

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная
математика» очной формы обучения*

Часть 1



Могилев 2025

УДК 519.8:531
ББК 22.311
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «7» марта 2025 г.,
протокол № 8

Составитель канд. физ.-мат. наук, доц. С. О. Парашков

Рецензент Н. В. Герасименко

В методических рекомендациях приводится порядок проведения практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование физических процессов». Предназначены для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Часть 1

Ответственный за выпуск	А. В. Хомченко
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать	. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л.	. Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2025

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Простые операции с векторами и матрицами	4
2 Практическое занятие № 2. Системы линейных и матричных уравнений	9
3 Практическое занятие № 3. Вывод квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона.....	18
4 Практическое занятие № 4. Вывод формул численного дифференцирования.....	25
5 Практическое занятие № 5. Численное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера	29
6 Практическое занятие № 6. Численное решение дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты четвертого порядка	34
7 Практическое занятие № 7. Многошаговые методы. Проблема численной устойчивости	39
8 Практическое занятие № 8. Решение краевой задачи в математической физике	43
Список литературы	46

1 Практическое занятие № 1. Простые операции с векторами и матрицами

Общие сведения

MatLAB – система, специально предназначенная для осуществления сложных вычислений с векторами, матрицами и полиномами. Под вектором в MatLAB понимается одномерный массив чисел, а под матрицей – двумерный массив. При этом по умолчанию предполагается, что любая заданная переменная является вектором или матрицей. Например, отдельное заданное число система воспринимает как матрицу размером (1×1) , а вектор-строку из N элементов – как матрицу размером $(1 \times N)$.

Ввод векторов и матриц.

Начальные значения векторов можно задавать с клавиатуры путем поэлементного ввода. Для этого в строке следует сначала указать имя вектора, потом поставить знак присваивания '=', затем – открывающую квадратную скобку, а за ней ввести заданные значения элементов вектора, отделяя их пробелами или запятыми. Заканчивается строка записью закрывающей квадратной скобки.

Например, запись строки $V = [1.2 \quad -0.3 \quad 1.2e-5]$ задает вектор V , который содержит три элемента со значениями 1.2, -0.3 и $1.2e-5$.

После введения вектора система выводит его на экран. То, что в приведенном примере последний элемент выведен как 0, обусловлено установленным форматом short, в соответствии с которым выводятся данные на экран.

Длинный вектор можно вводить частями, которые потом объединять с помощью операции объединения векторов в строку: $v = [v1 \ v2]$.

Язык MatLAB дает пользователю возможность сокращенного введения вектора, значения элементов которого составляют арифметическую прогрессию.

Если обозначить: nz – начальное значение этой прогрессии (значение первого элемента вектора); kz – конечное значение прогрессии (значение последнего элемента вектора); h – разность прогрессии (шаг), то вектор можно ввести с помощью короткой записи $V = nz : h : kz$.

Если средний параметр (разность прогрессии) не указан, то он по умолчанию принимается равным единице. Например, команда

>> -2.1 : 5

приводит к формированию вектора

ans = -2.1000 -1.1000 -0.1000 0.9000 1.9000 2.9000 3.9000 4.9000

Так вводятся векторы-строки. Вектор-столбец вводится аналогично, но значения элементов отделяются знаком ";".

Ввод значений элементов матрицы осуществляется в MatLAB в квадратных скобках, по строкам. При этом элементы строки матрицы один от другого отделяются пробелом или запятой, а строки одна от другой отделяются знаком ";".

Формирование векторов и матриц.

MatLAB имеет несколько функций, которые позволяют формировать векторы и матрицы некоторого определенного вида. К таким функциям относятся следующие.

zeros(M,N) – создает матрицу размером ($M \times N$) с нулевыми элементами, например:

» **zeros**(3,5)

ans =

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

ones(M,N) – создает матрицу размером ($M \times N$) с единичными элементами.

eye(M,N) – создает единичную матрицу размером ($M \times N$), т. е. с единицами по главной диагонали и остальными нулевыми элементами.

rand(M,N) – создает матрицу размером ($M \times N$) из случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне от 0 до 1.

randn(M,N) – создает матрицу размером ($M \times N$) из случайных чисел, распределенных по нормальному (гауссовому) закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным (среднеквадратичным) отклонением, равным единице.

hadamard(N) – создает матрицу Адамара размером ($N \times N$).

hilb(N) – создает матрицу Гильберта размером ($N \times N$).

invhilb(N) – создает обратную матрицу Гильберта размером ($N \times N$).

pascal(N) – создает матрицу Паскаля размером ($N \times N$).

В языке MatLAB предусмотрено несколько функций, которые позволяют формировать матрицу на основе другой (заданной) или используя некоторый заданный вектор. К таким функциям принадлежат следующие.

fliplr(A) – формирует матрицу, переставляя столбцы известной матрицы A относительно вертикальной оси.

flipud(A) – переставляет строки заданной матрицы A относительно горизонтальной оси.

rot90(A) – формирует матрицу путем «поворота» заданной матрицы A на 90° против часовой стрелки.

reshape(A,m,n) – образует матрицу размером ($m \times n$) путем выборки элементов заданной матрицы A по столбцам и последующего распределения этих

элементов по n столбцам, каждый из которых содержит m элементов; при этом число элементов матрицы A должно равняться $m \times n$.

tril(A) – образует нижнюю треугольную матрицу на основе матрицы A путем обнуления ее элементов выше главной диагонали.

triu(A) – образует верхнюю треугольную матрицу на основе матрицы A путем обнуления ее элементов ниже главной диагонали.

hankel(V) – образует квадратную матрицу Ганкеля, первый столбец которой совпадает с заданным вектором V .

Процедура ***diag***(x) – формирует или извлекает диагональ матрицы.

Если x – вектор, то функция ***diag***(x) создает квадратную матрицу с вектором x на главной диагонали.

Чтобы установить заданный вектор на другую диагональ, при обращении к функции необходимо указать еще один параметр (целое число) – номер диагонали (*при этом* диагонали отсчитываются от главной вверх).

Если x – матрица, то функция ***diag*** создает вектор-столбец, который состоит из элементов главной диагонали заданной матрицы x , например, для матрицы A , указанной перед примером применения процедуры ***fliplr***.

Если при этом указать дополнительно номер диагонали, то можно получить вектор-столбец из элементов любой диагонали матрицы x .

Функция ***zeros***(1, N) формирует (создает) вектор-строку из N нулевых элементов. Аналогично ***zeros***(N , 1) создает вектор-столбец из N нулей.

Векторы, значения элементов которых являются случайными равномерно распределенными, формируются таким образом: ***rand***(1, n) – для вектора-строки и ***rand***(m , 1) – для вектора-столбца.

Действия над векторами.

Будем различать две группы действий над векторами:

1) векторные действия – т. е. такие, которые предусмотрены векторным исчислением в математике;

2) действия по преобразованию элементов – это действия, которые преобразуют элементы вектора, но не являются операциями, разрешенными математикой.

Векторные действия над векторами.

Сложение векторов. Как известно, суммироваться могут только векторы одинакового типа (т. е. такие, которые являются или векторами-строками, или векторами-столбцами), имеющие одинаковую длину (т. е. одинаковое количество элементов). Если X и Y – именно такие векторы, то их сумму Z можно получить, введя команду $Z = X + Y$. Аналогично осуществляется вычитание векторов, имеющих одинаковую структуру ($Z = X - Y$).

Транспонирование вектора осуществляется применением знака апострофа, который записывается сразу за записью имени вектора, который нужно транспонировать.

Умножение вектора на число осуществляется в MatLAB таким образом: $Z = X \cdot r$ или $Z = r \cdot X$, где r – некоторое действительное число.

Умножение двух векторов определено в математике только для векторов одинакового размера (длины) и лишь тогда, когда один из векторов-множителей – строка, а второй – столбец. Иначе говоря, если векторы X и Y являются строками, то математический смысл имеют лишь две формы умножения этих векторов: $U = X' \cdot Y$ и $V = X \cdot Y'$. При этом в первом случае результатом будет квадратная матрица, а во втором – число.

Матричные функции.

