются по определенному закону. Вследствие линейности тензорных преобразований при этом переходе тензорные уравнения, верные в одной системе, верны и в любой другой: тензорные соотношения инвариантны.

Тензоры классифицируются по рангу. В трехмерном евклидовом пространстве число компонент тензора $n = 3^N$, где N – ранг, или порядок, тензора.

Тензор нулевого ранга ($N = 0$) в любой системе координат задается одной компонентой $n = 3^0 = 1$. Такие тензоры называются скалярами.

Тензоры первого ранга ($N = 1$) имеют в трехмерном пространстве компоненты $n = 3^1 = 3$. Их называют векторами.

В трехмерном пространстве тензор второго ранга имеет девять координатных компонент ($n = 3^2 = 9$).

1.1.3 Операторы Гамильтона и Лапласа. Эти операторы используются при анализе напряженного и деформированного состояния тела. Оператор Гамильтона (оператор набла) – векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам. Обозначается символом ∇ (набла). Этот оператор для трехмерного евклидова пространства, в прямоугольной декартовой системе координат, а также через компоненты:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \rightarrow \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы по осям x, y, z соответственно.

Оператор набла естественным способом выражает один из основных операторов, используемых в механике сплошной среды, – оператор Лапласа (обозначается Δ (дельта)): скалярный оператор, определяемый скалярным произведением: $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$.

Оператор Лапласа в декартовых координатах (x, y, z) есть сумма вторых производных некоторой функции (f) по всем координатам:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(f).$$

1.2 Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности точки нагруженного тела

Теория исследования напряженно-деформированного состояния подробно изложена в [6–8]. В [9] рассмотрены содержание, теория, порядок и пример выполнения индивидуального задания № 1 «Исследование НДС в окрестности заданной точки нагруженного тела».

1.3 Исследование напряженно-деформированного состояния в опасной точке сечения балки

Используя формулы для прямого поперечного изгиба [6–8]:

- рассматриваем расчетную схему балки. Строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x ;
- определяем опасное сечение балки и вычисляем $Q_{\max}$ и $M_{\max}$;
- определяем нормальные и касательные напряжения в опасном слое опасного сечения;
- записываем шаровой тензор и девиатор напряженного состояния (НС) для точек опасного слоя;
- определяем инварианты НС;
- определяем значения главных напряжений, положение главных площадок и величину максимальных касательных напряжений;
- определяем значения относительных линейных деформаций по направлениям осей x , y , z и главных деформаций;
- определяем относительное изменение объема элементарного параллелепипеда.

1.4 Примеры решения типовых задач

1.4.1 Определение направляющих косинусов. Определить направляющие косинусы вектора $\vec{a} \{1, 4, 5\}$ в осях x_i ($i = 1, 2, 3$).

Решение

Модуль вектора (в единицах длины)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{42}.$$

В соответствии с (1.5) и (1.6), направляющие косинусы вектора

$$l = \frac{1}{\sqrt{42}} = 0,1543; \quad m = \frac{4}{\sqrt{42}} = 0,6172; \quad n = \frac{5}{\sqrt{42}} = 0,7715.$$

Проверка правильности решения:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1; \quad 0,1543^2 + 0,6172^2 + 0,7715^2 = 1.$$

1.4.2 Построение вектора по разложению его по базису. Заданы координаты точек вектора: $A(2\bar{i}; -4\bar{j}; 0\bar{k})$; $B(-4\bar{i}; 6\bar{j}; -2\bar{k})$. Построить вектор $\overline{AB}$ по заданному разложению вектора по базису.

Решение

В декартовой системе координат X, Y, Z (рисунок 1.3, *a*) определяем положение точек вектора по их координатам и строим вектор $\overline{AB}$.

На рисунке 1.3, *б* построен свободный вектор $\overline{AB}$. Начало координат размещаем в точке A : $A(0, 0, 0)$. Точка B (конец вектора) имеет координаты: $B(-6\bar{i}; 10\bar{j}; -2\bar{k})$.

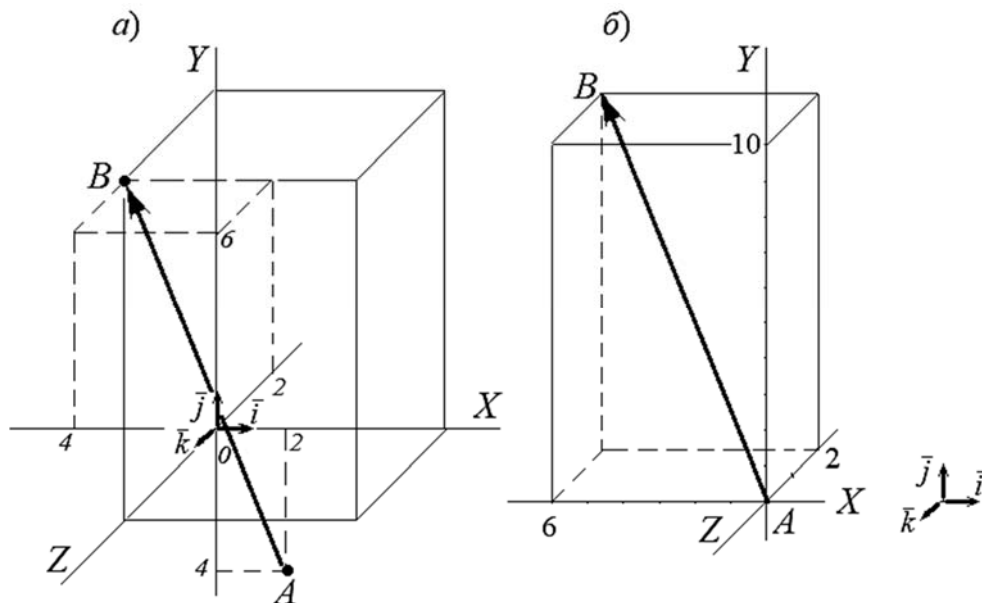


Рисунок 1.3 – Построение вектора $\overline{AB}$ по разложению этого вектора по базису

1.4.3 Расчет определителя матрицы. Найти определитель матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Определитель $\det A$ (см. (1.13))

$$\det A = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) -$$

$$- 2 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) = 16.$$

1.4.4 Определение главных напряжений и относительных линейных деформаций. В жесткой (несжимаемой) плите (рисунок 1.5, а) выполнен паз. В него плотно, без зазора, вставлен кубик с размером ребер 10 мм, который сжимается силой $F = 6$ кН, приложенной в центре тяжести грани. Модуль упругости первого рода материала кубика $E = 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Определить значения главных напряжений и значения относительных линейных деформаций кубика по направлениям главных напряжений.

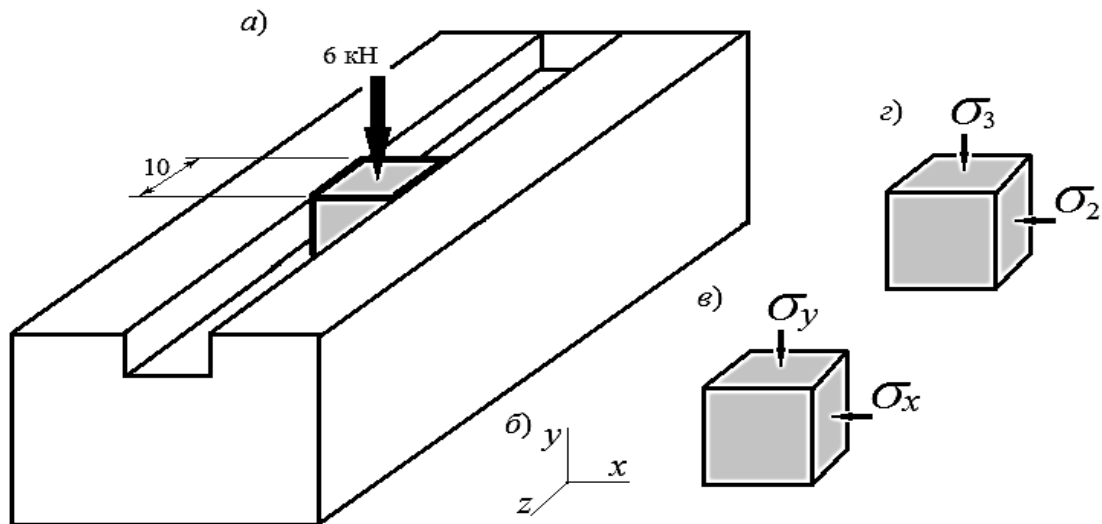


Рисунок 1.4 – Кубик, сжимаемый силой 6 кН

Решение

По условию задачи (рисунок 1.4, б) грань кубика, перпендикулярная оси z , деформируется свободно. Поэтому нормальные напряжения по этой грани будут равны нулю: $\sigma_z = 0$. В направлении оси x деформация кубика запрещена, следовательно, $\epsilon_x = 0$, поэтому напряжения $\sigma_x \neq 0$.

По грани, перпендикулярной оси y , действуют сжимающие нормальные напряжения σ_y . Площадь грани $A = (10 \times 10)$ мм². К грани приложена сжимающая сила $F = 6$ кН. Величина этих напряжений

$$\sigma_y = -\frac{F}{A} = -\frac{6 \cdot 10^3}{10^2 \cdot 10^{-6}} = -60 \text{ МПа.}$$

Таким образом, кубик находится в условиях плоского деформированного состояния (ПДС), т. к. $\varepsilon_x = 0$; $\sigma_x \neq 0$; $\sigma_y \neq 0$; $\sigma_z = 0$.

Для решения задачи используем первые две строки уравнений обобщенного закона Гука в осях x, y, z [6, 8]. В результате простых преобразований получим значения напряжений

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = 0; \quad \sigma_x = \nu\sigma_y = 0,3(-60) = -18 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения на гранях кубика по условию задачи отсутствуют. Следовательно, его грани являются главными площадками. По этим площадкам (рисунок 1.4, *з*) будут действовать главные напряжения. Индексы при этих напряжениях проставляем в соответствии с неравенством $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Получим $\sigma_1 = \sigma_z = 0$; $\sigma_2 = \sigma_x = -18 \text{ МПа}$; $\sigma_3 = \sigma_y = -60 \text{ МПа}$.

Направления главных напряжений совпадают с направлениями осей x, y, z (см. рисунок 1.4, *б*): максимальные σ_1 – с осью z ; минимальные σ_3 – с осью y ; напряжения, имеющие промежуточное значение σ_2 , – с осью x . В соответствии с формулами обобщенного закона Гука [6, 8], определим соответствующие относительные линейные деформации по направлениям главных напряжений (см. рисунок 1.4, *з*):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_z = \frac{1}{10^5}(0 - 0,3(-18 + (-60))) = 23,4 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,234 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x = \frac{1}{10^5}(-18 - 0,3((-60) + 0)) = 0;$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_y = \frac{1}{10^5}((-60) - 0,3(0 + (-18))) = -54,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0,546 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Ответ:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0; \quad \sigma_2 = \sigma_x = -18 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \sigma_y = -60 \text{ МПа}; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_z = 0,234 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_y = -0,546 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

1.5 Задачи для самостоятельного решения

1 Заданы координаты точек вектора: $A(-3, 5)$ и $B(1, -3)$. Найти модуль вектора.

