

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей
6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью»
и 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»
очной и заочной форм обучения*



Могилев 2025

УДК 539.3/6
ББК 30.1212
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «24» июня 2024 г.,
протокол № 10

Составители: канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович;
канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало

Рецензент канд. техн. наук М. Н. Миронова

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной и заочной форм обучения. Содержат материал для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям и контрольным работам, перечень необходимой литературы.

Учебное издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать	. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л.	. Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2025

Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений.....	5
2 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брус	8
3 Построение эпюр внутренних силовых факторов в плоской раме.....	12
4 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брус	13
5 Расчет простейших статически неопределимых систем.....	15
6 Определение главных напряжений и главных площадок при плоском напряженном состоянии.....	18
7 Плоский изгиб прямого бруса.....	19
8 Расчеты на прочность при сдвиге.....	24
9 Кручение цилиндрического стержня.....	25
10 Сложное сопротивление.....	28
11 Устойчивость сжатых стержней.....	39
12 Простейшие задачи при динамическом нагружении.....	41
13 Основы расчетов за пределами упругости.....	44
Список литературы.....	46

Введение

Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» – приобретение обучающимися основных знаний и умений по расчету типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Методические рекомендации предназначены для студентов специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и специальности 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной и заочной форм обучения. Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–8], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки. По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у обучающихся нижеперечисленные компетенции.

Для специальности 7-07-0732-01: БПК-9. Применять методы расчета прочностных и деформативных характеристик строительных материалов, деталей, изделий и конструкций для решения инженерно-строительных задач.

Для специальности 6-05-0732-02: СК-2. Применять законы кинематики и динамики для выполнения инженерных расчетов; СК-4. Применять методы расчета прочности и деформативных характеристик строительных материалов, деталей, изделий и конструкций для решения инженерно-строительных задач.

1 Геометрические характеристики поперечных сечений

Пример 1 – Определить координату центра тяжести составного сечения относительно оси y . Размеры сечения на рисунке 1.1 даны в миллиметрах.

Решение

Положение центров тяжести прямоугольника и круга с координатами относительно оси y указано на рисунке 1.1. Площади отдельных фигур

$$A_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3,14 \cdot 1,5^2 = 7,065 \text{ см}^2.$$

Координата x_c определяется по формуле

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(-4) \cdot 32 - (-5,5) \cdot 7,065}{32 - 7,065} = -3,57 \text{ см}.$$

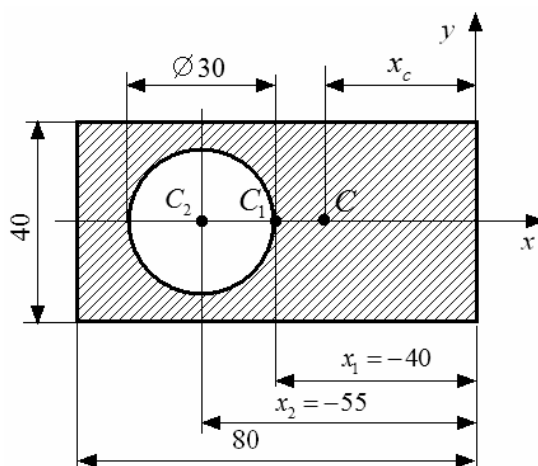


Рисунок 1.1

Пример 2 – Определить осевые моменты инерции поперечного сечения (рисунок 1.2) относительно указанных осей x и y .

Размеры сечения на рисунке 1.2 даны в миллиметрах.

Решение

По рисунку видно, что заданная ось x и центральная ось x_c совпадают, а между вертикальными осями y и y_c есть межосевое расстояние b .