Вычисление матричной экспоненты (e^A) осуществляется с помощью функций *expm*, *expm1*, *expm2*, *expm3*. Эти функции следует отличать от прежде рассмотренной функции *exp(A)*, которая формирует матрицу, каждый элемент которой равен e в степени, которая равняется соответствующему элементу матрицы A .

Функция *expm* является встроенной функцией MatLAB. Функция *expm1(A)* реализована как М-файл, который вычисляет матричную экспоненту путем использования разложения Паде матрицы A . Функция *expm2(A)* вычисляет матричную экспоненту, используя разложение Тейлора матрицы A . Функция *expm3(A)* вычисляет матричную экспоненту на основе использования спектрального разложения A .

Функция *logm(A)* осуществляет обратную операцию – логарифмирование матрицы по натуральному основанию.

Задание

Вычислите значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с шагом h для функции из таблицы 1.1.

Таблица 1.1 – Задание для самостоятельного выполнения

Номер варианта	$f(x)$	a	b	h
1	$\frac{x^2}{1 + 0,25\sqrt{x}}$	1,1	3,1	0,2
2	$\frac{x^3 - 0,3x}{\sqrt{1 + 2x}}$	2,05	3,05	0,1
3	$\frac{2e^{-x}}{2\pi + x^3}$	0	1,6	0,16
4	$\frac{\cos \pi x}{\sqrt{1 - 3x}}$	-1	0	0,1

Окончание таблицы 1.1

Номер варианта	$f(x)$	a	b	h
5	$\sqrt{1+4x} \sin \pi x$	0,1	0,8	0,07
6	$\frac{e^{x/3}}{1+x^2}$	1,4	2,4	0,1
7	$e^{-2x} + x^2 - 1$	0,25	2,25	0,2
8	$(e+x) \sin(\pi \sqrt{x-1})$	1,8	2,8	0,1
9	$\sqrt{3+2x} \tan \frac{\pi x^3}{2}$	0,1	0,9	0,08
10	$\sqrt{2+3x} \ln(1+3x^2)$	-0,1	0,9	0,1
11	$\sqrt[3]{x^2+3} \cos \frac{\pi x}{2}$	1	2,5	0,15
12	$(4+7x) \sin(\pi \sqrt[3]{1+x})$	0	7	0,7
13	$e^{-x^2} (1+3x-x^2)$	0	2	0,2
14	$x^3 - 3x + \frac{8}{\sqrt{1+x^2}}$	0	1,7	0,17
15	$\sqrt{sh \sqrt{2\pi x}}$, где $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	0	1,2	0,12
16	$\sqrt{ch \sqrt{2\pi x}}$, где $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	0,5	1,5	0,1
17	$\frac{x^3 + 2x}{\sqrt{1+e^x}}$	-0,2	0,8	0,1
18	$\sqrt{1+2x^2} \sin \frac{3x}{2}$	2	4	0,2
19	$\sqrt{3x^2+5} \cos \frac{\pi x}{2}$	0,5	1,5	0,1
20	$\arccos e^{-\sqrt[3]{3x}}$	0,2	0,5	0,03
21	$\arcsin e^{-x^2/5}$	8	13	0,5
22	$x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	-0,5	0,5	0,1
23	$\frac{1+e^{-x^2/2}}{\sqrt{3x^2+1}}$	3	5	0,2
24	$3x^3 + \frac{1}{x} + e^{-2x^2}$	1,2	2,2	0,1
25	$x^{2x+1} + x^3 - 2x$	1	5	0,4

Контрольные вопросы

- 1 Как вводятся векторы в языке MatLAB? Какими функциями можно формировать векторы в языке MatLAB?
- 2 Какие функции MatLAB разрешают преобразовывать вектор поэлементно?
- 3 С помощью каких средств в MatLAB осуществляются основные операции с векторами?
- 4 Как вводятся матрицы в системе MatLAB?
- 5 Какие функции имеются в MatLAB для формирования матриц определенного вида?
- 6 Как сформировать матрицу: по заданным векторам ее строк; по заданным векторам ее столбцов; по заданным векторам ее диагоналей?
- 7 Какие функции поэлементного преобразования матрицы есть в MatLAB?
- 8 Как осуществляются в MatLAB обычные матричные операции?
- 9 Как решить в MatLAB систему линейных алгебраических уравнений?

2 Практическое занятие № 2. Системы линейных и матричных уравнений

Общие сведения

Матрицы. Действия над матрицами.

Рассмотрим прямоугольную таблицу чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Данная таблица чисел называется матрицей размерности $m \times n$, где m – количество строк; n – количество столбцов.

Числа a_{ij} (где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) называются элементами данной матрицы A . Индексы i и j указывают номера строки и столбца, в пересечении которых стоит элемент a_{ij} (a_{32} – третья строка, второй столбец). Если $m = n$, то матрица A называется квадратной порядка n . Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы A . Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нулевые, называется единичной матрицей.

Суммой $A + B$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B : $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением $k \cdot A$ матрицы $A = (a_{ij})$ на число $k \neq 0$ называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на число k :

$$B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ на матрицу $B = (b_{jk})$ размерности $n \times p$ называется матрица $C = (c_{ik})$ размерности $m \times p$, каждый элемент которой c_{ik} , стоящий в i -й строке и k -м столбце, равен сумме парных произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и k -го столбца матрицы B :

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Эти матрицы можно перемножить, т. к. количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы ($2 = 2$). Получилась матрица размерности 3×3 , т. е. квадратная матрица третьего порядка.

Задание

1 Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверить, выполняется ли равенство $(A + B)C = AC + BC$.

2 Вычислить $3A + 2B$, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3 Выполнить действия над матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^3;$$

$$\text{б) } (4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 1) \cdot (3 \ 1 \ -1 \ 5 \ 2)^T; \text{ г) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4 Найти $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Определители произвольного порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, который получится, если в исходном определителе вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент a_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число, которое вычисляется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Свойства определителей.

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков.

Свойство 1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот, т. е. $\det A = \det A^T$, где A^T – матрица, транспонированная матрице A .

Свойство 2. Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Свойство 3. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Проверим это свойство на примере определителя второго порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\det A.$$

Свойство 4. Если какие-либо две строки (столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 5. Если в определителе элементы двух строк (столбцов) соответственно равны друг другу, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Если определитель имеет столбец (строку) из нулей, то определитель равен нулю.

Свойство 7. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Задание

1 Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2 Вычислить определитель разложением по элементам сначала первой строки, а затем по элементам второго столбца:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$\text{е) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение систем линейных уравнений. Метод Крамера.

Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений n -линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots; \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Составим главный определитель из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (2.1) имеет решения, которые находятся по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель Δ_i ($i = \overline{1, n}$) получается из главного определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta = 0$, то система (2.1) не имеет решений.

Задание

1 Решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} -5x + y + z = 0; \\ x - 6y + z = 0; \\ x + y - 7z = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9; \\ 3x - 5y + z = -4; \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x + y + z = 0; \\ 3x + 6y + 5z = 0; \\ x + 4y + 3z = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - y + 3z = 9; \\ 3x - 5y + z = -4; \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x - y - z = 0; \\ x + 4y + 2z = 0; \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + 2y - z = 2; \\ 2x - 3y + 2z = 2; \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$$

Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений матричными способом. Матричные уравнения.

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A является невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель матрицы A равен нулю, то она является вырожденной.

Матрицей, союзной к матрице A , называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется обратной матрице A , если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A .

Теорема. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна $\Leftrightarrow$ исходная матрица A невырожденная.

Формула нахождения обратной матрицы для невырожденной квадратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T,$$

где A_{ij} – матрица из алгебраических дополнений;

$(A_{ij})^T$ – матрица, транспонированная матрице из алгебраических дополнений.

Формулы для вычисления обратных матриц второго и третьего порядков имеют вид:

при $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix};$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

при $n = 3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix};$

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Матричные уравнения.

Обратная матрица применяется при решении матричных уравнений. Рассмотрим три типа матричных уравнений.

Случай 1. Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B, \quad (2.4)$$

где A, B – известные матрицы;

X – неизвестная матрица.