2 Заданы направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$: $l = -0,507$; $m = 0,845$; $n = 0,169$. Построить вектор $\overline{AB}$ в системе базисных ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

2 Решение плоской задачи с использованием функции напряжений Эри

2.1 Методика решения задач теории упругости

В механике материалов [6–8] твердые тела, в зависимости от соотношения длины тела L и высоты поперечного сечения h , подразделяются на балки ($L/h \geq 5$), пластины ($L/h < 5$), массивные тела ($L \approx h \approx b$). В свою очередь, пластины могут иметь малую толщину b (пластинки) и большую толщину (плиты).

В механике материалов рассматриваются расчеты на прочность, жесткость и устойчивость бруса (стержня), имеющего достаточно простую форму: стойки, колонны, балки, валы.

Тела сложной формы, в частности пластины и оболочки, а также массивные тела, не могут быть рассчитаны с использованием элементарных формул механики материалов. Отметим, что большинство деталей, изготавливаемых на основе трехмерных технологий, относятся именно к этим типам тел. Задачи их расчета решаются на основе методов и уравнений механики сплошной упругой среды (ее раздела) – теории упругости [10–17].

В [9] рассмотрены содержание, теория и порядок выполнения индивидуального задания № 2 «Решение плоской задачи через функцию напряжений, выраженную в виде степенного полинома» с примером.

Решение плоской задачи в теории упругости, в зависимости от принятых граничных условий (условий на поверхности тела), сводится к одному из типов задач:

- 1) известны перемещения точек на поверхности тела, определяются напряжения, деформации и перемещения внутри упругого тела, находящегося в равновесии;
- 2) известно распределение сил (напряжений) на поверхности тела, определяются напряжения, деформации и перемещения внутри упругого тела;
- 3) смешанная задача: часть граничных условий задается по типу 1, а часть – по типу 2.

В данных рекомендациях рассматривается метод решения плоской задачи в напряжениях. Для плоской задачи (плоское напряженное и плоское деформированное состояния) [11], если объемной силой является только вес тела ($X_P = 0$; $Y_P = -q$), все компоненты напряжений выражаются через специальную функцию φ – функцию напряжений Эри. Напряжения записываются в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx. \quad (2.1)$$

При этом сама функция Эри должна удовлетворять условию (2.2) – бигармоническому уравнению плоской задачи:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0; \rightarrow \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.2)$$

где ∇ – оператор Гамильтона или оператор набла (см. п. 1.1.3).

Поэтому вид функции Эри подбирают таким образом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия обращались в тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Напряженное состояние в точке тела от заданной нагрузки описывается тензором напряжений. По боковой поверхности пластины в общем случае нагружения распределены напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , которые сводятся к погонным нагрузкам X_v , Y_v , Z_v , приложенным к контуру тела в срединной плоскости. Срединная плоскость – это плоскость, которая делит толщину пластинки пополам.

Для любой наклонной площадки (по отношению к координатным осям), проходящей через данную точку, проекции полного напряжения на координатные оси записываются в виде уравнений равновесия на поверхности тела

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

где X_v , Y_v , Z_v – компоненты напряжений, действующие на поверхности с нормалью v . Иначе говоря, проекции компонент напряжений на координатные оси;

l , m , n – направляющие косинусы между нормалью к рассматриваемой поверхности v и осями координат x , y , z .

Очевидно, что если напряжения задать в виде (2.1), то уравнения сплошности, устанавливающие связь между деформациями (2.3) и (2.4), превратятся в тождества.

В результате для рассматриваемой плоской задачи получим одно уравнение, представленное в напряжениях (уравнение Бельтрами – Митчелла),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.5)$$

Функция Эри может быть задана в виде степенных полиномов второй-четвертой степеней. В [11] предлагаются задачи на применение этой функции для определения внешних нагрузок и распределения компонент напряжений по граням пластины.

2.2 Расчет консольной балки при изгибе (функция напряжений Эри)

Теоретические подходы к решению изложены в [15]. Консольная балка длиной l , высотой $2c$ и толщиной, равной единице, нагружена силой F , которая приложена на свободном конце балки (рисунок 2.1).

Решение получено в [15] в виде (2.6). Функция φ представлена суммой полиномов четвертой и второй степеней:

$$\varphi = \varphi_4 + \varphi_2 = \frac{d_4}{6} xy^3 + b_2 xy, \quad (2.6)$$

где d_4, b_2 – коэффициенты указанных полиномов соответственно.

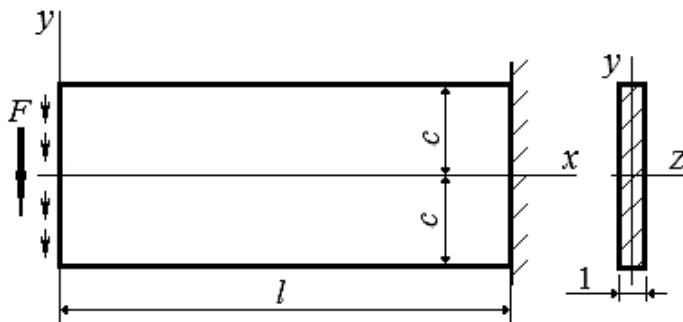


Рисунок 2.1 – К исследованию напряженного состояния консольной балки единичной толщины

Функция напряжений в виде (2.6) удовлетворяет основному уравнению плоской задачи. Выражения для напряжений получены в виде

$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{6} y^2 - b_2.$$

При этом должны выполняться условия [15]:

- касательные напряжения при $y = \pm c$ равны нулю;
- равнодействующая касательных усилий при $x = 0$ равна приложенной на конце консоли силе F . Тогда

$$d_4 = \frac{3}{2} \frac{F}{c^3}; \quad b_2 = -\frac{3}{4} \frac{F}{c}; \quad \varphi = \frac{F}{4c^3} xy^3 - \frac{3}{4} \frac{F}{c} xy.$$

Выражения для напряжений

$$\sigma_x = \frac{3}{2} \frac{F}{c^3} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{3}{4} \frac{F}{c} \left(1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right). \quad (2.7)$$

Полученные формулы полностью совпадают с теми, которые известны из курса механики материалов [6, 8], если рассматривать балку прямоугольного сечения единичной толщины (см. формулы Навье и Журавского).

2.3 Исследование НДС тонких пластин при изгибе

2.3.1 Внутренние силовые факторы. Под пластинкой понимают геометрическое тело, один размер которого значительно меньше двух других, например, если $a < b$, то $\frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$ (рисунок 2.2). Срединная плоскость – плоскость, которая делит пополам высоту поперечного сечения пластинки. Под действием внутренних сил срединная плоскость не искривляется.

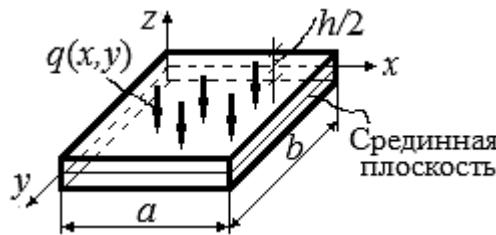


Рисунок 2.2 – Расчетная схема пластинки

В приближённой теории изгиба пластинок (см. рисунок 2.2) все напряжения и деформации могут быть выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки $w(x, y)$, которая, в свою очередь, должна удовлетворять следующим условиям:

1) дифференциальному уравнению изогнутой срединной поверхности пластины (уравнению Софи Жермен)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

где $q(x, y)$ – распределённая, перпендикулярная срединной поверхности пластинки нагрузка;

D – цилиндрическая жёсткость при изгибе, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

2) граничным условиям на контуре пластинки.

Внутренние силовые факторы (ВСФ), возникающие в поперечных сечениях пластинки, показаны на рисунке 2.3.

ВСФ определяются через функцию прогибов $w(x, y)$. Например, погонный изгибающий момент в сечении с нормалью x

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

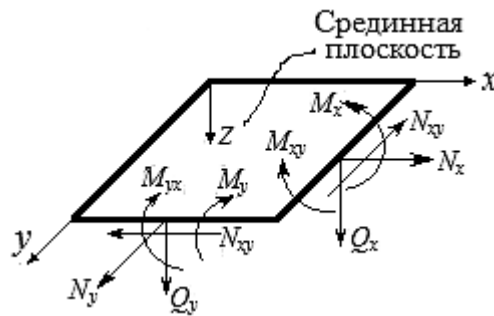


Рисунок 2.3 – Внутренние силовые факторы, приложенные в срединной плоскости

В свою очередь, нормальные σ_x , σ_y и касательные τ_{xy} , τ_{zy} , τ_{zx} напряжения связаны с внутренними силовыми факторами следующими зависимостями:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I}; \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{I}; \quad \tau_{zx} = \frac{Q_x s}{I}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y s}{I}; \quad \tau_{xy} = \frac{H_x z}{I},$$

где I – погонный момент инерции сечения пластинки, $I = \frac{h^3}{12}$;

s – погонный статический момент отсеченной части площади сечения относительно срединной поверхности, $s = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$.

Эти формулы аналогичны формулам, полученным в механике материалов при изгибе балки прямоугольного поперечного сечения шириной, равной единице.

2.4 Примеры решения задач

1 Тонкая (единичной толщины) прямоугольная пластина длиной L и высотой h (рисунок 2.4) при $L/h < 5$ нагружена внешними силами. Объемные силы отсутствуют: $q = 0$. Внешние силы заданы функцией напряжений $\varphi = ax^2 y$ (полиномом третьей степени), где a – коэффициент уравнения, приложены по граням пластины и равномерно распределены по их толщине. Определить внешние силы, приложенные по граням AB и BC , и показать распределение этих сил по заданным граням.

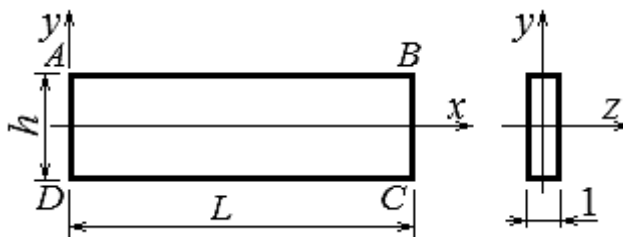


Рисунок 2.4 – Пластина единичной толщины

Решение

1 Проверяем соответствие заданной функции $\varphi = ax^2y$ условию (2.2). Берем частные производные от заданной функции по переменным x , y и смешанную производную от этих переменных:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2axy; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2ay; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = ax^2; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2axy; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2ay; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 2a; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \quad (2.8)$$

Все производные четвертого порядка, которые входят в бигармоническое уравнение (2.2), равны нулю. Поэтому уравнение (2.2) будет удовлетворяться.

2 Определяем выражения для напряжений в общем виде по формулам (2.1) с учетом, что $q = 0$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2ay; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} ax^2y \right) = -2ax.$$

3 Определяем внешние силы, приложенные к граням AB и BC пластины (см. рисунок 2.1). Используем уравнения равновесия (2.4) с учетом того, что рассматривается решение плоской задачи. В указанные уравнения подставляем полученные выше выражения для компонент напряжений.