Моменты инерции

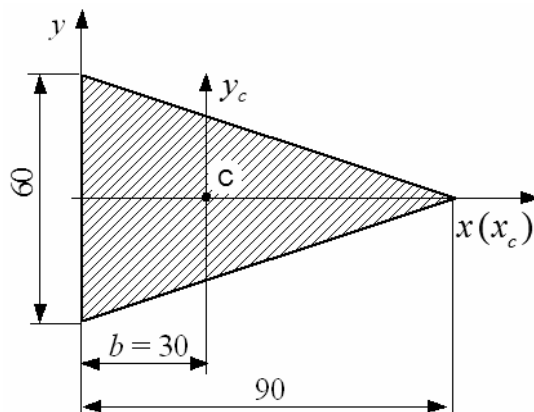


Рисунок 1.2

$$I_x = I_{x_c} = \frac{9 \cdot 6^3}{48} = 40,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot A = \frac{6 \cdot 9^3}{36} + 3^2 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 354,5 \text{ см}^4.$$

Пример 3 – Для заданного сечения (рисунок 1.3) определить положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции. Размеры сечения даны в миллиметрах.

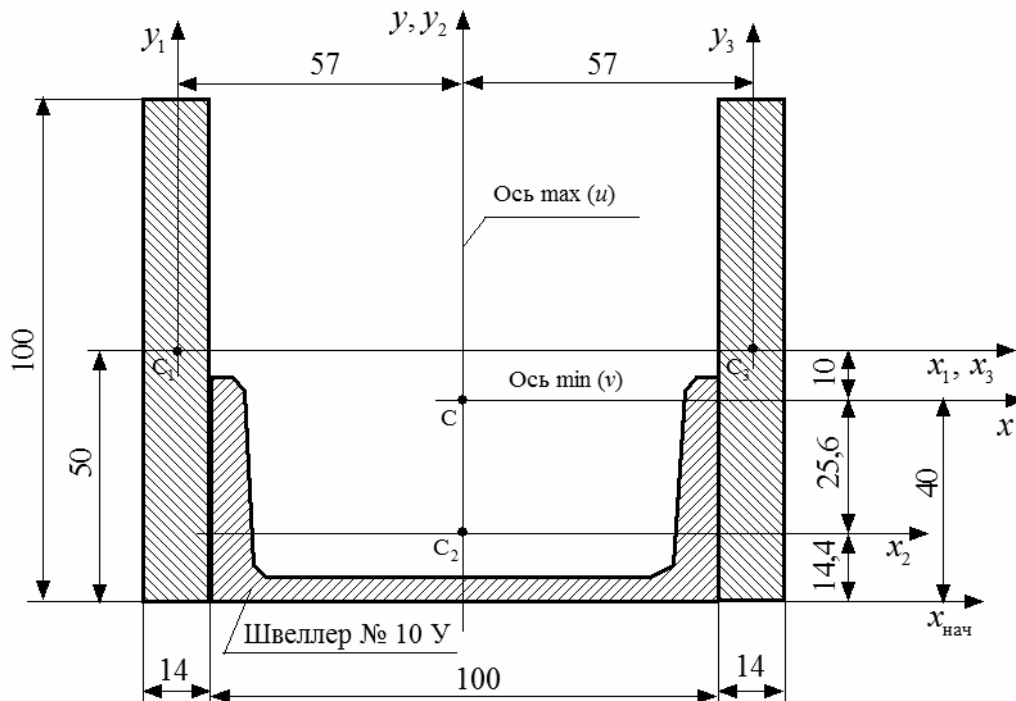


Рисунок 1.3

Решение

Определим собственные геометрические характеристики фигур.

Прямоугольники: $A_1 = A_3 = 10 \cdot 1,4 = 14 \text{ см}^2$;

$$I_{x_1} = I_{x_3} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{12} = 116,7 \text{ см}^4; \quad I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{10 \cdot 1,4^3}{12} = 2,3 \text{ см}^4.$$

Для швеллера из таблиц ГОСТ 8240–97, с учетом горизонтального расположения фигуры,

$$A_2 = 10,9 \text{ см}^2; \quad I_{x_2} = 20,4 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 174 \text{ см}^4; \quad h = 10 \text{ см}; \quad z_0 = 1,44 \text{ см}.$$

В данном сечении ось y является осью симметрии (главной центральной осью инерции), поэтому центр тяжести всего сечения расположен на этой оси. Определим его координату y_c относительно оси $x_{нач}$:

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 14 + 1,44 \cdot 10,9 + 5 \cdot 14}{14 + 10,9 + 14} = 4 \text{ см},$$

где y_1, y_2, y_3 – координаты центров тяжести прямоугольников и швеллера отно-

сительно начальной оси $x_{нач}$ (см. рисунок 1.3).