Умножим обе части равенства (2.4) слева на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \quad \text{т. к. } A^{-1} \cdot A = E.$$

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad \text{т. к. } E \cdot X = X. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) позволяет найти неизвестную матрицу X .

Случай 2. Рассмотрим матричное уравнение

$$X \cdot A = B, \quad (2.6)$$

где A, B – известные матрицы;

X – неизвестная матрица.

Умножим обе части равенства (2.6) справа на A^{-1} :

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}, \quad X \cdot E = B \cdot A^{-1}, \text{ т. к. } A \cdot A^{-1} = E.$$

$$X = B \cdot A^{-1}, \text{ т. к. } X \cdot E = X. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) позволяет найти неизвестную матрицу X .

Случай 3. Рассмотрим матричное уравнение

$$A \cdot X \cdot D = B, \quad (2.8)$$

где A, D, B – известные матрицы;

X – неизвестная матрица.

Умножим обе части равенства (2.8) слева на A^{-1} и справа на D^{-1} , получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot D \cdot D^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot D^{-1}, \text{ т. к. } A^{-1} \cdot A = E, \quad D \cdot D^{-1} = E.$$

Имеем

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot D^{-1}. \quad (2.9)$$

Формула (2.9) позволяет найти неизвестную матрицу X .

Задание

1 Найти матрицы A^{-1} , обратные для данных матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Решить систему матричным способом:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x + 3y = -6; \\ -2x + y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 2z = 1; \\ 2x + y - 2z = 2; \\ 2x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

3 Решить матричное уравнение:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования матриц. Метод Гаусса.

Напомним элементарные преобразования матрицы:

- 1) перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы;
- 2) умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю;
- 3) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число, не равное нулю;
- 4) отбрасывание нулевой строки (столбца);
- 5) транспонирование матрицы.

Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Обозначение $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такая матрица

называется канонической:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений методом Крамера и матричным способом удобно в случае решения систем двух или трех уравнений.

В случае решения систем большего числа уравнений и неизвестных проще использовать метод Гаусса, который состоит в последовательном исключении переменных.

Метод Гаусса отличается от методов Крамера и матричного еще и тем, что его можно применять при решении систем, имеющих m уравнений и n неизвестных. При решении систем линейных уравнений методом Гаусса удобно использовать запись в матричной форме.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя элементарные преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. В общем случае, если дана система из m уравнений и n неизвестных, матрица имеет вид

$$A | B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right).$$

Эта матрица называется расширенной матрицей системы.

Система, которая соответствует преобразованной матрице $A | B$, эквивалентна исходной системе, т. е. имеет те же решения.

Задание

1 Решить систему методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y - z = 4; \\ 3x + 4y - 2z = 11; \\ 3x - 2y + 4z = 11; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + 2y - z = 2; \\ 2x - 3y + 2z = 2; \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9; \\ 3x - 5y + z = -4; \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} -5x + y + z = 0; \\ x - 6y + z = 0; \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - y + 3z = 9; \\ 3x - 5y + z = -4; \\ 4x - 7y + z = 5; \end{cases}$$

3 Практическое занятие № 3. Вывод квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона

Общие сведения

Квадратурные формулы.

В качестве приближенного значения интеграла рассматривается число

$$I_n = \sum_{i=0}^n q_i f(x_i), \quad (3.1)$$

где $f(x_i)$ – значения функции $f(x)$ в точках $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$;

q_i – числовые коэффициенты.

Формула (3.1) называется квадратурной формулой. Точки x_i называются узловыми точками или узлами квадратурной формулы, а числа q_i – весовыми коэффициентами или весами квадратурной формулы.

Разность

$$R_n = I - I_n = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n q_i f(x_i)$$

называется погрешностью квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора весовых коэффициентов. Говорят, что квадратурная формула точна для многочленов степени s , если при замене $f(x)$ на произвольный алгебраический многочлен степени не выше s приближенное равенство $I \approx I_n$ становится точным.

Введем некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k[a, b]$, и писать $f \in C^k[a, b]$, если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем непрерывные производные до порядка k включительно.

Определение 2. Пусть $\varphi(h)$ – некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0, c, k , что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0 < h \leq h_0$, выполняется неравенство

$$|\varphi(h)| \leq ch^k,$$

то пишут

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

и говорят, что $\varphi(h)$ есть O большое от h^k (при $h \rightarrow 0$).

Согласно данному определению, выполняются следующие очевидные свойства. Если $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$, причем $D_\varphi = D_\psi$, то

$$\varphi(h) + \psi(h) = O(h^k),$$

т. е.

$$O(h^k) + O(h^k) = O(h^k).$$

Если $k > m > 0$, то $O(h^k)$ в то же время есть $O(h^m)$. Наконец, если $\varphi(h) = O(h^k)$, то $\alpha\varphi(h) = O(h^k)$, где α – постоянная, не зависящая от h .

Рассмотрим наиболее простые квадратурные формулы.

Формула средних прямоугольников.

Допустим, что $f \in C^2\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, $h > 0$. Положим приближенно

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx hf_0, \quad (3.2)$$

где $f_0 = f(0)$.

Формула (3.2) означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, аппроксимируется площадью закрашенного прямоугольника, высота которого равна значению f_0 функции $f(x)$ в средней точке $x = 0$ отрезка $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. Формула (3.2) называется формулой средних прямоугольников.

Получим формулу средних прямоугольников с остаточным членом. Пусть

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = f_0$, $F''(0) = f'_0$, $F'''(0) = f''_0(x)$, то, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$F\left(\pm \frac{h}{2}\right) = F(0) \pm \frac{h}{2} F'(0) + \frac{h^2}{8} F''(0) \pm \frac{h^3}{48} F'''(\xi_{\pm})$$

или

$$F\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \pm \frac{h}{2} f_0 + \frac{h^2}{8} f'_0 \pm \frac{h^3}{48} f''(\xi_{\pm}), \quad (3.3)$$

где ξ_+ , ξ_- – некоторые точки, причем $-\frac{h}{2} < \xi_- < 0 < \xi_+ < \frac{h}{2}$.

С учетом (3.3), получаем

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = F\left(\frac{h}{2}\right) - F\left(-\frac{h}{2}\right) = hf_0 + \frac{h^3}{24} \frac{f''(\xi_-) - f''(\xi_+)}{2}.$$

Далее понадобится следующая лемма.

Пусть $f \in C^1[a, b]$, $\xi_i \in [a, b]$ – произвольные точки, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)) / n = f(\xi).$$

Эта лемма вытекает из очевидных неравенств

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)) / n \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

и теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Используя лемму, получаем формулу средних прямоугольников с остаточным членом

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = hf_0 + \frac{h^3}{24} f''(\xi), \quad |\xi| \leq \frac{h}{2}.$$

Формула трапеций.

Пусть $f \in C^2[0, h]$. Полагаем, что

$$I = \int_0^h f(x)dx \approx h \frac{f_0 + f_1}{2}, \quad (3.4)$$

где $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(h)$.

Из формулы (3.4) видно, что искомое значение интеграла приближенно заменяется величиной площади трапеции.

Аналогично тому, как это сделано для формулы средних прямоугольников, можно получить формулу трапеций с остаточным членом

$$\int_0^h f(x)dx = h \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [0, h].$$

Формула Симпсона.

Предположим, что $f \in C^4[-h, h]$ и требуется вычислить интеграл

$$I = \int_{-h}^h f(x)dx.$$

Значение этого интеграла приближенно заменяем величиной площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $p(x)$, проходящей через точки $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1) , где $f_i = f(ih)$, $i = -1, 0, 1$. Эта парабола задается уравнением

$$p(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2}x^2$$

и

$$\int_{-h}^h p(x)dx = \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Следовательно,

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1). \quad (3.5)$$

Формула Симпсона с остаточным членом имеет вид

$$\int_{-h}^h f(x)dx = \frac{h}{3}(f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [-h, h].$$

Рассмотренные квадратурные формулы средних прямоугольников (3.2), трапеций (3.4) и Симпсона (3.5) назовем каноническими.

Составные квадратурные формулы.