Получили систему линейных уравнений

$$\begin{cases} X_v = -2ax \cdot m; \\ Y_v = -2ax \cdot l + 2ay \cdot m. \end{cases}$$

4 Поочередно определяем компоненты сил, распределенных по граням пластины (см. рисунок 2.4):

– грань AB , $l = 0$; $m = 1$:

$$X_v = -2ax \cdot 1 \Big|_{x=0}^0 \Big|_{x=L} = -2aL; \quad Y_v = 2ay \cdot 1 \Big|_{y=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = ah;$$

– грань BC , $l = 1$; $m = 0$:

$$X_v = 0; \quad Y_v = -2ax \cdot 1 \Big|_{x=L} = -2aL.$$

5 Используя данные п. 3, строим эпюры внешних сил, действующих на гранях AB и BC пластины (рисунок 2.5).

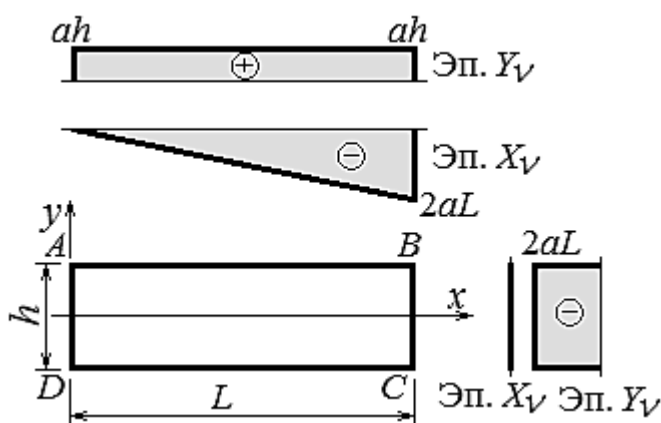


Рисунок 2.5 – Эпюры внешних сил на гранях контура пластины

2.5 Задачи для самостоятельного решения

1 Заданы три функции: $\varphi_1 = Axy^3$; $\varphi_2 = Bx^3y^2$; $\varphi_3 = Axy^2 + Bx^2y^2$. Определить, какая из приведенных функций может быть принята за функцию напряжений при решении плоской задачи теории упругости.

2 Пластина нагружена на кромках распределенной нагрузкой. Определить, какой внешней нагрузке соответствует функция напряжений $\varphi = 2x^3$.

3 Расчет упругих и теплофизических характеристик и прочности однонаправленного слоя композитного материала

3.1 Модель однонаправленного слоя

При изготовлении деталей из композитных материалов возможно применение трехмерных технологий. Поэтому эти материалы также рассматриваются как материалы аддитивного синтеза.

Теория расчета материалов аддитивного синтеза изложена в [18–24]. В [9] рассмотрены содержание, теория и порядок выполнения индивидуального задания № 3 «Определение упругих характеристик двухкомпонентного композиционного материала».

На рисунке 3.1, *а* показана упрощенная модель (модель механической смеси) однонаправленного слоя КМ.

В соответствии с расчетной схемой (рисунок 3.1, *б*):

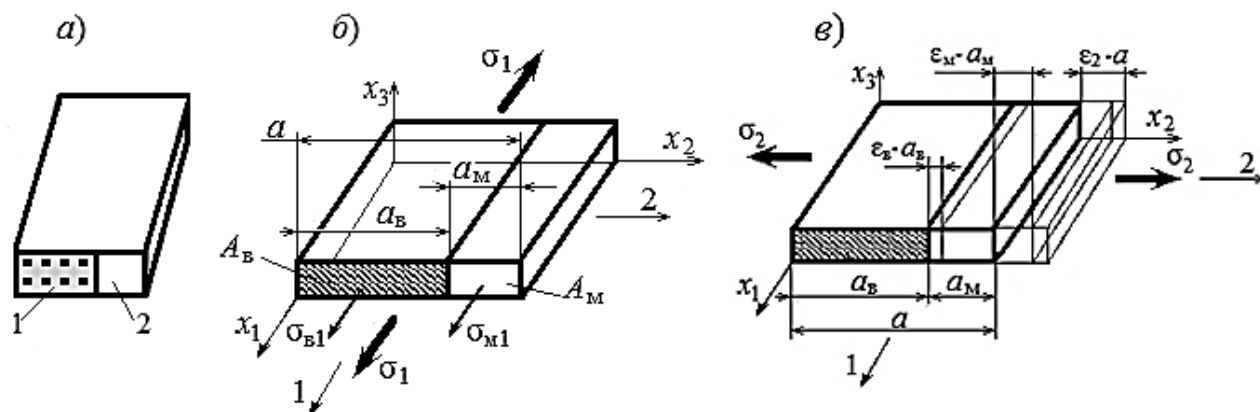
σ_1 – усредненное по площади слоя напряжение в направлении армирования;

σ_{B1} , σ_{M1} – напряжения, действующие на площадях, занятых, соответственно, волокном и матрицей;

A_B – площадь сечения, занятая волокнами;

A_M – площадь сечения, занятая матрицей;

ν_B , ν_M – коэффициенты Пуассона для армирующих волокон и матрицы соответственно.



a – упрощенная модель для определения упругих свойств КМ: 1 – объем, занятый волокном; 2 – объем, занятый матрицей; *б*, *в* – расчетные схемы для определения продольного и поперечного модулей упругости: 1 – направление вдоль армирования; 2 – поперечное направление

Рисунок 3.1 – Модель однонаправленного слоя композитного материала (КМ)

Результаты расчетов с использованием упрощенной модели соответствуют точности, предъявляемой к инженерным расчетам.

Теоретические подходы и примеры расчетов композитных материалов (КМ) заимствованы из [19]. Расчеты выполнены (если не указано иное) для од-

нонаправленного слоя КМ, состоящего из армирующих стекловолокон и эпоксидной матрицы.

Коэффициент армирования ψ_v определяется делением площади, занятой волокном, к общей площади слоя. В рассматриваемых задачах значение коэффициента принимали $\psi_v = 0,6$.

При растяжении в направлении армирования компоненты слоя будут находиться в одноосном напряженном состоянии. Напряжения в поперечном к арматуре направлении малы по величине, поэтому в расчетах не учитываются.

Механические характеристики стекловолокна и эпоксидной матрицы в задачах данного подраздела приведены в таблице 3.1 [23].

3.2 Пример расчета упругих характеристик однонаправленного слоя

3.2.1 Продольный модуль упругости. Модуль упругости продольный E_1 при растяжении однонаправленного слоя вдоль волокон (рисунок 3.1, б)

$$E_1 = E_{B1}\psi_v + E_M(1 - \psi_v) = 70 \cdot 10^3 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,6) = 43,4 \cdot 10^3 \text{ МПа.}$$

3.2.2 Модуль упругости в поперечном направлении. Модуль упругости поперечный E_2 при растяжении модели однонаправленного слоя (рисунок 3.1, в)

$$E_2 = \frac{E_{B2} \cdot E_M}{E_{B2}(1 - \psi_v) + E_M \cdot \psi_v} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 3,5 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,6) + 3,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6} = 5,53 \cdot 10^3 \text{ МПа.}$$

Таблица 3.1 – Механические характеристики стекловолокна и эпоксидной матрицы

Механические характеристики стекловолокна	
Продольный модуль упругости волокна	$E_{B1} = 70 \cdot 10^3 \text{ МПа}$
Поперечный модуль упругости волокна	$E_{B2} = 9,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}$
Модуль сдвига	$G_{B12} = 40 \cdot 10^3 \text{ МПа}$
Коэффициент Пуассона	$\nu_{B1} = \nu_{B2} = 0,22$
Предельное относительное удлинение при растяжении	$\bar{\epsilon}_B^+ \approx 2 \%$
Предельное относительное удлинение при сжатии	$\bar{\epsilon}_B^- \approx 1,7 \%$
Механические характеристики эпоксидной матрицы	
Модуль упругости	$E_M = 3,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$
Модуль сдвига	$G_M = 2,2 \cdot 10^3 \text{ МПа}$
Коэффициент Пуассона	$\nu_M = 0,34$
Предельное относительное удлинение при растяжении	$\bar{\epsilon}_M^+ \approx 4,5 \%$

Принятая упрощенная модель позволяет выполнять предварительный расчет поперечного модуля с погрешностью до 15 %...30 %.

3.2.3 Коэффициенты Пуассона. В обозначениях коэффициентов Пуассона вводится двойной индекс: первая цифра индекса показывает направление действия напряжения, вторая – направление поперечной деформации.

В продольном направлении коэффициент Пуассона ν_{12} от действия напряжения σ_1 (см. рисунок 3.1, б) определяется отношением относительных деформаций слоя: поперечной ε_2 и продольной ε_1 :

$$\nu_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Деформация слоя в поперечном направлении (для модели механической смеси)

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{B2} \cdot \psi_B + \varepsilon_{M2} \cdot (1 - \psi_B),$$

где ε_{B2} , ε_{M2} – относительные поперечные деформации частей, занимаемых волокнами и матрицей.

Продольный коэффициент Пуассона однонаправленного слоя

$$\nu_{12} = \nu_B \psi_B + \nu_M (1 - \psi_B) = 0,22 \cdot 0,6 + 0,34 \cdot (1 - 0,6) = 0,27,$$

где ν_B , ν_M – коэффициенты Пуассона волокна и матрицы соответственно.

В поперечном направлении коэффициент Пуассона определяется из условия ортотропности слоя

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}.$$

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{E_1} = \frac{0,27 \cdot 5,53 \cdot 10^3}{43,4 \cdot 10^3} = 0,034.$$

3.2.4 Продольный (внутрислойный) модуль сдвига. Модуль сдвига G_{12} , в соответствии с рисунком 3.2,

$$G_{12} = \frac{G_{B12} \cdot G_M}{G_{B12}(1 - \psi_B) + G_M \cdot \psi_B} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,6) + 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,6} = 5,08 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

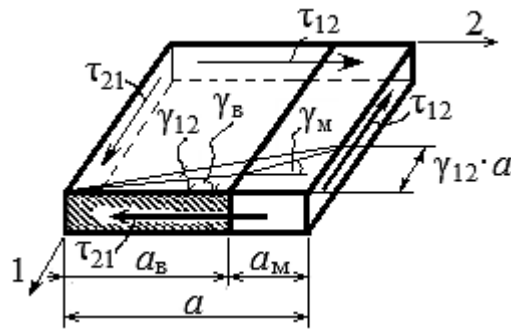


Рисунок 3.2 – Расчетная схема для определения продольного (внутрислойного) модуля сдвига

3.2.5 Оценка влияния неоднородности среды на механические свойства. Упругие характеристики композита были определены в пп. 3.1.1–3.1.4 для однородной среды. Композиты, строго говоря, не являются такой средой.