Через найденный центр тяжести проводим вторую главную центральную ось инерции сечения – x .

Расстояния между главными центральными осями всего сечения и центральными осями отдельных фигур

$$c_1 = c_3 = y_1 - y_c = 5 - 4 = 1 \text{ см}; \quad c_2 = y_c - y_2 = 4 - 1,44 = 2,56 \text{ см};$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1,4}{2} + \frac{10}{2} = 5,7 \text{ см}; \quad d_2 = 0.$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения относительно осей x и y по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (116,7 + 1^2 \cdot 14) \cdot 2 + (20,4 + 2,56^2 \cdot 10,9) = 353,2 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

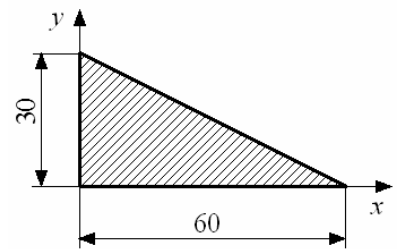
$$\begin{aligned} I_y &= (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (2,3 + 5,7^2 \cdot 14) \cdot 2 + (174 + 0 \cdot 10,9) = 1088,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Так как $I_x = I_{\min}$, а $I_y = I_{\max}$, то ось y проходит через плоскость максимальной жесткости сечения, а ось x – минимальной.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

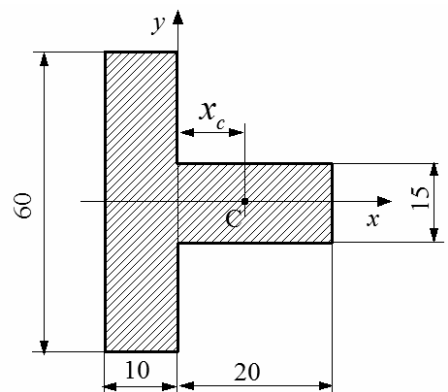
1 Координата центра тяжести треугольника относительно указанных осей:

- а) $x_c = 1 \text{ см};$
- б) $x_c = 2 \text{ см};$
- в) $x_c = -2 \text{ см};$
- г) $x_c = 3 \text{ см}.$



2 В каком ответе дано правильное значение координаты центра тяжести сечения x_c :

- а) $x_c = 0 \text{ см};$
- б) $x_c = -1/3 \text{ см};$
- в) $x_c = 1/3 \text{ см};$
- г) $x_c = 2/3 \text{ см}.$

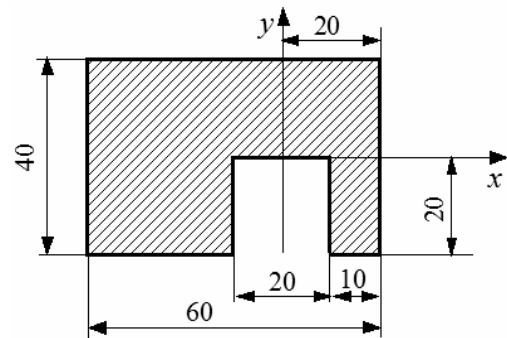


3 По какой формуле определяется статический момент простого сечения площадью A относительно произвольной оси y :

- а) $S_y = x_c \cdot A$;
 б) $S_y = y_c \cdot A$;
 в) $S_y = x_c / A$;
 г) $S_y = y_c / A$.

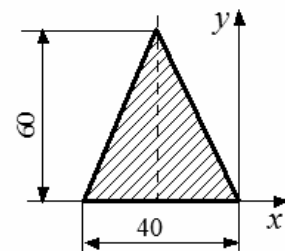
4 В каком ответе дано правильное значение статического момента сечения относительно оси x :

- а) $S_x = 0 \text{ см}^3$; б) $S_x = 4 \text{ см}^3$;
 в) $S_x = 44 \text{ см}^3$; г) $S_x = 52 \text{ см}^3$.