На практике, если требуется вычислить приближенно интеграл, обычно делят заданный отрезок $[a, b]$ на n равных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = (b - a) / n$. На каждом частичном отрезке используют каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. При применении формул средних прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков удобно принять за h , а при использовании формулы Симпсона – за $2h$. В результате получаются следующие формулы, которые будем называть составными.

Составная квадратурная формула средних прямоугольников записывается в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(f_{c1} + f_{c2} + \dots f_{cn}), \quad (3.6)$$

где $h = (b - a) / n$, $f_{ci} = f(x_{ci})$, $x_{ci} = a + (i - 1 / 2)h$, $i = 0, 1, \dots, n$ – координаты средних точек частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

Погрешность R_n получается в результате суммирования погрешностей по частичным отрезкам:

$$R_n = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \right),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

В соответствии со сформулированной выше леммой последнее выражение для R_n можно переписать в виде

$$R_n = \frac{h^3}{24} n f''(\xi) = h^2 \frac{b-a}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Пусть M – максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е. $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Тогда из выражения для R_n получаем следующую оценку:

$$|R_n| \leq h^2 \frac{b-a}{24} M.$$

Это означает, что погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ есть величина $O(h^2)$.

В этом случае говорят, что квадратурная формула имеет второй порядок точности.

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \quad (3.7)$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, $h = (b - a) / n$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Аналогично предыдущему случаю можно получить выражение для погрешности R_n составной формулы трапеций

$$R_n = -h^2 \frac{b-a}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Тогда имеет место оценка

$$|R_n| \leq h^2 \frac{b-a}{12} M, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f''(\xi)|.$$

Таким образом, формула трапеций (3.7) имеет, так же как и формула средних прямоугольников (3.6), второй порядок точности ($R_n = O(h^2)$). Следует заметить, что ее погрешность оценивается величиной, в 2 раза большей, чем погрешность формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула Симпсона записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + f_{2n} + 4 \sum_{i=1}^n f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} \right), \quad (3.8)$$

где $f_j = f(x_j)$, $x_j = a + jh$, $h = (b - a) / 2n$, $j = 0, 1, \dots, 2n$.

Погрешность составной формулы Симпсона имеет вид

$$R_n = -h^4 \frac{b-a}{180} f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Отсюда получаем оценку

$$|R_n| \leq h^4 \frac{b-a}{180} M, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)|,$$

т. е. составная формула Симпсона существенно точнее, чем формулы средних прямоугольников и трапеций. Она имеет на отрезке $[a, b]$ четвертый порядок точности ($R_n = O(h^4)$).

Из выражений погрешностей видно, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, т. е. для линейных функций, а формула Симпсона точна для многочленов третьей степени (для них погрешность равна нулю).

Задание

Варианты заданий лабораторной работы необходимо получить у преподавателя. Для предложенного варианта лабораторной работы:

1) интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

вычислить аналитически;

2) вычислить численно с точностью до $\varepsilon = 0,0001$:

- по формуле средних прямоугольников;
- по формуле трапеций;
- по формуле Симпсона.

Точность ε , с которой необходимо найти приближенное значение интеграла, считается достигнутой, когда в процессе вычислений будет выполнено неравенство

$$\frac{|I_{h/2} - I_h|}{2^k - 1} < \varepsilon.$$

Приближенное вычисление интеграла с заданной точностью ε проводим методом итераций. На l -й итерации вычисляем значение $I_l = I_h$ интеграла I по одной из трех требуемых составных формул приближенного вычисления интегралов с шагом h_l , затем находим значение $I_{l+1} = I_{h/2}$ по той же составной формуле, но с шагом $I_{l+1} = I_l / 2$. Если для найденных значений I_l и I_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{|I_{l+1} - I_l|}{2^k - 1} < \varepsilon, \quad (3.9)$$

то точность считается достигнутой. В противном случае проводим следующую итерацию: I_l присваиваем значение I_{l+1} , увеличиваем в 2 раза число разбиений n , находим новое значение I_{l+1} и опять проверяем выполнение условия (3.9).

При вычислении начального приближения I_0 (для $l = 0$) в качестве шага h_0 можно взять значение $h_0 \approx \sqrt[k]{\varepsilon}$. Однако при этом соответствующее значению h_0 первоначальное число разбиений n_0 , если его определять по формуле $n_0 = (b - a) / h_0$, скорее всего, окажется не целым числом. Число разбиений n по своему смыслу на каждой итерации l должно быть целым, поэтому вначале надо задавать число разбиений, а затем вычислять шаг, соответствующий данному числу разбиений. Это можно сделать следующим образом:

– для формул средних прямоугольников и трапеции

$$n_0 = \left[\frac{b - a}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1, \quad h_0 = \frac{b - a}{n_0}; \quad (3.10)$$

– для формулы Симпсона

$$n_0 = \left[\frac{b - a}{2\sqrt[4]{\varepsilon}} \right] + 1, \quad h_0 = \frac{b - a}{2n_0}. \quad (3.11)$$

В (3.10) и (3.11) квадратные скобки обозначают целую часть заключенного в них числа;

3) дать оценку сверху погрешности вычислений, используя формулы, выражающие R_n через соответствующие производные подынтегральной функции;

4) оценить погрешность как разность между точным значением интеграла и значением, полученным численным методом;

5) сравнить между собой погрешности, полученные в пп. 3 и 4;

6) оформить отчет по практической работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

4 Практическое занятие № 4. Вывод формул численного дифференцирования

Общие сведения

Вычисление производной численными методами имеет смысл либо если аналитическое вычисление производной невозможно, либо если аналитическое выражение неизвестно и функция задана набором точек.

Методы односторонней разности.

Производная функции $f(x)$ определяется выражением

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}. \quad (4.1)$$

Заменяя бесконечно малое приращение dx на конечную величину Δx , называемую шагом дифференцирования, получаем выражение

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (4.2)$$

Если дифференцируемая функция задана в виде непрерывной функции (рисунок 4.1), то для вычисления значения дифференциала необходимо получить значение функции $f(x)$ в точке x_0 и в точке $x_0 + \Delta x$. После чего можно вычислить значение производной функции $f'(x_0)$.

Если функция задана выборкой, т. е. набором значений функции в точках (рисунок 4.2), то выражение для численного дифференцирования (при условии, что x образуют возрастающую последовательность) можно переписать в виде

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (4.3)$$

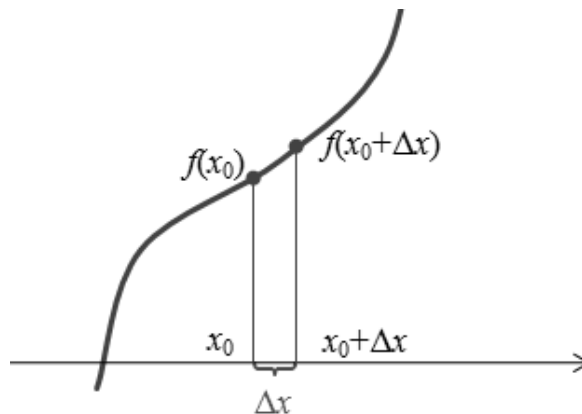


Рисунок 4.1 – Непрерывная функция

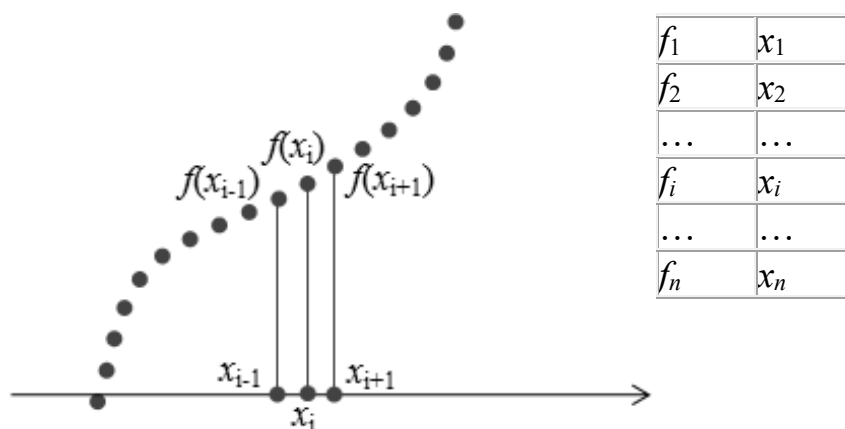


Рисунок 4.2 – Дискретная функция

Как видно из этих выражений, значение производной в точке x_i оценивается по значению функции в этой и в следующей точке x_{i+1} . Такой способ можно условно назвать правосторонней разностью. Нетрудно записать выражение для левосторонней разности:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (4.4)$$

или

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \quad (4.5)$$

Метод двусторонней разности.