Погрешность расчетов упругих характеристик, с учетом неоднородности среды, в соответствии с моделью теории упругости

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E_M \left[\frac{(1 + \zeta_E \psi_B) E_{B2} + \zeta_E (1 - \psi_B) E_M}{(1 - \psi_B) E_{B2} + (\zeta_E + \psi_B) E_M} \right] = \\
 &= 3,5 \cdot 10^3 \left[\frac{(1 + 2 \cdot 0,6) \cdot 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot (1 - 0,6) \cdot 3,5 \cdot 10^3}{(1 - 0,6) \cdot 9 \cdot 10^3 + (2 + 0,6) \cdot 3,5 \cdot 10^3} \right] = 6,22 \cdot 10^3 \text{ МПа.} \\
 G_{12} &= G_M \left[\frac{(1 + \zeta_G \psi_B) G_{B12} + \zeta_G (1 - \psi_B) G_M}{(1 - \psi_B) G_{B12} + (\zeta_G + \psi_B) G_M} \right] = \\
 &= 2,2 \cdot 10^3 \left[\frac{(1 + 1 \cdot 0,6) \cdot 40 \cdot 10^3 + 1 \cdot (1 - 0,6) \cdot 2,2 \cdot 10^3}{(1 - 0,6) \cdot 40 \cdot 10^3 + (1 + 0,6) \cdot 2,2 \cdot 10^3} \right] = 7,31 \cdot 10^3 \text{ МПа.}
 \end{aligned}$$

В сравнении с результатами расчетов по упрощенной модели (см. пп. 2 и 4) погрешность расчета составляет:

$$\begin{aligned}
 \text{– погрешность расчета для } E_2 \quad \delta &= \frac{6,22 - 5,52}{6,22} \cdot 100 \% = 11,3 \%. \\
 \text{– погрешность расчета для } G_{12} \quad \delta &= \frac{7,31 - 5,08}{7,31} \cdot 100 \% = 30,5 \%.
 \end{aligned}$$

3.3 Расчет на прочность однонаправленного слоя композитного материала

3.3.1 Характеристики прочности материалов композитов. Ориентировочные характеристики прочности (МПа) материалов приведены в таблицах 3.2 и 3.3 [23].

Таблица 3.2 – Пределы прочности волокна различного вида

Условие нагружения	Вид волокна в составе композита			
	Стеклоянное	Углеродное	Органическое	Борное
Растяжение вдоль волокон	1750	1100	1800	1600
Растяжение поперек волокон	34	33	28	65
Сжатие	650	450	280	240
Сдвиг вдоль волокон	48	27	42	102

3.3.2 Прочность слоя в продольном направлении. По данным таблицы 3.2, предельное относительное удлинение при растяжении матрицы, равное $\bar{\varepsilon}_m^+ \approx 4,5 \%$, больше, чем предельное относительное удлинение стекловолокна при растяжении $\bar{\varepsilon}_b^+ \approx 2 \%$. Следовательно, прочность однонаправленного композита будет определяться прочностью волокон, т. к. они будут разрушаться первыми. В расчетах используем рекомендации [19].

Таблица 3.3 – Пределы прочности матрицы (связующего материала)

Условие нагружения	Связующее в составе композита		
	эпоксидное	полиэфирное	фенолформальдегидное
Растяжение	28...140	23...70	23...78
Сжатие	270...805	50...250	69...205
Сдвиг	42...53	38...48	48

Определяем прочность волокон в продольном направлении:

– при растяжении

$$\bar{\sigma}_1^+ = \bar{\sigma}_{bl}^+ \left(\psi_b + \frac{E_m}{E_{bl}} (1 - \psi_b) \right) = 2200 \cdot \left(0,6 + \frac{3,5 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^3} (1 - 0,6) \right) = 1364 < 1750 \text{ МПа};$$

– причиной разрушения однонаправленного слоя при сжатии также является разрушение волокон. Следовательно, предельная деформация при сжатии однонаправленного слоя композита будет равна предельной деформации волокна при сжатии $\bar{\varepsilon}_b^-$. Нормальные напряжения при сжатии

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1^- &= (E_{B1} \cdot \psi_B + E_M(1 - \psi_B)) \bar{\varepsilon}_B^- = (70 \cdot 10^3 \cdot 0,6 + 3,5 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,6)) \cdot 0,017 = \\ &= 0,74 \cdot 10^3 = 740 > 650 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

3.3.3 Прочность слоя в поперечном направлении. В этом случае прочность слоя будет определяться прочностью связующего (матрицы). Для волокнистых и дисперсно-упрочненных КМ необходимо учесть влияние концентрации напряжений в матрице коэффициентом K_{22} :

$$K_{22} = \frac{1 - \psi_B \left(1 - \frac{E_{M2}}{E_{B2}}\right)}{1 - \left(\frac{4\psi_B}{\pi}\right)^{0,5} \cdot \left(1 - \frac{E_{M2}}{E_{B2}}\right)} = \frac{1 - 0,6 \left(1 - \frac{3,5 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^3}\right)}{1 - \left(\frac{4 \cdot 0,6}{3,14}\right)^{0,5} \cdot \left(1 - \frac{3,5 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^3}\right)} = 1,44;$$

$$\bar{\sigma}_2^+ = \frac{\bar{\sigma}_{M2}^+}{K_{22}} = \frac{28}{1,44} = 19,4 < 28 \dots 140 \text{ МПа}; \quad \bar{\sigma}_2^- = \frac{\bar{\sigma}_{M2}^-}{K_{22}} = \frac{85}{1,44} = 59,0 < 270 \dots 805 \text{ МПа.}$$

3.3.4 Прочность слоя при внутрислойном сдвиге. Определяем прочность аналогично п. 3.3.3 с учетом коэффициента концентрации K_{12} :

$$K_{12} = \frac{1 - \psi_B \left(1 - \frac{G_{M12}}{G_{B12}}\right)}{1 - \left(\frac{4\psi_B}{\pi}\right)^{0,5} \cdot \left(1 - \frac{G_{M12}}{G_{B12}}\right)} = \frac{1 - 0,6 \left(1 - \frac{1,5 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^3}\right)}{1 - \left(\frac{4 \cdot 0,6}{3,14}\right)^{0,5} \cdot \left(1 - \frac{1,5 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^3}\right)} = 0,459;$$

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\bar{\tau}_{M12}}{K_{12}} = \frac{42}{0,459} = 91,5 \text{ МПа} > 42 \dots 53 \text{ МПа.}$$

3.3.5 Напряжение в матрице в момент разрушения волокна. Предполагается, что армированный композит деформируется линейно вплоть до разрушения:

$$\sigma_M = \bar{\varepsilon}_B^+ \cdot E_M = 0,02 \cdot 3,5 \cdot 10^3 = 0,07 \cdot 10^3 = 70 \text{ МПа.}$$

По результатам расчетов получили: прочность волокна при растяжении обеспечена. Волокно при этом может воспринимать сжимающие нагрузки только в составе композита, т. к. напряжения при сжатии волокна превышают его предел прочности. Прочность при растяжении и при сжатии слоя в поперечном направлении обеспечена за счет прочности матрицы. Прочность слоя при внутрислойном сдвиге не обеспечивается.

3.3.6 Общие выводы. Реальная прочность композита отличается от прочности, вычисленной по приведенной методике, в связи с тем, что удовлетворить на практике допущениям, принятым в расчетах, практически невозможно [19]. Величина расхождения между расчетной и реальной прочностью будет зависеть от степени удовлетворения этим допущениям.

Кроме того, прочностные свойства волокон зависят как от химического состава, технологии их получения, наличия механических повреждений на поверхности волокон, так и от их диаметра и длины.

В частности, с увеличением диаметра волокна его прочность падает. Наибольшее использование имеют, например стекловолокна диаметром 6...15 мкм. При этом удельная прочность стекловолокон (отношение предела прочности при растяжении к плотности материала волокна) превышает удельную прочность стальной проволоки.

3.4 Расчет термоупругих характеристик однонаправленного слоя композитного материала

3.4.1 Общие подходы к расчету термоупругих характеристик. В случае, если изделие из КМ эксплуатируется при повышенных температурах, требуется учитывать влияние температуры на упругие характеристики КМ. Расчетом определяются коэффициенты линейного расширения однонаправленного слоя композита. Затем определяются механические характеристики КМ. Они определяются по тем же формулам (см. подразд. 3.1 и 3.2), в которые механические характеристики волокон и материала матрицы подставляются с учетом влияния температуры эксплуатации.

Расчет коэффициентов линейного расширения однонаправленного слоя композита выполняется по формулам:

– в направлении вдоль волокна

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{B1} E_{B1} \psi_B + \alpha_M E_M (1 - \psi_B)}{E_{B1} \psi_B + E_M (1 - \psi_B)};$$

– поперек волокна

$$\alpha_2 = \alpha_{B2} \psi_B (1 + \nu_{B12}) + \alpha_M (1 - \psi_B) (1 + \nu_M) - \alpha_1 [\nu_{B12} \psi_B + \nu_M (1 - \psi_B)].$$

В инженерных расчетах на прочность принимаются следующие допущения: абсолютная адгезия волокон к матрице; абсолютная прямолинейность волокон; равномерность распределения волокон в матрице и их параллельность; отсутствие пор в однонаправленном композите.

Величина расхождения расчетной и реальной прочности будет зависеть от степени удовлетворения указанных допущений.

Для справки, в таблицах 3.4 и 3.5 представлены ориентировочные значения коэффициентов линейного расширения волокон и связующих и значения предела прочности материала матрицы в зависимости от температуры [22, 23].

Таблица 3.4 – Ориентировочные значения коэффициентов линейного расширения волокон и связующих

Волокно				
	стеклянное	углеродное	органическое	борное
$\alpha_{\text{в}} \cdot 10^6, \text{град}^{-1}$	5,6...8,6	5	2...3	7
Связующее				
	эпоксидное	полиэфирное	фенолформальдегидное	
$\alpha_{\text{св}} \cdot 10^6, \text{град}^{-1}$	55	55	55	

Таблица 3.5 – Предел прочности материала матрицы в зависимости от температуры

Максимальная температура материала матрицы	Материал матрицы (связующее)			
	эпоксидное	полиэфирное	фенолформальдегидное	полиимидное
Температура при кратковременном нагружении	150	120	180	300
Рабочая температура	—	—	—	350

Для материалов с не заданной в явном виде максимальной рабочей температурой $T_{\text{раб}}^{\text{max}}$ в первом приближении рекомендуется принимать $T_{\text{раб}}^{\text{max}} = (0,8...0,9)T_{\text{пл}}$.

3.4.2 Пример расчета коэффициентов линейного расширения. Определить коэффициенты для однонаправленного слоя КМ, состоящего из стекловолокна и эпоксидного связующего. Коэффициент армирования $\psi_{\text{в}} = 0,4$. Свойства материалов приведены в таблице 3.6.