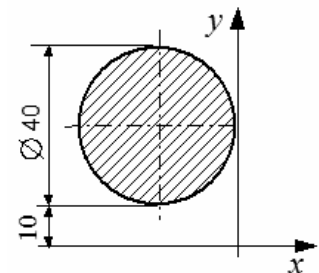
5 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси y :

- а) $I_y = 32 \text{ см}^4$;
 б) $I_y = 58 \text{ см}^4$;
 в) $I_y = 56 \text{ см}^4$;
 г) $I_y = 54 \text{ см}^4$.



6 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

- а) $I_{xy} = 0 \text{ см}^4$;
 б) $I_{xy} = -8 \cdot \pi \text{ см}^4$;
 в) $I_{xy} = -24 \cdot \pi \text{ см}^4$;
 г) $I_{xy} = 24 \cdot \pi \text{ см}^4$.



2 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брус

Пример 1 – Стальной брус (рисунок 2.1) площадью поперечного сечения $A = 50 \text{ см}^2$ сжимается силой $F = 300 \text{ Н}$. Удельный вес материала $\gamma = 78 \text{ кН / м}^3$.

Построить эпюру продольных сил N с учетом собственного веса бруса.

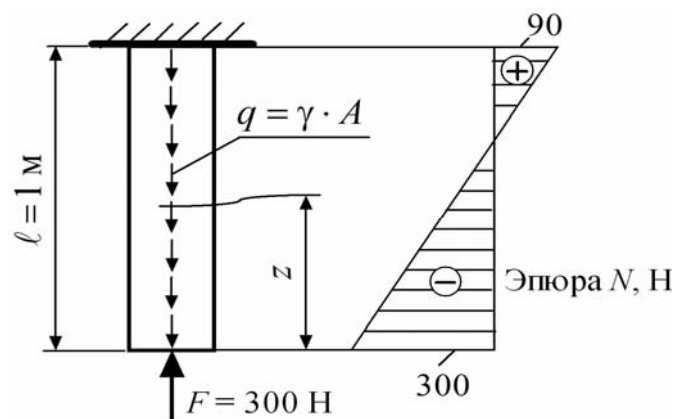


Рисунок 2.1

Решение

Построение эпюры продольных сил N :

$$N = -F + \gamma \cdot A \cdot z = -300 + 78 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot z = -300 + 390 \cdot z;$$

$$z = 0; \quad N = -300 \text{ Н};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad N = 90 \text{ Н}.$$

Пример 2 – Для заданного ступенчатого вала (рисунок 2.2) построить эпюру крутящих моментов. Предварительно вал уравновесить.

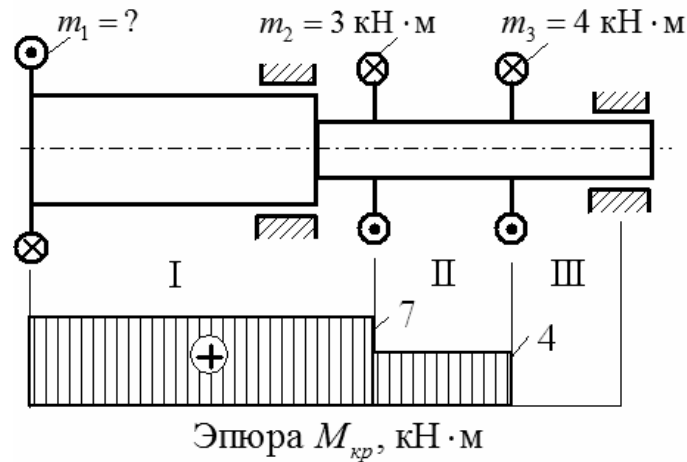


Рисунок 2.2

Решение

Для определения скручивающего момента m_1 составим уравнение статики:

$$\sum m = m_2 + m_3 - m_1 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m_2 + m_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение эпюры $M_{кр}$:

$$M_1 = m_1 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = m_1 - m_2 = 7 - 3 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = m_1 - m_2 - m_3 = 7 - 3 - 4 = 0.$$