С точки зрения точности методы левосторонней и правосторонней разностей равнозначны. Более точное значение дает метод двусторонней разности (что особенно справедливо для гладких функций). Теорема Лагранжа говорит о том, что уравнение

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (4.6)$$

(при условии, что (a, b) – замкнутый промежуток, на котором функция $f(x)$ дифференцируема) имеет по меньшей мере один корень $x = \zeta$. Значение этого корня, вообще говоря, зависит от вида функции $f(x)$. Если она квадратичная, то уравнение первой степени и его корень лежит в точности на середине отрезка (a, b) , т. е.

$$\zeta = \frac{b + a}{2}. \quad (4.7)$$

Если a имеет постоянное значение, а b стремится к a , то один из корней, как правило (за исключением случаев, когда вторая производная $f''(a)$ равна нулю или не существует), стремится к середине отрезка, т. е. $\lim_{b \rightarrow a} \frac{\zeta - a}{b - a} = \frac{1}{2}$.

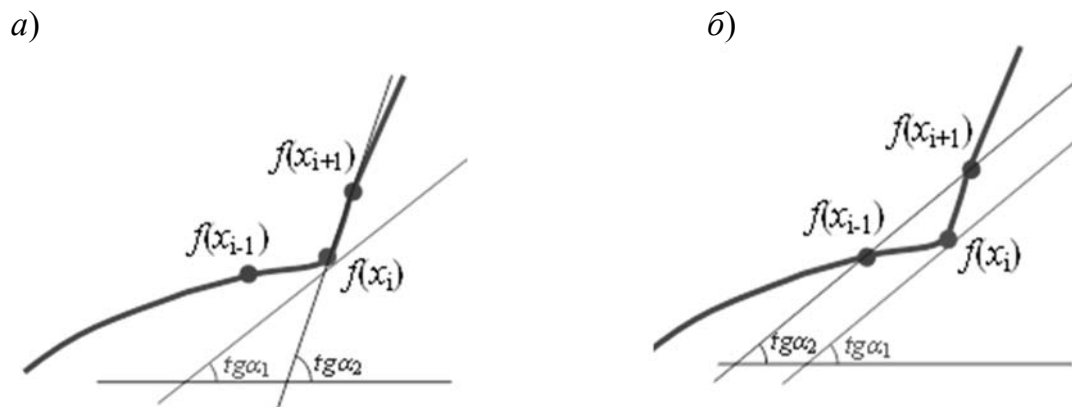
Поэтому более точное приближение к искомому значению производной функции в точке x_0 можно получить, воспользовавшись формулами двусторонней разности

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (4.8)$$

или, для функций, заданных в виде выборки,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (4.9)$$

Наглядно сравнить одностороннюю и двустороннюю разности можно, представив производную как тангенс угла наклона касательной к функции в точке x_i . На рисунке 4.3 точное значение производной обозначено как $\tan \alpha_1$.



a – односторонняя разность; $б$ – двусторонняя разность

Рисунок 4.3 – Графическое представление производной

В методе односторонней разности (см. рисунок 4.3, a) вместо касательной проводится прямая через точки x_i и x_{i+1} . Если в окрестностях точки x_i функция не гладкая, то значение производной ($\tan \alpha_2$) будет существенно отличаться от точного. В то время как в методе двусторонней разности, проведя прямую через точки x_{i-1} и x_{i+1} (см. рисунок 4.3, $б$), можно получить значение производной, практически совпадающее с точным.

Частное дифференцирование функции многих переменных.

Отдельно следует отметить случай численного определения частных дифференциалов функций многих переменных. В этом случае все аргументы функции становятся константами, кроме аргумента, по которому проводится дифференцирование, а требуемый порядок производной получается путем последовательного вычисления производных, вплоть до требуемого порядка:

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{f(..., x_i + \Delta x_i, ...) - f(..., x_i, ...)}{\Delta x_i}. \quad (4.10)$$

Производные высоких порядков.

При вычислении производных высоких порядков производная n -го порядка считается первой производной от $n-1$ -го порядка. Так, вторая производная функции является первой производной от первой производной:

$$f''(x) = (f'(x))' \quad \text{или} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right). \quad (4.11)$$

Тогда выражение для вычисления производной примет вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{f'_1 - f'_{-1}}{2\Delta x} = \frac{\frac{f'_2 - f'_0}{2\Delta x} - \frac{f'_0 - f'_{-2}}{2\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{f'_2 - 2f'_0 + f'_{-2}}{(2\Delta x)^2}. \quad (4.12)$$

Задание

Варианты заданий практической работы необходимо получить у преподавателя. Для предложенного варианта работы:

- 1) аналитически вычислить производные указанных порядков;
- 2) численно вычислить производные указанных порядков с точностью до $\varepsilon = 0,0001$;
- 3) оценить погрешность как разность между точным значением производной и значением, полученным численным методом;
- 4) сравнить между собой погрешности, полученные в пп. 2 и 3;
- 5) оформить отчет по практической работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

5 Практическое занятие № 5. Численное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

Общие сведения

Пусть известны входная динамическая последовательность X (входной сигнал) и модель (способ преобразования входного сигнала в выходной сигнал). Рассматривается задача определения выходного сигнала $y(t)$. Модель динамической системы может быть представлена дифференциальным уравнением. Основное уравнение динамики

$$y = f(x(t), y(t), t).$$

Известны начальные условия в нулевой момент времени t_0 : $y(t_0)$, $x(t_0)$. Чтобы определить выходной сигнал, заметим, что по определению производной

$$y' = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Известно положение системы в точке «1». Требуется определить положение системы в точке «2». Точки отделены друг от друга расстоянием Δt . То есть расчет поведения системы производится по шагам. Из точки «1» скачком (дискретно) переходим в точку «2». Расстояние между точками по оси t называется шагом расчета Δt . Тогда

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta y = y(t) + \Delta t \tan \alpha = y(t) + \frac{\Delta y}{\Delta t} \Delta t = y(t) + f(x, y, t) \Delta t$$

или

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta y = y(t) + f(x, y, t) \Delta t.$$

Последняя формула называется формулой Эйлера.

Очевидно, чтобы узнать состояние системы в будущем $y(t + \Delta t)$, надо к настоящему состоянию системы $y(t)$ прибавить изменение Δy , прошедшее за время Δt .

Эта формула может дать точные результаты только при очень малых Δt . При $\Delta t \neq 0$ формула дает расхождение между истинным значением y и расчетным, равное ε , поэтому в ней должен стоять знак приближенного равенства либо она должна быть записана так:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot f(x(t), y(t), t) + \varepsilon.$$

Заменяя реальную кривую прямой (касательной) на отрезке Δt , вносим в решение ошибку. Очевидно, что этот численный метод на каждом шаге имеет погрешность расчета ε .

Для расчета поведения системы на сколько-нибудь продолжительном отрезке времени (например, от t_0 до t_k), чтобы уменьшить ошибку на каждом шаге, шаги Δt делают по возможности малыми. Для достижения точки t_k отрезок $(t_k - t_0)$ делится на отрезки длиной Δt . Таким образом, всего получится $N = (t_k - t_0) / \Delta t$ шагов. В результате расчета придется формулу Эйлера применить для каждого шага, т. е. N раз. Но следует иметь в виду, что ошибки ε_i на каждом i -м шаге (в простейшем случае) складываются, а общая ошибка быстро накапливается. И в этом состоит существенный недостаток данного метода. Хотя с помощью этого метода можно получить (в численном виде) решение любого дифференциального уравнения (в том числе и неразрешимого аналитически). Уменьшая шаг, получаем более точные решения, но при этом

не следует забывать, что увеличение числа шагов ведет к вычислительным затратам и снижению быстродействия. Кроме того, при большом числе итераций в расчет вносится другая существенная погрешность из-за ограниченной точности вычислительных машин и ошибок округления.