Решение

Применим формулы, приведенные в п. 3.3.1. Коэффициент линейного расширения однонаправленного слоя композита в направлении вдоль волокна

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{\text{в1}} E_{\text{в1}} \psi_{\text{в}} + \alpha_{\text{м}} E_{\text{м}} (1 - \psi_{\text{в}})}{E_{\text{в1}} \psi_{\text{в}} + E_{\text{м}} (1 - \psi_{\text{в}})} = 10^{-6} \cdot \frac{8 \cdot 80 \cdot 0,4 + 55 \cdot 4 \cdot (1 - 0,4)}{80 \cdot 0,4 + 4 \cdot (1 - 0,4)} = 11,3 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}.$$

Коэффициент линейного расширения однонаправленного слоя композита в направлении поперек волокна

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_{\text{в2}} \psi_{\text{в}} (1 + \nu_{\text{в12}}) + \alpha_{\text{м}} (1 - \psi_{\text{в}}) (1 + \nu_{\text{м}}) - \alpha_1 [\nu_{\text{в12}} \psi_{\text{в}} + \nu_{\text{м}} (1 - \psi_{\text{в}})] = \\ &= 10^{-6} (8 \cdot 0,4 \cdot (1 + 0,22) + 55 \cdot (1 - 0,4) (1 + 0,4) - 11,3 [0,22 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot (1 - 0,4)]) = 46,4 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}. \end{aligned}$$

Таблица 3.6 – Свойства стекловолокна и эпоксидного связующего (матрицы)

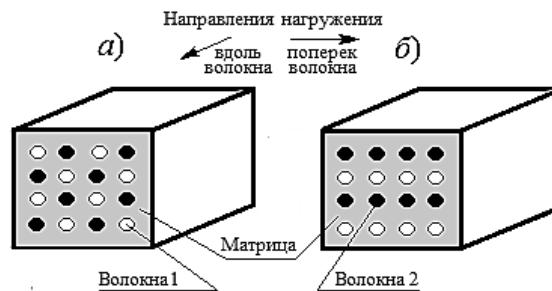
Характеристика	Волокно	Связующее
Продольный модуль упругости	$E_{B1} = 80 \text{ ГПа}$	$E_M = 4 \text{ ГПа}$
Коэффициент Пуассона	$\nu_{B12} = 0,22$	$\nu_M = 0,34$
Продольный коэффициент расширения	$\alpha_{B1} \cdot 10^6 = 8 \text{ град}^{-1}$	$\alpha_M \cdot 10^6 = 55 \text{ град}^{-1}$
Поперечный коэффициент расширения	$\alpha_{B1} = \alpha_{B2}$	—

3.5 Прогнозирование упругих характеристик гибридных композитных материалов

3.5.1 Классификация гибридных материалов. Гибридные композиционные материалы (ГКМ) содержат более одного вида армирующего материала в одной матрице. Тем самым улучшаются упругие и другие характеристики. Получают конструкции с оптимальными свойствами.

В ГКМ, как правило, используют матрицу одного и того же состава, традиционно – термореактивные полимерные материалы: при невысоких температурах – эпоксидные смолы; при высоких рабочих температурах – матрицу на основе полиимидного связующего.

ГКМ классифицируют по видам (рисунок 3.3).



a – внутрислоевая; *б* – межслоевая

Рисунок 3.3 – Виды гибридности композита

Внутрислоевая гибридность – в каждом слое гибридного композита различные волокна регулярно чередуются.

Межслоевая гибридность – каждый слой композита состоит из одного вида волокон.

Волокна различного вида при нагружении включаются в работу последовательно, поэтому при растяжении и сжатии разрушение не является опасным.

При прогнозировании упругих свойств гибридных КМ, как правило, применяется правило смесей. Вклад в величину модуля упругости материала от каждого содержащегося в нем компонента пропорционален объемной доле этого компонента в ГКМ и величине модуля упругости этого компонента.

3.5.2 Пример расчета упругих характеристик гибридного композита.

Определить: модуль продольной упругости E_1 , поперечный модуль упругости E_2 , модуль сдвига G_{12} , коэффициент Пуассона ν_{12} гибридного композита с внутрислойной гибридной структурой (рисунок 3.4), состоящего из бороволокна, стеклянного волокна и полиимидной матрицы. Как изменятся свойства гибридного КМ, если каждый из слоев будет содержать волокна одного вида (межслойная гибридность)?



Рисунок 3.4 – Гибридный композитный материал с внутрислойной гибридной структурой

Решение

1 Используя таблицы, приведенные в [19], определяем механические характеристики компонент гибридного КМ: бороволокна, стекловолокна и полиимидной матрицы (таблицы 3.7–3.9).

2 Упругие характеристики гибридного КМ, не зависящие от вида гибридности, определяются по закону механической смеси:

– коэффициент относительного объемного содержания бороволокна

$$\mu_B = \frac{\psi_B}{\psi_B + \psi_{ст}} = \frac{0,4}{0,4 + 0,3};$$

– модуль продольной упругости E_1 в направлении армирования

$$E_1 = E_B \cdot \psi_B + E_{ст} \cdot \psi_{ст} + E_M \cdot \psi_M = 400 \cdot 0,4 + 70 \cdot 0,3 + 3,2 \cdot 0,3 = 181 \text{ ГПа};$$

– величина коэффициента Пуассона

$$\nu_{21} = \nu_B \cdot \psi_B + \nu_c \cdot \psi_c + \nu_M \cdot \psi_M; \nu_{21} = 0,1 \cdot 0,4 + 0,22 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,2.$$

Таблица 3.7 – Механические характеристики бороволокна

Механическая характеристика	Значение
Модуль продольной упругости $E_{1Б}$, ГПа	400
Модуль поперечной упругости $E_{1Б}$, ГПа	400
Модуль сдвига $G_{12Б}$, ГПа	125
Коэффициент Пуассона ν_B	0,1
Прочность при растяжении вдоль волокон $\bar{\sigma}_B^+$, ГПа	3,5
Предельное удлинение при растяжении вдоль волокна $\bar{\epsilon}_B^+$, %	Не задано
Объемное содержание ψ_B	0,4

Таблица 3.8 – Механические характеристики стекловолокна

Механическая характеристика	Значение
Модуль продольной упругости $E_{1\text{ст}}$, ГПа	70
Модуль сдвига $G_{12\text{ст}}$, ГПа	40
Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{ст}}$	0,22
Прочность при растяжении вдоль волокон $\bar{\sigma}_{\text{ст}}^+$, ГПа	2,2
Предельное удлинение при растяжении вдоль волокна $\bar{\varepsilon}_{\text{ст}}^+$, %	Не задано
Объемное содержание $\psi_{\text{ст}}$	0,3

Таблица 3.9 – Механические характеристики полиимидной матрицы

Механическая характеристика	Значение
Модуль продольной упругости $E_{\text{м}}$, ГПа	3,2
Модуль сдвига $G_{\text{м}}$, ГПа	Не задан
Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{м}}$	0,3
Предельное удлинение $\bar{\varepsilon}_{\text{м}}^+$, %	Не задано
Объемное содержание $\psi_{\text{м}}$	0,3

3 Упругие характеристики КМ с внутрислойной гибридностью:

– поперечный модуль упругости

$$E_{2\text{всл.г}} = \frac{E_{2\text{Б}} \cdot E_{\text{ст}}}{E_{2\text{Б}} \cdot (1 - \mu_{\text{Б}}) + E_{\text{ст}} \cdot \mu_{\text{Б}}} = \frac{400 \cdot 70}{400 \cdot \left(1 - \frac{0,4}{0,7}\right) + 70 \cdot \frac{0,4}{0,7}} = 116 \text{ ГПа};$$

– модуль сдвига

$$G_{12\text{всл.г}} = \frac{G_{12\text{Б}} \cdot G_{\text{ст}}}{G_{12\text{Б}} \cdot (1 - \mu_{\text{Б}}) + G_{\text{ст}} \cdot \mu_{\text{Б}}} = \frac{125 \cdot 40}{125 \cdot \left(1 - \frac{0,4}{0,7}\right) + 40 \cdot \frac{0,4}{0,7}} = 65,4 \text{ ГПа}.$$

4 Упругие характеристики КМ с межслойной гибридностью:

– поперечный модуль упругости

$$E_{2\text{мсл.г}} = E_{2\text{Б}} \cdot \left(1 - \frac{\psi_{\text{Б}}}{\psi_{\text{Б}} + \psi_{\text{ст}}}\right) + E_{\text{ст}} \cdot \frac{\psi_{\text{Б}}}{\psi_{\text{Б}} + \psi_{\text{ст}}} = 400 \cdot \left(1 - \frac{0,4}{0,4 + 0,3}\right) + 70 \cdot \frac{0,4}{0,4 + 0,3} = 211,4 \text{ ГПа};$$

– модуль сдвига

$$G_{12\text{мсл.г}} = G_{12\text{Б}} \cdot \left(1 - \frac{\psi_{\text{Б}}}{\psi_{\text{Б}} + \psi_{\text{ст}}}\right) + G_{\text{ст}} \cdot \frac{\psi_{\text{Б}}}{\psi_{\text{Б}} + \psi_{\text{ст}}} = 125 \cdot \left(1 - \frac{0,4}{0,4 + 0,3}\right) + 40 \cdot \frac{0,4}{0,4 + 0,3} = 76 \text{ ГПа}.$$

Ответ: композитные материалы с межслоевой гибридной демонстрируют более высокие показатели упругих модулей, чем КМ с внутрислоевой гибридной.

3.5.3 Задача для самостоятельного решения. В условии задачи 3.5.2 заменить бороволокно на углеродное волокно и полиимидное связующее на эпоксидное связующее. Как изменится прочность гибридного КМ (межслоевая гибридная)?

4 Предельные поверхности. Построение кругов Мора

4.1 Предельные поверхности прочности материалов

В данном подразделе рассматриваются теоретические вопросы, связанные с исследованием прочности материалов аддитивного синтеза при сложном напряженном состоянии. Анализ изделий, получаемых с использованием аддитивных технологий, показывает, что эти материалы в большинстве являются анизотропными и работают в условиях сложного напряженного состояния.

Обобщение свойств деформирования упругопластического тела, которое оно проявляет при одноосном растяжении-сжатии, на случай сложного напряженного состояния приводит к концепции о существовании поверхности нагружения [25, 26], которая состоит в следующем (рисунок 4.1).

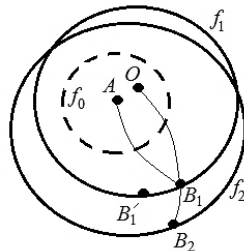


Рисунок 4.1 – К концепции о существовании поверхности нагружения

Начальная поверхность нагружения f_0 показана на рисунке 4.1 штриховой линией. Для каждой текущей точки B_1 произвольной траектории нагружения OB_1 в пространстве напряжений существует поверхность нагружения f_1 , соответствующая пределам упругости: внутренние точки этой поверхности достижимы из данной точки упругим деформированием. Начиная с какой-то точки, траектория нагружения идет внутри поверхности, построенной для этой точки, например B_1A , то новых необратимых деформаций не возникает.

Считается, что в таком процессе сама поверхность нагружения не изменяется; для любой точки такой траектории поверхностью нагружения служит поверхность f_1 . Если же траектория выходит наружу поверхности нагружения, построенной для предыдущей точки, например, траектория B_1B_2 , то возникают новые необратимые деформации. При этом меняется сама поверхность нагружения.

Изменение поверхности нагружения происходит непрерывно: если отрезок B_1B_2 мал, то новая поверхность f_2 , отвечающая точке B_2 , мало отличается от f_1 и в пределе, когда $B_2 \rightarrow B_1$ эти поверхности совпадают [26]. Процесс, сопровождающийся только упругим деформированием материала, называют разгрузкой.

4.2 Методика построения предельных поверхностей прочности

При построении предельной поверхности используют эллипсоид напряжений [27], определяемый геометрическим местом точек, соответствующих концу вектора полных напряжений p_v по уравнению эллипсоида

$$\frac{p_{xv}^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_{yv}^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_{zv}^2}{\sigma_3^2} = 1,$$

где p_{xv} , p_{yv} , p_{zv} – проекции вектора полного напряжения на оси координат x , y , z .

Если одно из главных напряжений равно нулю – эллипсоид вырождается в эллипс (при плоском напряженном состоянии). При известном направлении главных осей напряженное состояние элемента характеризуется главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 . Если выбрать систему координат, совпадающую с главными осями (рисунок 4.2), то точка P_i с координатами σ_1 , σ_2 , σ_3 полностью определит напряженное состояние [28].