Пример 3 – Для балки, изображенной на рисунке 2.3, построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

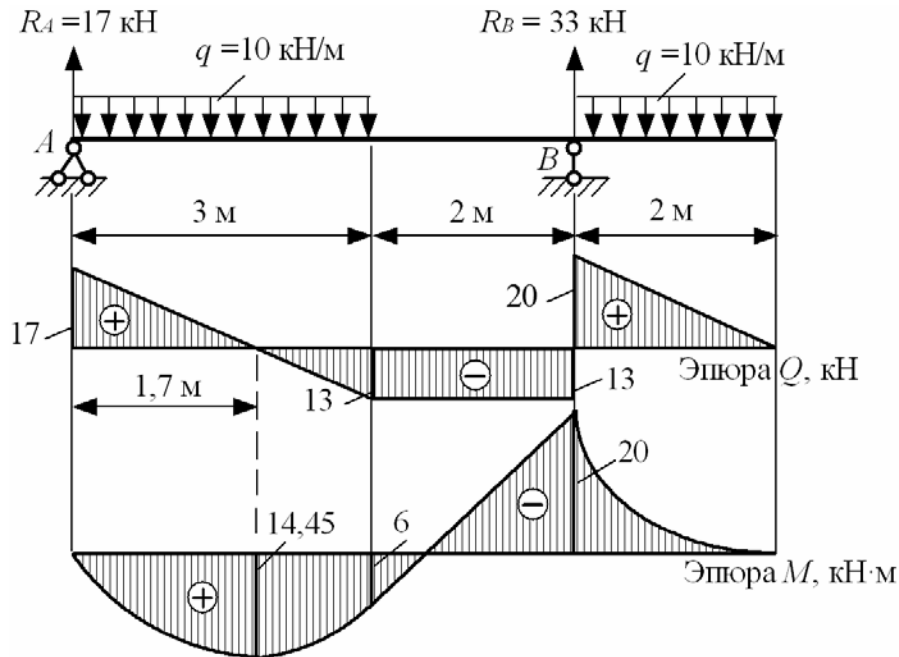


Рисунок 2.3

Решение

Определение реакций на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0; \quad R_B = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 \cdot 6)}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_A = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 3,5 - 10 \cdot 2 \cdot 1)}{5} = 17 \text{ кН}.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$.

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1; \quad M = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2;$$

$$z_1 = 0; \quad Q = 17 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; \quad Q = -13 \text{ кН}; \quad M = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0; \quad z_1 = 1,7 \text{ м};$$

$$M_{\text{экстр}} = 17 \cdot 1,7 - 5 \cdot 1,7^2 = 14,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН};$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2) = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2);$$

$$z_2 = 0; M = 17 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; M = 17 \cdot 5 - 30 \cdot 3,5 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III: $0 \leq z_3 \leq 2$ м.

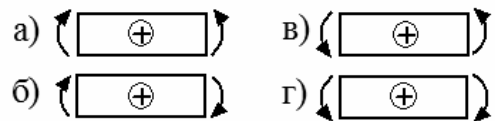
$$Q = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3; M = -0,5 \cdot q \cdot z_3^2 = -5 \cdot z_3^2;$$

$$z_3 = 0; Q = 0; M = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; Q = 20 \text{ кН}; M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

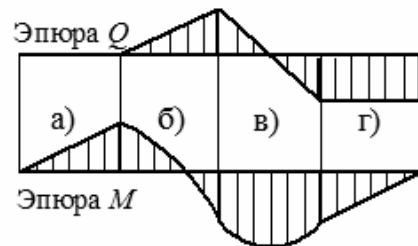
1 Укажите верное правило знаков для изгибающего момента M в балках:



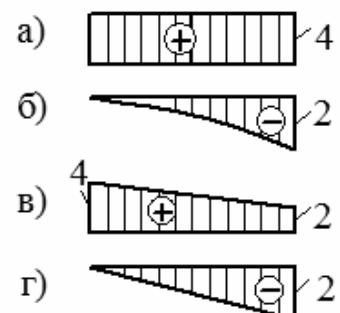
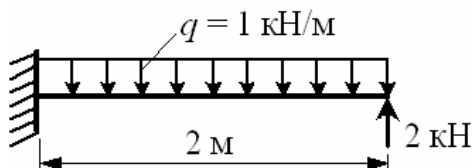
2 Укажите правильную дифференциальную зависимость:

а) $M = \frac{dq}{dz}$; в) $q = \frac{dM}{dz}$;
 б) $Q = \frac{dM}{dz}$; г) $M = \frac{dQ}{dz}$.