Пример – Дано дифференциальное уравнение $y' = 2ty$. Задано начальное положение системы: $y(0) = 1$. Требуется найти $y(t)$, т. е. поведение системы на интервале времени t от 0 до 1.

Аналитический способ решения уравнения $y' = 2ty$.

Методом разделения переменных найдем

$$y' / y = 2t ;$$

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int 2t dt .$$

Интегрируем от 0 до t_i . Тогда, согласно правилам интегрирования, имеем

$$\ln y(t_i) - \ln y(0) = t_i^2 ;$$

$$y(t_i) = \exp(t_i^2) .$$

Полученное аналитическое решение характеризуется тем, что оно является абсолютно точным, но если уравнение окажется сколько-нибудь сложным, то решение не будет найдено вовсе. Аналитический путь решения не универсален.

Численный способ решения уравнения $y' = 2ty$.

Численный способ решения предполагает, что расчет будет вестись по формуле Эйлера на ряде последовательных шагов. На каждом шаге решение имеет свою ошибку, поскольку на каждом шаге кривая заменяется прямым отрезком.

При алгоритмической реализации расчет реализуется циклом, в котором изменяется t (счетчик t) и y :

$$t = t + \Delta t, \quad y = y + 2ty\Delta t .$$

Будем искать значение y в численном виде на промежутке от $T = 0$ до $T = 1$. Возьмем число шагов $n = 10$. Тогда шаг приращения Δt составит $\Delta t = (1 - 0) / n = (1 - 0) / 10 = 0,1$.

Численный расчет уравнения методом Эйлера и сравнение результата с точным решением на каждом шаге представлены в таблице 5.1. Обратите внимание на то, что рассчитанное численно значение (y_{i+1}) отличается от точного ($y_{\text{точн.}}$) и погрешность (разница столбцов y_{i+1} и $y_{\text{точн.}}$) в процессе расчета нарастает.

Таблица 5.1 – Численный расчет уравнения методом Эйлера и сравнение результата с точным решением на каждом шаге

i	t_i	$y_i = y_{i-1} + y'_{i-1} \Delta t$	$y'_i = 2t_i y_i$	$\Delta y_i = y'_i \Delta t$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	$y_{\text{точн.}} = \exp(t_i^2)$
0	0,0	1	0	0	1	1
1	0,1	1	0,2	0,02	1,02	1,0101
2	0,2	1,02	0,408	0,0408	1,0608	1,0408
3	0,3	1,061	0,636	0,0636	1,1246	1,0942
4	0,4	1,124	0,900	0,0900	1,2140	1,1735
5	0,5	1,214	1,214	0,1214	1,3354	1,2840
6	0,6	1,336	1,603	0,1603	1,4963	1,4333
7	0,7	1,496	2,095	0,2095	1,7055	1,6323
8	0,8	1,706	2,729	0,2729	1,9789	1,8965
9	0,9	1,979	3,561	0,3561	2,3351	2,2479
10	1,0	2,335	4,669	0,4669	2,8019	2,7183

Теперь подсчитаем относительную погрешность σ для расчетного значения y , полученного численно, в сравнении с теоретическим точным $y_{\text{теор}}$, по следующей формуле:

$$\sigma = (1 - y_{\text{расч}} / y_{\text{теор}}) \cdot 100 \%$$

и сравним σ при различных значениях Δt .

Если будем менять значение шага Δt , например, уменьшать шаг, то относительная погрешность расчета тоже будет уменьшаться. Вот что получится при вычислении значения y с разными значениями шага (таблица 5.2).

Таблица 5.2 – Зависимость погрешности расчета от размера шага Δt

Δt	$y_{\text{расч}}$	$y_{\text{теор}}$	σ
0,1	2,3346	2,7183	14 %
0,05	2,5107	2,7183	8 %
0,01	2,6738	2,7183	2 %

Как видим, с уменьшением шага приращения Δt уменьшается величина относительной погрешности, а значит, повышается точность расчета.

Изменение шага в 10 раз (с 0,1 до 0,01) ведет к изменению величины ошибки примерно тоже в 10 раз (с 14 % до 2 %). При изменении шага в 100 раз ошибка примерно уменьшится тоже в 100 раз. Иными словами, размер шага и ошибка для метода Эйлера связаны линейно. Этот факт в математике принято обозначать символом $\varepsilon = O(\Delta t)$, а метод Эйлера называют методом первого порядка точности.

Поскольку в методе Эйлера ошибка достаточно велика и от шага к шагу накапливается, а точность пропорциональна количеству вычислений, то метод Эйлера обычно применяют для грубых расчетов, для оценки поведения системы в принципе. Для точных количественных расчетов применяют более точные методы.

Каждый численный метод обладает точностью, поскольку результат отличается от теоретического. Точность метода зависит от величины шага. Различные методы имеют различную точность. Порядок зависимости точности от величины шага обозначают как $O(h)$. У метода Эйлера первый порядок точности, зависимость ошибки от величины шага линейна.

Если при уменьшении шага предел y_n стремится к значению $y_{теор}$, то говорят, что метод обладает сходимостью. Исследователей интересует скорость сходимости метода.

Метод должен быть устойчив. Устойчивость связана с некоторой критической величиной шага. При проявлении неустойчивости наблюдается полное искажение качественной картины расчета, «разболтка» результата.

При выборе метода рекомендуется сначала добиться устойчивости, а внутри области устойчивости – сходимости результата. Устойчивость обеспечивает качественную картину.

Задание

1 Варианты заданий практической работы необходимо получить у преподавателя. Для предложенного варианта работы численно решить дифференциальные уравнения методом Эйлера.

2 Оценить погрешность как разность между точным значением и значением, полученным численным методом.

3 Оформить отчет по практической работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

6 Практическое занятие № 6. Численное решение дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты четвертого порядка

Общие сведения

Метод Рунге – Кутты используют для расчета стандартных моделей достаточно часто, т. к. при небольшом объеме вычислений он обладает точностью метода $O^4(h)$.

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением функции

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad 0 < x \leq T, \quad y(0) = y_0 \quad (6.1)$$

в ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Заменяем вторую производную в этом разложении выражением

$$y''(x_k) = f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f'(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_k, y(x_k))}{\Delta x}, \quad \tilde{x} = x_k + \Delta x, \quad \tilde{y} = y(x_k + \Delta x).$$

Причем Δx подбирается из условия достижения наибольшей точности записанного выражения. Для дальнейших выкладок произведем замену величины $\tilde{y}$ разложением в ряд Тейлора:

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k)\Delta x + \dots$$

Для исходного уравнения (6.1) построим вычислительную схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h + \frac{h^2}{2\Delta x} (f(x_k + \Delta x, y_k + y'(x_k)\Delta x) - f(x_k, y_k)),$$

которую преобразуем к виду

$$y_{k+1} = y_k + h \left(\left(1 - \frac{h}{2\Delta x} \right) f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \Delta x, y_k + y'_k \Delta x) \right) =$$

$$= y_k + h \left(\left(1 - \frac{h}{2\Delta x} \right) f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h} h, y_k + f(x_k, y_k) \frac{\Delta x}{h} h\right) \right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x}; \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x}; \gamma = \frac{\Delta x}{h}; \delta = f(x_k, y_k) \frac{\Delta x}{h}.$$

Эти обозначения позволяют записать предыдущее выражение в форме

$$y_{k+1} = y_k + h(\beta f(x_k, y_k) + \alpha f(x_k + \gamma h, y_k + \delta h)).$$

Очевидно, что все введенные коэффициенты зависят от величины Δx и могут быть определены через коэффициент α , который в этом случае играет роль параметра:

$$\beta = 1 - \alpha; \gamma = \frac{1}{2\alpha}; \delta = f(x_k, y_k) \frac{2}{\alpha}.$$

Окончательно схема Рунге – Кутты принимает вид

$$y_{k+1} = y_k + h((1 - \alpha)f(x_k, y_k) + \alpha f(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k) \frac{h}{2\alpha})).$$

Та же схема в форме разностного аналога уравнения (6.1)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = (1 - \alpha)f(x_k, y_k) + \alpha f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k) \frac{h}{2\alpha}\right).$$

При $\alpha = 0$ получаем, как частный случай, уже известную схему Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + f(x_k, y_k).$$

При $\alpha = 1$

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right).$$

При $\alpha = 1$ проведение расчетов на очередном шаге интегрирования можно рассматривать как последовательность нижеследующих операций.