Процесс нагружения – переход от состояния P_0 (0, 0, 0) к состоянию P_i (σ_1 , σ_2 , σ_3). Путь нагружения – отрезок OP_i . При некотором критическом значении главных напряжений наступит предельное состояние материала (см. рисунок 4.2, точка Q_i). Совокупность точек Q_i , лежащих на некоторой поверхности, – предельная поверхность.

Предельная поверхность разрушения – геометрическое место точек, координаты которых равны пределам прочности, а точки, лежащие на предельной поверхности пластического течения (предельной поверхности текучести), соответствуют пределам текучести материала при разных напряженных состояниях.

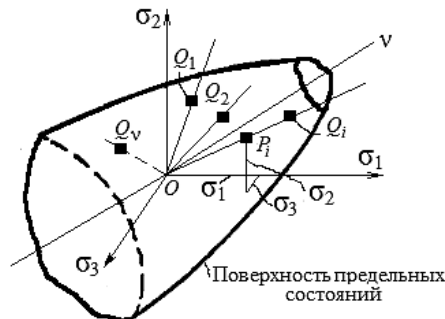


Рисунок 4.2 – Построение поверхности предельных состояний

4.3 Круги напряжений (круги Мора)

4.3.1 Построение кругов Мора. Модель прочности Мора графически представляют в виде кругов напряжений (кругов Мора) (рисунок 4.3, а).

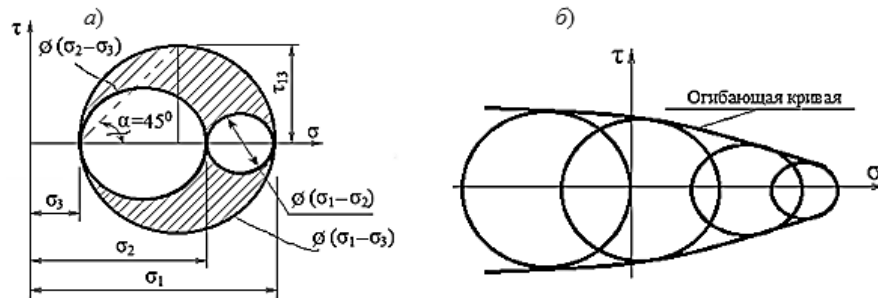


Рисунок 4.3 – Построение кругов Мора для объемного напряженного состояния (а); огибающая кривая для плоского напряженного состояния (б)

Максимальные касательные напряжения $\tau_{\max}$ действуют по площадке, параллельной главному напряжению σ_2 . Эта площадка наклонена к напряжениям σ_1 и σ_3 под углом $\alpha = 45^\circ$. То есть $\tau_{\max}$ будет равно радиусу большого круга и определяется полуразностью главных напряжений τ_{13} :

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_2 = 0$) круг Мора строится по разности напряжений ($\sigma_1 - \sigma_3$).

По соотношениям главных напряжений σ_1 и σ_3 для данного материала получают семейство предельных окружностей (рисунок 4.3, б).

4.3.2 Пример построения круга Мора. В окрестности точки нагруженного тела определено некоторое напряженное состояние, описанное тензором напряжений (МПа):

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & (-20) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Построить круг Мора и определить величину, направление главных максимальных касательных напряжений и положение главных площадок.

Решение

1 В плоской системе координат откладываем заданные значения нормальных и касательных напряжений (рисунок 4.4).

2 Определяем координату центра круга (точка С):

$$\frac{s_x + \sigma_y}{2} = \frac{10 + (-20)}{2} = -5 \text{ МПа.}$$

3 Вычерчиваем окружность с центром в точке $C (0; -5)$.

4 Из точки C проводим луч через точку $B (10; 10)$, который образует с осью σ угол, равный $2\alpha_0$.

5 Из точки A проводим прямую AE под углом α_0 .

6 Из точки D (точки пересечения круга с осью σ) проводим прямую DE , перпендикулярную прямой AE .

7 Из чертежа определяем: значения главных напряжений и их направления, значение максимальных касательных напряжений, положение главных площадок (значение угла α_0):

$$\sigma_1 = 13 \text{ МПа; } \sigma_3 = -23 \text{ МПа; } \tau_{\max} = 17,5 \text{ МПа; } \alpha_0 = 16,5^\circ.$$

8 Главные площадки: площадка DE перпендикулярна вектору σ_1 ; площадка EC перпендикулярна вектору σ_3 .

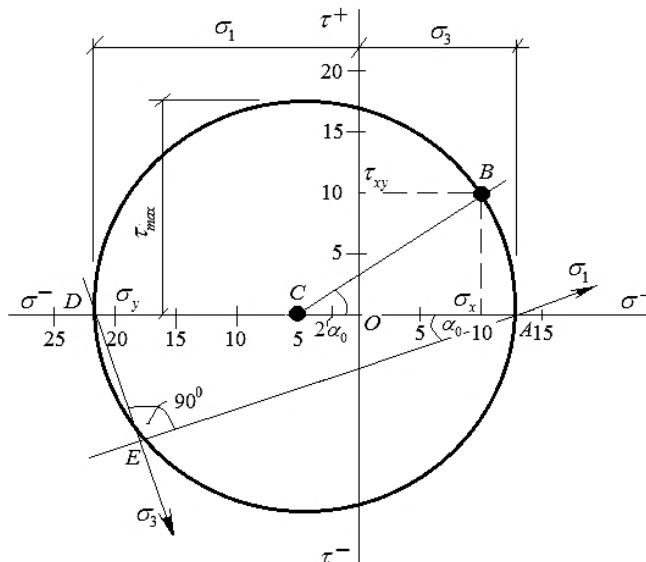


Рисунок 4.4 – Круг Мора, главные напряжения и положение главных площадок DE и EC

4.3.3 Задача для самостоятельного решения. Для исходных данных задачи 4.3.2 определить величину, направление главных напряжений и положение главных площадок, а также вид напряженного состояния по значениям первого, второго и третьего инвариантов напряженного состояния. Использовать [6, 8].

4.4 Критерии прочности материалов

Критерии подробно и обстоятельно рассмотрены в [29], содержание которой кратко изложено ниже.

При воздействии нагрузок на конструкцию ее прочность оценивается по предельному состоянию материалов элементов конструкции. Когда в материале

возникает предельное состояние, то происходит его переход в другое механическое состояние – упругое, пластическое или состояние разрушения.

Для анализа прочности конструкции требуется определить:

- предельные напряжения (или деформации) для данного материала конструкции (экспериментально);
- сопротивление материалов под нагрузкой (теоретически по критериям прочности).

При моделировании конструкций из материалов аддитивного синтеза и композиционных материалов применяют структурный, феноменологический и комбинированный методы.

Структурный метод: рассматривается структура материала и микромеханическое взаимодействие между отдельными элементами компонентов при нагружении всей конструкции.

Феноменологический метод: неоднородный материал рассматривается как осредненный сплошной материал – однородный анизотропный.

Комбинированный метод (структурно-феноменологический): описывают поведение монослоя; многослойный материал описывают как составной.

Базовые критерии (феноменологические модели прочности) традиционно рассматриваются и используются при проведении расчетов в механике (сопротивлении) материалов [6–8]. Их пять: максимальных нормальных напряжений, максимальных деформаций, максимальных касательных напряжений (модель Треска), максимальной удельной потенциальной энергии формоизменения (модель Мизеса) и модель Мора. Определяются так называемые приведенные напряжения $\sigma_{пр}$ (или интенсивность напряжений σ_i). Для каждой модели эти напряжения определяют по соответствующим формулам, в зависимости от условий наступления предельного состояния:

$$\sigma_{пр}^I = \sigma_1; \quad \sigma_{пр}^{II} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3); \quad \sigma_{пр}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Теории I, II практически не используются. Теория III (модель Треска) описывает условие текучести и хорошо отражает поведение идеально пластического материала под произвольной сжимающей нагрузкой.

Теория IV – энергетическая (модель Мизеса или *von Mises*) отображает наступление текучести материала при сложном напряженном состоянии. Это интегральный показатель, который учитывает все шесть компонент напряжений и определяется следующими выражениями:

$$\sigma_{пр}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)};$$

$$\sigma_{пр}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Эпюра напряжений *von Mises* позволяет в целом оценивать уровень нагруженности материала изделия во всех точках его объема.

Теория IY используется для решения прикладных задач на основе МКЭ в программных продуктах (SolidWorks, ANSYS, *NX Nastran*, *PRO/Engineer* и др.). Предельная поверхность описывается цилиндром (рисунок 4.5).

Теория Y (модель прочности Мора) полностью основывается на эксперименте и при пополнении данных может уточняться:

$$\sigma_{\text{пр}}^M = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{Тр}}}{\sigma_{\text{Тсж}}} \sigma_3,$$

где $\sigma_{\text{Тр}}$, $\sigma_{\text{Тсж}}$ – пределы текучести материала при растяжении и сжатии.

Модель Мора устанавливает определенную зависимость прочностных свойств материала от вида напряженного состояния. Используется для расчета материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Заменив в формуле пределы текучести материала на соответствующие пределы прочности, получим критерий разрушения этого материала.

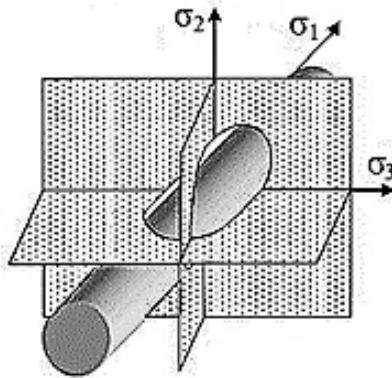


Рисунок 4.5 – Цилиндр Мизеса

Теории IY и Y могут использоваться, в том числе, и для анализа прочности материалов аддитивного синтеза.

4.5 Проверка прочности однонаправленного слоя композитного материала

Помимо теорий прочности, рассмотренных в подразд. 4.4, применительно к расчетам конструкций из пластмасс, стеклопластиков, различных композитных материалов, разработаны теории прочности [29, 30].

Механические свойства большинства пластмасс нестабильны и зависят от многих факторов: температуры, времени и др. Поэтому построение новых теорий, учитывающих всё многообразие факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние материала конструкции, – весьма сложная задача.

В [29, 30] дан аналитический обзор классических и современных критериев статической и усталостной прочности и критериев текучести с учетом анизотропии и зависимости от вида напряженного состояния, необходимый для ис-

пользования в численных расчетах в пакетах прикладных программ механики деформируемого твердого тела.

Для изделий из пластичных материалов недопустимо возникновение больших остаточных деформаций, а для изделий из хрупких материалов – разрушение или образование микротрещин. В связи с этим критерии прочности для хрупких материалов отличаются от критериев прочности для пластичных материалов, но есть и общие критерии для материалов обоих типов – например, критерий Мора и критерий Писаренко – Лебедева.

При исследовании композиционных материалов необходимо учитывать разное сопротивление слоистых и волокнистых материалов сжатию и растяжению, которое определяется свойствами связующего материала и армирующей фазы. Поэтому волокнистые и слоистые материалы существенно прочнее при растяжении в направлениях армирования, чем при сжатии. Прочность в таких материалах обычно выше при растяжении в продольном направлении, при сжатии – выше в поперечном направлении.