3 На каком участке не соблюдаются дифференциальные зависимости между Q и M ?



4 Какая эпюра поперечных сил верна для указанной балки?



3 Построение эпюр внутренних силовых факторов в плоской раме

Пример – Для рамы, изображенной на рисунке 3.1, построить эпюры поперечных сил Q , продольных сил N и изгибающих моментов M .

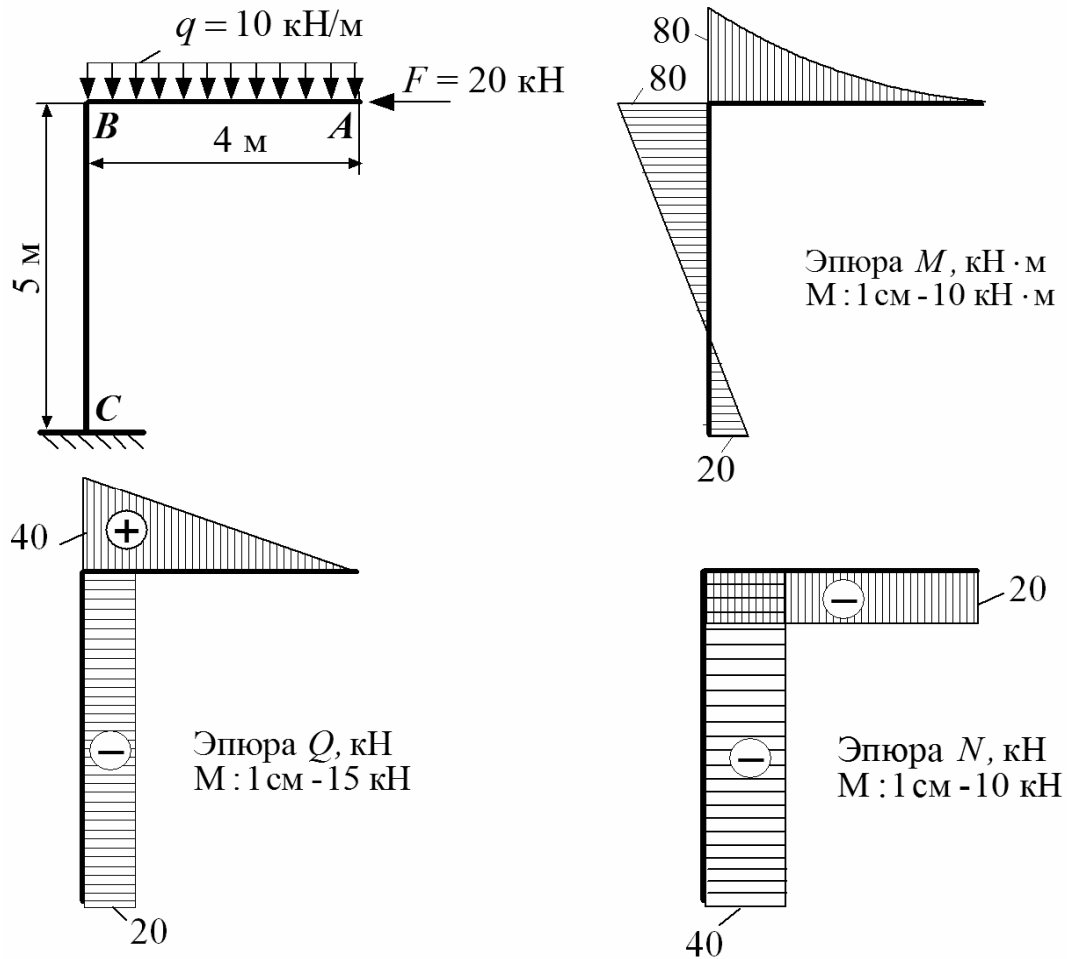


Рисунок 3.1

Решение

Стержень AB :