1 Вычисляется выражение, представляющее собой полушаг интегрирования по схеме Эйлера, т. е. определяется приближенное значение искомой функции в точке $x_k + h/2$:

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k).$$

2 Для той же промежуточной точки находится приближенное значение производной:

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right).$$

3 Определяется уточненное значение функции в конечной точке всего шага, причем по схеме Эйлера с вычисленным на предыдущем шаге значением производной:

$$y_{k+1/2} = y_k + h y'_{k+1/2}.$$

Получаемое в такой последовательности решение лежит «ближе» к истинному, чем вычисляемое по схеме Эйлера, т. е. следует ожидать более высокой точности решения, получаемого методом Рунге – Кутты. Ранее называли эту схему «модифицированным методом Эйлера».

Теперь рассмотрим схему при $\alpha = 0,5$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))).$$

1 Выполняется полный шаг метода Эйлера с целью определения приближенного значения искомой функции на конце отрезка интегрирования:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

2 Для этой же точки вычисляется приближенное значение производной:

$$y'_{k+1} = f(x_k + h, \hat{y}_{k+1}).$$

3 Находится среднее значение двух производных, определенных на концах отрезка:

$$y_{k+1/2} = \frac{1}{2} (y'_k + \hat{y}_{k+1}).$$

4 Вычисляется значение искомой функции в конечной точке всего шага по схеме Эйлера с усредненным значением производной:

$$y_{k+1/2} = y_k + hy'_{k+1/2}.$$

Иногда получающееся выражение называют методом Эйлера – Коши.

Методы Рунге – Кутты третьего и четвертого порядков.

Рассмотрим две различные схемы Рунге – Кутты, предназначенные для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и имеющие третий порядок аппроксимации:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k); \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1); \\ K_3 = f(x_k + h, y_k + hK_1 + 2hK_2); \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k); \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{h}{3}K_1); \\ K_3 = f(x_k + \frac{2h}{3}, y_k + \frac{2h}{3}K_2); \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3). \end{array} \right.$$

И две схемы Рунге – Кутты, имеющие четвертый порядок аппроксимации:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k); \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1); \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2); \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3); \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_k, y_k); \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{4}, y_k + \frac{h}{4}K_1); \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2); \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_1 - 2hK_2 + 2hK_3); \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4). \end{array} \right.$$

Пример – Решить методом Рунге – Кутты четвертого порядка уравнение $dy/dx = -y$, $y(0) = 1$.

В соответствии с вышеприведенными соотношениями определяем коэффициенты:

$$\begin{aligned} K_1 &= -y_k; \\ K_2 &= -\left(y_k + \frac{h}{2}K_1\right) = -y_k\left(1 - \frac{h}{2}\right); \end{aligned}$$

$$K_3 = -\left(y_k + \frac{h}{2}K_2\right) = -y_k \left(1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h}{2}\right)\right);$$

$$K_4 = -(y_k + hK_3) = -y_k \left(1 - h\left(1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h}{2}\right)\right)\right);$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = y_k \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right).$$

Построим последовательность значений искомой функции:

$$y_0 = y(0) = 1;$$

$$y_1 = y_0 \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right);$$

$$y_2 = y_1 \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)^2;$$

$$y_3 = y_2 \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)^3;$$

...

$$y_n = \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)^n.$$

Результаты получаемого численного решения для значения аргумента $x=10$ при различных шагах интегрирования приведены в таблице 6.1. Три верные значащие цифры получены для шага $h=0,25$.

Таблица 6.1 – Результаты численного решения y_n методом Рунге – Кутты четвертого порядка дифференциального уравнения $dy/dx = -y$ с начальным условием $y(0) = 1$

Величина шага h	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001	0,0001
Число шагов n	20	40	100	1000	10 000	100 000
$y_n \cdot 10^4$	0,457608	0,454181	0,454003	0,453999	0,453999	0,453999

Более высокая степень аппроксимации дифференциального уравнения разностным аналогом позволяет получать более точное решение при более крупном шаге и, следовательно, меньшем числе шагов, т. е. приводит к снижению требуемых ресурсов ЭВМ.

На сегодняшний день для грубого расчета вычисления производятся методом Эйлера, для точного расчета – методом Рунге – Кутты.

Задание

1 Варианты заданий практической работы необходимо получить у преподавателя. Для предложенного варианта работы решить методом Рунге – Кутты четвертого порядка уравнения.

2 Оценить погрешность как разность между точным значением и значением, полученным численным методом.

3 Оформить отчет по практической работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

7 Практическое занятие № 7. Многошаговые методы. Проблема численной устойчивости

Общие сведения

В одношаговых методах решения задачи Коши для одного уравнения

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0 \quad (7.1)$$

значение y_{i+1} зависит только от информации о решении в предыдущей точке сетки x_i , $i = 0, 1, 2, \dots$.

Принято считать, что можно добиться повышения точности, если использовать информацию о решении в нескольких предыдущих точках сетки $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots$. Также бывает, что целесообразно привлекать информацию с забеганием вперед за точку x_{i+1} . Подобные методы называются многошаговыми и могут быть получены несколькими способами.

Общая схема многошаговых методов имеет вид

$$y_{n+k} = F(f, x_{n+k}, x_n, y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n), \quad (7.2)$$

где значение приближенного решения y_{n+k} в точке x_{n+k} определяется через значения решения в k точках, предшествующих x_{n+k} .

Общая схема многошаговых методов.

Метод (7.2) называется k -шаговым. Из класса методов (7.2) можно выделить класс линейных многошаговых методов:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3)$$

где α_i, β_i – постоянные, $\alpha_k \neq 0, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

Равенство (7.3) устанавливает линейное соотношение между y_{n+i} и $f(x_{n+i}, y(x_{n+i}))$.

Методы прогноза и коррекции.

Для того чтобы вычислить последовательность приближённых значений y_n , необходимо сначала получить k начальных значений $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$. При $\beta_k = 0$ метод (7.3) называется явным линейным k -шаговым, причем приближение к решению y_{n+k} вычисляется просто. В случае, если $\beta_k \neq 0$, метод называется неявным линейным k -шаговым, т. к. правая часть (7.3) содержит $f(x_{n+k}, y(x_{n+k}))$ и в общем случае необходимо решить нелинейное уравнение относительно $y(x_{n+k})$. Для реализации неявного метода можно равенство (7.3) представить в виде

$$y_{n+i} = h \frac{\beta_k}{\alpha_k} f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) + g_n, \beta_k \neq 0, \quad (7.4)$$

где g_n содержит известные величины $f(x_{n+i}, y(x_{n+i}))$, $y(x_{n+i})$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Доказано, что если

$$h < \left| \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right| \cdot \frac{1}{L}, \beta_k \neq 0, \quad (7.5)$$

то существует единственное решение y_{n+k} уравнения (7.4), которое можно получить с помощью итерационного процесса.

В (7.5) L – константа Липшица. Функция называется функцией Липшица в ограниченной области Ω , если она удовлетворяет условию Липшица. Условие Липшица состоит в том, что должно выполняться неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\| \text{ для всех } x, y \in \Omega, \|x\| - \text{норма.}$$

Решение (7.4) можно получить с помощью итерационного процесса:

$$y_{n+k}^{\xi+1} = h \frac{\beta_k}{\alpha_k} f(x_{n+k}, y_{n+k}^{\xi}) + g_n, \xi = 0, 1, \dots, \quad (7.6)$$

где y_{n+k}^0 произвольно.

Выбор y_{n+k}^0 играет огромную роль в скорости сходимости итерационного процесса, поэтому для его вычисления используется явный многошаговый метод – предсказывающий (предиктор), неявный метод (7.6) в этой цепке – исправляющий (корректор).