5 Расчетная оценка сопротивления элементов конструкций хрупкому разрушению

В связи с тем, что реальные элементы конструкций всегда содержат трещиноподобные дефекты (трещины), при их проектировании необходимо учитывать способность материала противостоять распространению трещин и оценивать условия эксплуатации с точки зрения возможного развития образовавшихся при этом трещин. Для этого в совокупности решаются вопросы о величине и характере деформаций, характере и способе нагружения, геометрии тела, условиях эксплуатации и др. [31–36].

Методы механики разрушения позволяют количественно оценить сопротивление материала распространению трещин и ответить на вопрос: является ли безопасной эксплуатация конструкции при заданных условиях нагружения и геометрии элементов.

В качестве расчетных используются характеристики: критическое напряжение, критическая длина трещины и критические значения коэффициентов интенсивности напряжений при статическом, длительном статическом, циклическом и температурном нагружениях.

При этом определяющим при статическом нагружении является параметр K_{IC} (или соответственно G_{IC}). В заданных условиях скоростного и температурного нагружения величина K_{IC} выступает как страховочная константа, определяющая сопротивление распространению трещины для самых жестких условий нагружения.

5.1 Примеры решения задач

5.1.1 Оценка опасности обнаруженной трещины. В панели обнаружена плоская сквозная трещина в сварном шве. Размеры панели: ширина $b = 2$ м,

толщина $h = 0,1$ м. Панель изготовлена из алюминия и нагружена растягивающей силой $F = 13,7$ МН. Трещина имеет длину $2l = 0,02$ м и расположена в центральной части панели перпендикулярно направлению силы. Критический коэффициент вязкости разрушения для материала панели $K_{IC} = 25$ МПа $\cdot$ м^{1/2}. Безопасна ли эксплуатация такой панели?

Решение

1 Сравниваем длину трещины с шириной панели:

$$b = 2 \text{ м} \gg 2l = 0,02 \text{ м.}$$

Поэтому панель рассматриваем как пластину неограниченной ширины.

2 Определяем рабочее напряжение в поперечном сечении панели:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{13,7 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,1} = 69 \text{ МПа.}$$

3 Определяем критическую длину трещины:

$$l_c = \frac{K_{IC}^2}{\pi \sigma^2} = \frac{25^2}{3,14 \cdot 69^2} = 0,042 \text{ м.}$$

Ответ: критическая длина трещины $2l_c = 0,084 > 2l = 0,02$ м, следовательно, имеющаяся в панели трещина не является опасной.

Однако прежде чем подтвердить безопасность эксплуатации панели, необходимо уточнить причины появления трещины, условия ее роста до 0,02 м, не продолжается ли ее рост из-за усталости или коррозии и как скоро длина трещины может достигнуть критических размеров.

5.1.2 Оценка опасности трещины в балке. В середине нижней полки стальной крановой балки обнаружена поперечная трещина длиной $2l = 0,03$ м. Ширина балки $b = 0,254$ м. Балка эксплуатируется при максимальном растягивающем напряжении $\sigma_{\max} = 172$ МПа. Является ли эксплуатация балки безопасной, если вязкость разрушения стали $K_{IC} = 165$ МПа $\cdot$ м^{1/2}?

Решение

Проверку безопасности балки проведем, определив величину коэффициента интенсивности напряжений и критическую длину трещины. Соотношение размеров: $b = 0,254 \text{ м} \gg 2l = 0,03 \text{ м}$. Поэтому рассматриваем полку крановой балки как полосу неограниченных размеров. Используя расчетные зависимости, приведенные в задаче 5.1.1, определяем значение коэффициента интенсивности:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} = 172 \cdot \sqrt{3,14 \cdot 0,015} = 37,3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Критическая длина трещины

$$l_c = \frac{K_{IC}^2}{\pi \sigma^2} = \frac{165^2}{3,14 \cdot 172^2} = 0,284 \text{ м.}$$

Критические значения коэффициента интенсивности напряжений и длины трещины $K_{IC} = 165 \gg K_I = 37,3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ и $2l_c = 0,568 \gg 2l = 0,03 \text{ м}$ значительно превышают их значения для балки с трещиной.

Эксплуатация балки совершенно безопасна с оговорками, упомянутыми в задаче 5.1.1.

5.2 Оценка прочности консольной балки с трещиной

Основным конструктивным несущим элементом большинства строительных конструкций являются балки с различным поперечным сечением. Одним из часто встречающихся дефектов являются трещины на поверхности различного происхождения.

Механические свойства материала балки и условия ее эксплуатации в значительной степени сказываются на характере разрушения и значениях коэффициента интенсивности напряжений (КИН) и эффективной длины распространяющейся трещины

5.2.1 Исходные данные для решения задачи. Консольная балка [36] прямоугольного поперечного сечения высотой B и основанием t нагружена на конце консоли силой F (рисунок 5.1). Длина балки L . Материал балки – низколегированная сталь 15ХСНД. В результате обследования, на расстоянии a от заделки, обнаружена краевая трещина длиной l .

Определить, возможно ли разрушение балки при нормальной температуре окружающей среды.

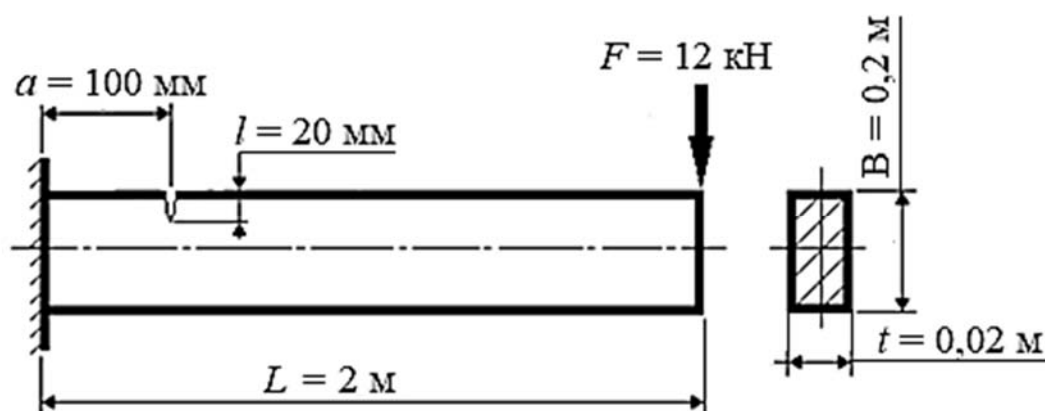


Рисунок 5.1 – Консольная балка прямоугольного сечения с краевой трещиной вблизи заделки

Решение

Балка выполнена из пластичного материала – низколегированной стали 15ХСНД, имеющей механические характеристики [37, табл. 2.1, с. 103], приведенные в таблице 5.1.

Балка работает на поперечный изгиб. Длина балки L значительно больше ширины сечения t , поэтому действием поперечных сил и, соответственно, касательных напряжений пренебрегаем.

Изгибающий момент, его максимальное значение и величину максимальных нормальных напряжений определяем по расчетным зависимостям, известным из курса «Механика материалов и конструкций».

Таблица 5.1 – Механические характеристики низколегированной стали 15ХСНД

Температура испытания, К	Условный предел текучести $\sigma_{0,2}$, МПа	Предел прочности σ_B , МПа	Относительное удлинение, %	Относительное сужение, %	Ударная вязкость, кДж/м ² ·10 ²	Критический КИН K_{IC} , МПа·м ^{1/2}
293	320	510	33	68	9...15	45
253	340	550	34	65	6...11	59
233	350	570	35	64,6	3...5	66

5.2.2 Проверка прочности балки при отсутствии трещины. Проверку прочности проводим для заданных исходных данных, при температуре эксплуатации $T = +20$ °С и величине допускаемого напряжения стали $[\sigma] = 250$ МПа.

Проверка прочности осуществляется для опасного сечения балки, в котором изгибающий момент будет максимальным: в заделке, где $M_{\max} = F \cdot L$.

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_{\max}$ действуют в слоях, наиболее удаленных от нейтрального слоя (от оси X поперечного сечения):

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot F \cdot L}{t \cdot B^2} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,02 \cdot 0,2^2} = 180 \text{ МПа.}$$

Прочность балки обеспечена: $180 \text{ МПа} < 250 \text{ МПа}$.

5.2.3 Проверка прочности балки с трещиной при нормальной температуре эксплуатации. Определим, насколько опасна выявленная трещина ($T = +20$ °С).

1 Проверяем выполнение требований к геометрическим размерам: $L = 2 \text{ м} \gg B = 0,2 \text{ м}$; $B = 0,2 \text{ м} > 5t = 0,1 \text{ м}$; $L = 2 \text{ м} > 10t = 0,2 \text{ м}$. Требования соблюдаются.

Таким образом, данная балка может рассматриваться как полоса ограниченных по высоте размеров с краевой трещиной, нагруженная нормальными напряжениями от изгиба.

2 Значение максимального напряжения рассчитываем по формуле Навье (см. п. 5.2.1), определив максимальный изгибающий момент в сечении, где расположена трещина (см. рисунок 5.1). При этом высота поперечного сечения

уменьшилась на значение длины трещины l , т. е. вместо высоты сечения B в упомянутую формулу подставляем $(B - l)$:

$$M_{\max}^{\text{тр}} = F \cdot (L - a).$$

$$\sigma_{\max}^{\text{тр}} = \frac{6 \cdot F \cdot (L - a)}{t \cdot (B - l)} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot (2 - 100 \cdot 10^{-3})}{0,02 \cdot (0,2 - 20 \cdot 10^{-3})^2} = 211,1 \text{ МПа.}$$

Следует отметить, что при определении максимальных напряжений не учитывалось увеличение этих напряжений за счет влияния достаточно «острого» концентратора (в вершине трещины).

3 По условию данной задачи отношение длины трещины к высоте сечения балки

$$\lambda = \frac{l}{B} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 0,1.$$

Для полосы ограниченных размеров с краевой трещиной нормального отрыва [32, с. 388], при значениях $\lambda \leq 0,7$, поправочная функция

$$f_{IK} = 1,12 - 1,39\lambda + 7,3\lambda^2 - 13,0\lambda^3 + 14,0\lambda^4.$$

$$f_{IK} = 1,12 - 1,39 \cdot 0,1 + 7,3 \cdot 0,1^2 - 13,0 \cdot 0,1^3 + 14,0 \cdot 0,1^4 = 1,04.$$

4 Определение коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Отношение значений напряжений указывает на хрупкое разрушение [31]:

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{тр.}}}{\sigma_{0,2}} = \frac{211,1}{320} = 0,66 < 0,70,$$

поэтому КИН определяем по формуле Гриффитса [31, 32] с учетом значения поправочной функции f_K .

$$K = \sigma \sqrt{\pi l} \cdot f_K,$$

где l – длина краевой трещины;

σ – величина приложенного в сечении нормального напряжения.

5 Значения критического КИН K_{IC} и условного предела текучести $\sigma_{0,2}$ определяем по таблице 5.1 для температуры $+20^\circ\text{C}$.

В вершине трещины имеем плоское деформированное состояние, т. к.

$$\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{0,2}} \right)^2 = \left(\frac{45}{320} \right)^2 = 0,0198 \text{ м} < t = 0,02 \text{ м.}$$

Поэтому в формулу для расчета коэффициента интенсивности напряжений K_I вводим множитель $(1 - \nu^2)$, где ν – коэффициент Пуассона (для стали 15ХСНД примем $\nu = 0,26$).