$$N = -F = -20 \text{ кН}; \quad Q_A = 0; \quad Q_B = q \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = -q \cdot 4 \cdot 2 = -10 \cdot 4 \cdot 2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стержень BC :

$$N = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН}; \quad Q = -F = -20 \text{ кН};$$

$$M_B = -q \cdot 4 \cdot 2 = -10 \cdot 4 \cdot 2 = -80 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = -q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 5 = -10 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 5 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

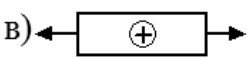
1 Метод, позволяющий определить внутренние усилия в сечении стержня, называется:

- а) метод сил;
- б) метод начальных параметров;
- в) метод независимости действия сил;
- г) метод сечений.

2 Если $N > 0$, то участок стержня:

- а) сжат;
- б) изогнут;
- в) растянут;
- г) испытывает сдвиг.

3 Укажите верное правило знаков для поперечной силы Q :

- а) 
- б) 
- в) 
- г) 

4 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусьев

Пример 1 – Произвести проверку прочности и жесткости стального ступенчатого бруса, показанного на рисунке 4.1.

Исходные данные:

$A_1 = 3 \text{ см}^2$; $A_2 = 5 \text{ см}^2$; $R = 160 \text{ МПа}$;
 $[\Delta \ell] = 1 \text{ мм}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\gamma_c = 1$.

Решение

Проверку прочности производим по условию

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} \leq R \cdot \gamma_c.$$

По эпюре продольных сил и конфигурации стержня определяем опасный участок:

$$\sigma_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 140 \cdot 10^6 \text{ Па} = 140 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

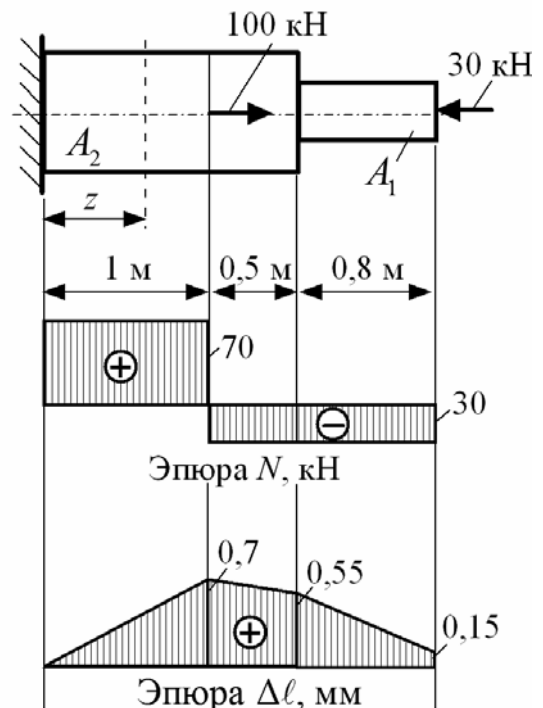


Рисунок 4.1

Для проверки жесткости стержня строим эпюру $\Delta\ell$, определяя деформацию каждого участка по формуле

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

Начало расчета находится в сечении, примыкающем к жесткой заделке, перемещение которого равно нулю: $z = 0$; $\Delta\ell = 0$.

$$z = 1 \text{ м}; \quad \Delta\ell = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм};$$

$$z = 1,5 \text{ м}; \quad \Delta\ell = 0,7 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,55 \text{ мм};$$

$$z = 2,3 \text{ м}; \quad \Delta\ell = 0,55 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,15 \text{ мм}.$$

$$\Delta\ell_{\max} = 0,7 \text{ мм} < [\Delta\ell] = 1 \text{ мм}.$$

Жесткость бруса обеспечена.