Получение многошаговых методов.

Многошаговые методы могут быть построены следующим образом. Исходное уравнение (7.1) для задачи Коши запишем в виде $dy(x) = f(x, y)dx$.

Проинтегрируем обе части этого соотношения на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Из левой части получаем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy(x) = y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i, \quad (7.7)$$

где y_{i+1}, y_i – сеточные значения искомой функции.

Для вычисления интегралов правой части сначала построим интерполяционный многочлен $P_{k-1}(x)$ степени $(k-1)$ для функции $f(x, y)$ на этом отрезке по значениям $f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \dots, f(x_i, y_i)$. Тогда интеграл правой части примет вид

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (7.8)$$

Приравнявая (7.7) и (7.8), получаем формулу для определения неизвестного значения сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x) dx. \quad (7.9)$$

На основе (7.9) можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности. Порядок точности при этом зависит от степени $P_{k-1}(x)$, для построения которого используются значения сеточной функции $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$, вычисленные на k предыдущих узлах.

Проблема численной устойчивости.

Введем полином вида

$$\rho(\theta) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \theta^i, \quad (7.10)$$

будем в дальнейшем называть его характеристическим.

Для неявного метода (7.4) полная погрешность в узле x_n определяется разностью $y_n = y(x_n)$, $0 \leq n \leq N$. Если она стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, то метод сходится. Метод из класса (7.3) сходится, если для каждой задачи (7.1)

$$y_n \rightarrow y(x) \text{ при } h \rightarrow 0, \quad n = \frac{x - x_0}{h} \quad (7.11)$$

для любых $x \in [x_0, x_k]$.

Метод из класса (7.3) должен обладать минимальным уровнем локальной точности. Невязка, которая получается после подстановки точного решения $y(x)$ дифференциального уравнения в (7.3),

$$\rho_{n+k} = \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} - h \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) \quad (7.12)$$

имеет порядок $O(h^{s+1})$ и называется погрешностью аппроксимации. Число s называется порядком аппроксимации или степенью разностного уравнения (7.3), а $r_{n+k} = \rho_{n+k} / h$ – погрешностью дискретизации.

Метод (7.3) является согласованным, если

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|r_{n+k}\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

и имеет порядок согласованности s ,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|r_{n+k}\| = O(h^s).$$

Метод из класса (7.3) удовлетворяет корневому условию, если все корни характеристического полинома $\rho(\theta)$ лежат внутри единичной окружности или на самой окружности, причем те корни, которые лежат на единичной окружности, являются простыми.

Если метод согласован, то $\rho(\theta)$ обязательно имеет корень $\theta_1 = +1$.

Корни характеристического полинома классифицируются следующим образом:

$\theta_1 = +1$ – главный корень;

$|\theta_i| \leq 1, i = 2, 3, \dots, k$ – посторонние корни.

Метод, удовлетворяющий корневому условию, называют нуль-устойчивым. Согласованность – определяет величину погрешности аппроксимации, нуль-устойчивость – определяет характер развития этой и других погрешностей в пределе при $h \rightarrow 0, Nh = x_k - x_0$.

Метод из класса (7.3) сходится тогда и только тогда, когда он является согласованным и нуль-устойчивым.

Задание

1 Варианты заданий практической работы необходимо получить у преподавателя. Для предложенного варианта работы решить дифференциальные уравнения.

2 Оценить погрешность как разность между точным значением и значением, полученным численным методом.

3 Оформить отчет по практической работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

8 Практическое занятие № 8. Решение краевой задачи в математической физике

Общие сведения

Решение краевых задач математической физики целесообразно рассматривать в системах компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, например в MathCad. Фокус внимания сместим на уравнения гиперболического типа. Уравнение вынужденных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

где $u(x, y)$ – искомая функция поперечных отклонений струны в точке x в момент времени t ;

$f(x, t)$ – линейная плотность внешней силы;

a^2 – волновой параметр, который определяется соотношением

$$a^2 = \frac{T}{\rho},$$

где T – сила натяжения струны;

ρ – погонная плотность струны.

Формула Даламбера для решения уравнения вынужденных колебаний струны получается добавлением к формуле Даламбера для свободных колебаний струны еще одного слагаемого:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $\varphi(x) = u(x, 0)$ – начальное отклонение струны;

$\psi(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0)$ – начальная скорость струны.

Таким образом, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задают начальные условия (т. е. решается задача Коши).

Пусть на струну действует внешняя сила с линейной плотностью $f(x, t) = e^{-t} \sin x$.

Будем рассматривать бесконечную струну с волновым параметром $a^2 = 1$. Начальная скорость точек струны $\psi(x) = 0$. В начальный момент времени струна имеет профиль, который описывается функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -c; \\ u_0 \frac{x+c}{c}, & -c \leq x \leq 0; \\ u_0 \frac{c-x}{c}, & 0 \leq x \leq c; \\ 0, & x > c, \end{cases}$$

где u_0 – максимальное отклонение струны;

c – «масштабный» параметр по координате x .

Пусть $u_0 = 1$ и $c = 1$.

Решение краевой задачи получим при помощи компьютерной системы MathCad в виде графика профиля струны в моменты времени t_0 и $2t_0$, которые кратны отношению c/a .

Теперь решим краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + e^{-t} \sin \frac{\pi x}{L}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \sin \frac{5\pi x}{2L}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2L}, \quad 0 < x < L$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = \frac{5\pi}{L}, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Зададим следующие параметры: $a^2 = 1$, $L = 1$, $T = 1$.

Для решения задачи воспользуемся блоком **Given/Pdesolve**.

Функция **Pdesolve** имеет следующее ограничение: для частной производной по времени допустима только первая производная. Поэтому требуется преобразование исходного волнового уравнения к эквивалентной системе из двух уравнений, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = w(x, t); \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \end{cases}$$

При этом граничные условия не изменяются, а начальные условия будут иметь вид $u(x,0) = \varphi(x)$, $w(x,0) = \psi(x) = 0$.

Решим задачу для $t_0 = 0,25$, $t_0 = 0,5$ и $t_0 = 0,75$.

Обратим внимание, что полученное решение имеет вид ломаных линий, хотя можно было ожидать, что будут получены синусоидальные кривые. Причина такого несоответствия состоит в том, что при использовании функции **Pdesolve** важным является выбор правильного шага дифференцирования (за него отвечают два последних аргумента функции: **xpts** – число пространственных узлов сетки и **tpts** – число временных узлов сетки). Так, если шаг будет достаточно большим (число узлов сетки малым), то найденное решение может оказаться весьма далеким от истинного. Такой эффект при решении дифференциальных уравнений получил название осцилляции решений (т. е. колебаний решений).

Исправить ошибку достаточно легко – необходимо ввести аргументы **xpts** и **tpts**. При использовании функции **Pdesolve** часто указываются следующие значения аргументов: **xpts** = 50...100, **tpts** = 100...200. Добавим в введенную ранее функцию **Pdesolve** аргументы **xpts** = 100 и **tpts** = 200:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} := \text{Pdesolve} \left[\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 100, 200 \right].$$

Представим решение задачи в виде поверхности (трёхмерного графика). Для этого воспользуйтесь функцией **CreateMesh** (находится в категории Построение графика) со следующими параметрами:

$$U := \text{CreateMesh}(u, 0, L, 0, T, 100, 200).$$

Компьютерная система MathCad – удобный и мощный инструмент, позволяющий решать корректно поставленные задачи математической физики.

Задание

1 Варианты заданий практической работы необходимо получить у преподавателя. Для предложенного варианта работы решить краевую задачу математической физики.

2 Построить графики полученных решений.

3 Оформить отчет по практической работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

Список литературы

- 1 **Советов, Б. Я.** Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высш. шк., 1985. – 271 с.
- 2 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск. : ДизайнПРО, 2004. – 640 с. : ил.
- 3 **Веников, В. А.** Теория подобия и моделирования / В. А. Веников. – М. : Высш. шк., 1976. – 479 с.
- 4 **Краснощеков, П. С.** Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – М. : МГУ, 1983. – 264 с.