Тогда для условия данной задачи

$$K_I = \sigma_{\max}^{\text{тр}} \sqrt{\pi l \cdot (1 - \nu^2)} \cdot f_{\text{IK}} = 211,1 \sqrt{3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} (1 - 0,26^2)} \cdot 1,04 = 53,1 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

6 Сравниваем со значением критического КИН (вязкости разрушения) K_{IC} .

Безопасность не обеспечивается: $K_I = 53,1 > K_{\text{IC}} = 45 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$.

7 Определяем критическую длину трещины для плоского деформированного состояния. В расчетную формулу вводим поправку $(1 - \nu^2)$:

$$l_c = \frac{K_{\text{IC}}^2}{\pi (\sigma_{\max}^{\text{тр}})^2 (1 - \nu^2) f_{\text{IK}}^2} = \frac{45^2}{3,14 \cdot 211,1^2 \cdot (1 - 0,26^2) \cdot 1,04^2} = 0,0144 \text{ м}.$$

Выявленная трещина (для ПДС) является опасной, т. к. ее длина превышает критическую длину: $l = 0,02 \text{ м} > l_c = 0,0144 \text{ м}$.

8 Безопасность эксплуатации балки оцениваем по коэффициенту интенсивности напряжений, сравнивая его значение с K_{IC} материала при заданной температуре. Уточняем величины КИН и критической длины трещины с учетом существования зоны пластических деформаций в вершине трещины (по величине эффективной длины трещины $l_{\text{эфф}}$) [31].

Коэффициент интенсивности напряжений K_I определяем по эффективной длине трещины $l_{\text{эфф}}$.

$$l_{\text{эфф}} = l \left(1 + 0,5 \left(\frac{\sigma_{\max}^{\text{тр}}}{\sigma_{0,2}} \right)^2 \right) = 20 \cdot 10^{-3} \left(1 + 0,5 \left(\frac{211,1}{320} \right)^2 \right) = 0,0244 \text{ м}.$$

В случае плоского деформированного состояния, с учетом существования $l_{\text{эфф}}$,

$$K_I = \sigma_{\max}^{\text{тр}} \sqrt{\pi l_{\text{эфф}} \cdot (1 - \nu^2)} \cdot f_{\text{IK}} = 211,1 \sqrt{3,14 \cdot 0,0244 (1 - 0,26^2)} \cdot 1,04 = 58,7 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

Коэффициент интенсивности напряжений значительно превышает его критическое значение: $K_I \gg K_{\text{IC}}$. Расчет показывает, что потенциально возможно разрушение балки с выявленной трещиной.

Прежде чем окончательно установить уровень опасности трещины при эксплуатации балки, необходимо разобраться в том, по какой причине появилась трещина, как она выросла до значения $l_{\text{эфф}}$, не продолжится ли ее рост из-за усталости или коррозии и как скоро длина трещины может достигнуть критических размеров.

5.2.4 Выводы о потенциальной опасности трещины. При отсутствии трещины и $T = +20\text{ }^{\circ}\text{C}$ для заданных механических свойств стали и величине допускаемого напряжения $[\sigma] = 250\text{ МПа}$ исследуемая балка имеет достаточный запас прочности.

В вершине трещины, при $T = +20\text{ }^{\circ}\text{C}$, реализуется плоское деформированное состояние (ПДС). Безопасность балки не обеспечивается, т. к. КИН составляет $K_I = 53,1\text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$, что значительно превышает его критическое значение. Выявленная трещина (для ПДС в вершине трещины) является опасной, т. к. ее длина $l = 0,02\text{ м}$ превышает критическую длину. Потенциально возможно разрушение балки с выявленной трещиной.

5.3 Задача для самостоятельного решения

Выполнить анализ механизма возможного разрушения балки при понижении температуры до $T = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Использовать исходные данные (см. задачу 5.2.1). Определить коэффициент интенсивности напряжений и длину трещины.

6 Прогнозирование трещиностойкости детали, в которой обнаружен дефект в виде трещины

В соответствии с ГОСТ 25.506–85, трещиностойкость есть способность материала сопротивляться развитию трещины при механических и других воздействиях [38].

Расчет на хрупкую прочность основан на определении предела трещиностойкости I_C (рисунок 6.1) по критическому значению коэффициента интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва K_{IC} и разрушающему номинальному напряжению (критическому напряжению) σ_C в соответствии с формулой

$$I_C = K_{IC} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_C}{\sigma_B} \right)^2},$$

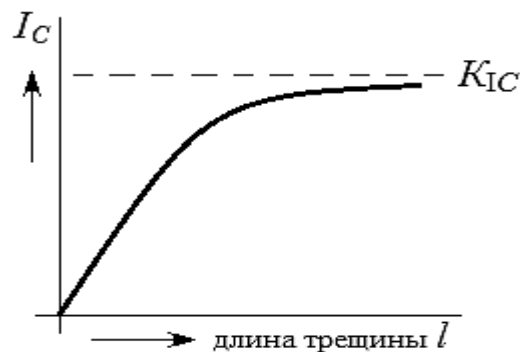


Рисунок 6.1 – К определению предела трещиностойкости

Экспериментальное определение предела трещиностойкости проводится путем доведения до разрушения серии однотипных образцов с трещинами разной длины. Критическое напряжение σ_C определяется по максимальной нагрузке F_C , которую выдерживает образец при растяжении.

На практике предел трещиностойкости определяют в соответствии с выражением

$$I_C = K_C \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_B} \right)^2}.$$

где σ_1 – первое главное напряжение;

K_C – критический коэффициент интенсивности напряжений материала.

Список литературы

- 1 **Ставров, В. П.** Механика композиционных материалов. Практикум : учеб. пособие / В. П. Ставров, А. Л. Наркевич. – Минск: БГТУ, 2012. – 218 с.
- 2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч. 1. – 304 с.
- 3 **Гусак, А. А.** Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак. – Минск : БГУ, 1973. – 532 с.
- 4 **Бронштейн, И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
- 5 **Шихобалов, Л. С.** Матрицы и определители: учеб. пособие / Л. С. Шихобалов. – СПб. : С.-Петерб. гос. ун-т, 2015. – 55 с.
- 6 **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 7 **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.
- 8 **Валишвили, Н. В.** Сопротивление материалов и конструкций : учебник / Н. В. Валишвили, С. С. Гаврюшин. – М. : Юрайт, 2022. – 429 с.
- 9 **Кузменко, И. М.** Механика материалов аддитивного синтеза. Расчетно-проектировочные работы: метод. рекомендации / И. М. Кузменко. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2025. – 35 с.
- 10 **Зубчанинов, В. Г.** Основы теории упругости и пластичности: учебник / В. Г. Зубчанинов. – М. : Высш. шк., 1990. – 368 с.
- 11 **Безухов, Н. И.** Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести: учеб. пособие / Н. И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1965. – 320 с.
- 12 **Безухов, Н. И.** Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач : учеб. пособие / Н. И. Безухов, О. В. Лужин. – М. : Высш. шк., 1974. – 200 с.
- 13 **Безухов, Н. И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.

- 14 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебник / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
- 15 **Теребушко, О. И.** Основы теории упругости и пластичности / О. И. Теребушко. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
- 16 **Молотников, В. Я.** Теория упругости и пластичности: учеб. пособие / В. Я. Молотников, А. А. Молотникова. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2023. – 532 с.
- 17 **Белевич, А. В.** Основы технологической механики : текст лекций / А. В. Белевич. – Владимир : Владимир. гос. ун-т, 1999. – 86 с.
- 18 **Ставров, В. П.** Механика композиционных материалов : учебник / В. П. Ставров. – Минск : БГТУ, 2008. – 262 с.
- 19 **Первушин, Ю. С.** Основы механики, проектирования и технологии изготовления изделий из слоистых композиционных материалов : учеб. пособие / Ю. С. Первушин, В. С. Жернаков. – Уфа : Уфим. гос. авиац. техн. ун-т, 2008. – 303 с.
- 20 **Аннин, Б. Д.** Механика композитов : учеб. пособие / Б. Д. Аннин, Е. В. Карпов. – 2-е изд. – М. : Юрайт, 2021. – 85 с.
- 21 **Ковтунов, А. И.** Слоистые композиционные материалы : электрон. учеб. пособие / А. И. Ковтунов, С. В. Мямин, Т. В. Семистенова. – Тольятти : ТГУ, 2017. – CD-ROM.
- 22 **Максименко, В. Н.** Методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций из композитов : учебник / В. Н. Максименко, И. П. Олегин, Н. В. Пустовой. – Новосибирск : НГТУ, 2015. – 424 с.
- 23 **Васильев, В. В.** Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. – М. : Машиностроение, 1988. – 272 с.
- 24 **Реслер, И.** Механическое поведение конструкционных материалов : учеб. пособие ; пер. с нем. / И. Реслер, Х. Хардерс, М. Бекер. – М. : Интеллект, 2011. – 504 с.
- 25 **Исламов, К. Ф.** Оценка несущей способности пластин и оболочек на основе теории предельного равновесия : дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Исламов Константин Федорович. – Набережн. Челны, 2007. – 226 с.
- 26 **Клюшников, В. Д.** Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников. – М. : Москов. ун-т, 1979. – 207 с.
- 27 **Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. А. Балыкин, И. А. Голубев [и др.]** – Минск : Наука и техника, 1988. – 464 с.
- 28 **Писаренко, Г. С.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – Киев : Наукова думка, 1976. – 415 с.
- 29 **Обзор критериев прочности материалов / Е. И. Орешко, В. С. Ерасов, А. В. Гриневич [и др.]** // Труды ВИАМ. – 2019. – № 9. – С. 108–126.
- 30 **Келлер, И. Э.** Критерии прочности и пластичности : учеб. пособие / И. Э. Келлер, Д. С. Петухов. – Пермь : Перм. нац. исслед. политехн. ун-т, 2020. – 157 с.
- 31 **Кузменко, И. М.** Механика разрушения : учеб. пособие / И. М. Кузменко. – Могилев : МГТУ, 2001. – 174 с.

32 **Пестриков, В. М.** Механика разрушения на базе компьютерных технологий. Практикум / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб. : ВНУ-Петербург, 2007. – 464 с.

33 **Морозов, Е. М.** Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М. : ЛИБРОКОМ, 2017. – 256 с.

34 Сопротивление материалов. Твердость и трещиностойкость наноструктурных керамик : учеб. пособие / О. Л. Хасанов, В. К. Струц, Э. С. Двилис [и др.]. – М. : Юрайт, 2016. – 150 с.

35 **Хижняков, В. И.** Сопротивление материалов. Коррозионное растрескивание : учеб. пособие / В. И. Хижняков. – М. : Юрайт, 2016. – 262 с.

36 **Кузменко, И. М.** Сопротивление разрушению консольной балки с краевой трещиной на поверхности / И. М. Кузменко, В. А. Попковский, А. Д. Крижевский // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2023. – № 3 (80). – С. 26–34.

37 Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 т. / под общ. ред. В. В. Панасюка. – Киев: Наукова думка, 1988–1990. – Т. 3: Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. – 436 с.

38 Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний материалов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении: ГОСТ 25.506–85. – Введ. 01.01.86. – М. : Изд-во стандартов, 1985. – 38 с.