Пример 2 – Определить наибольшее значение допустимой силы F для ступенчатого чугунного бруса (рисунок 4.2), если $R_{\text{раст}} = 60 \text{ МПа}$, $R_{\text{сж}} = 120 \text{ МПа}$, $A = 10 \text{ см}^2$, $\gamma_c = 1$.

Решение

Эпюра продольных сил N , выраженная в долях от силы F , показана на рисунке 4.2.

Расчет допустимой силы по условию прочности в сжатой области:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{сж}} = \frac{F}{A} \leq R_{\text{сж}};$$

$$[F]_{\text{сж}} \leq A \cdot R_{\text{сж}} = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 120 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

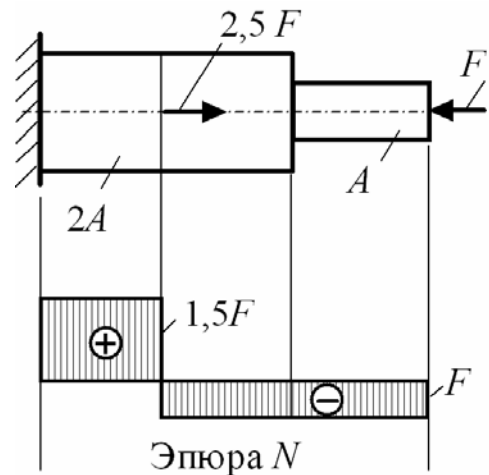


Рисунок 4.2

Расчет допустимой силы по условию прочности в растянутой области:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{раст}} = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot A} \leq R_{\text{раст}};$$

$$[F]_{\text{расч}} \leq \frac{2 \cdot A \cdot R_{\text{расч}}}{1,5} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,5} = 80 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Допустимой силой для бруса будет меньшая из рассчитанных сил:
 $[F] = 80 \text{ кН.}$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 По какой формуле определяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении-сжатии:

а) $\sigma = \frac{M}{W}$; в) $\sigma = G \cdot \varepsilon$;
 б) $\sigma = \frac{N}{A}$; г) $\sigma = \frac{N}{E \cdot A}$.

2 По какой формуле определяется абсолютная деформация бруса при растяжении-сжатии:

а) $\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}$; в) $\Delta \ell = \frac{\varepsilon}{\ell}$;
 б) $\Delta \ell = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$; г) $\Delta \ell = \frac{N}{A}$.

3 Образец диаметром 0,02 м разрушился под действием силы $F = 0,15 \text{ МН}$. Тогда величина предела прочности материала равна:

а) 7,5 МПа; в) 209,3 МПа;
 б) 375 МПа; г) 477,7 МПа.



5 Расчет простейших статически неопределимых систем

Пример 1 – Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 5.1), если площадь поперечного сечения $A = 3 \text{ см}^2$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, расчетное сопротивление $R = 160 \text{ МПа}$, коэффициент $\gamma_c = 1$.

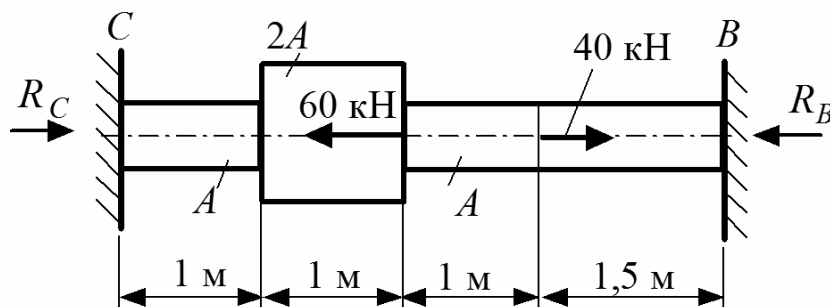


Рисунок 5.1

Решение

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum X = R_C - 60 + 40 - R_B = 0.$$

Стержень один раз статически неопределим, так как единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta \ell = \Delta \ell_P + \Delta \ell_R = 0,$$

где $\Delta \ell_P$, $\Delta \ell_R$ – деформации стержня соответственно от внешних сил и реакций на опорах.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору C и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением эпюры N_P и под действием реакции R_C с построением эпюры N_R (рисунок 5.2).

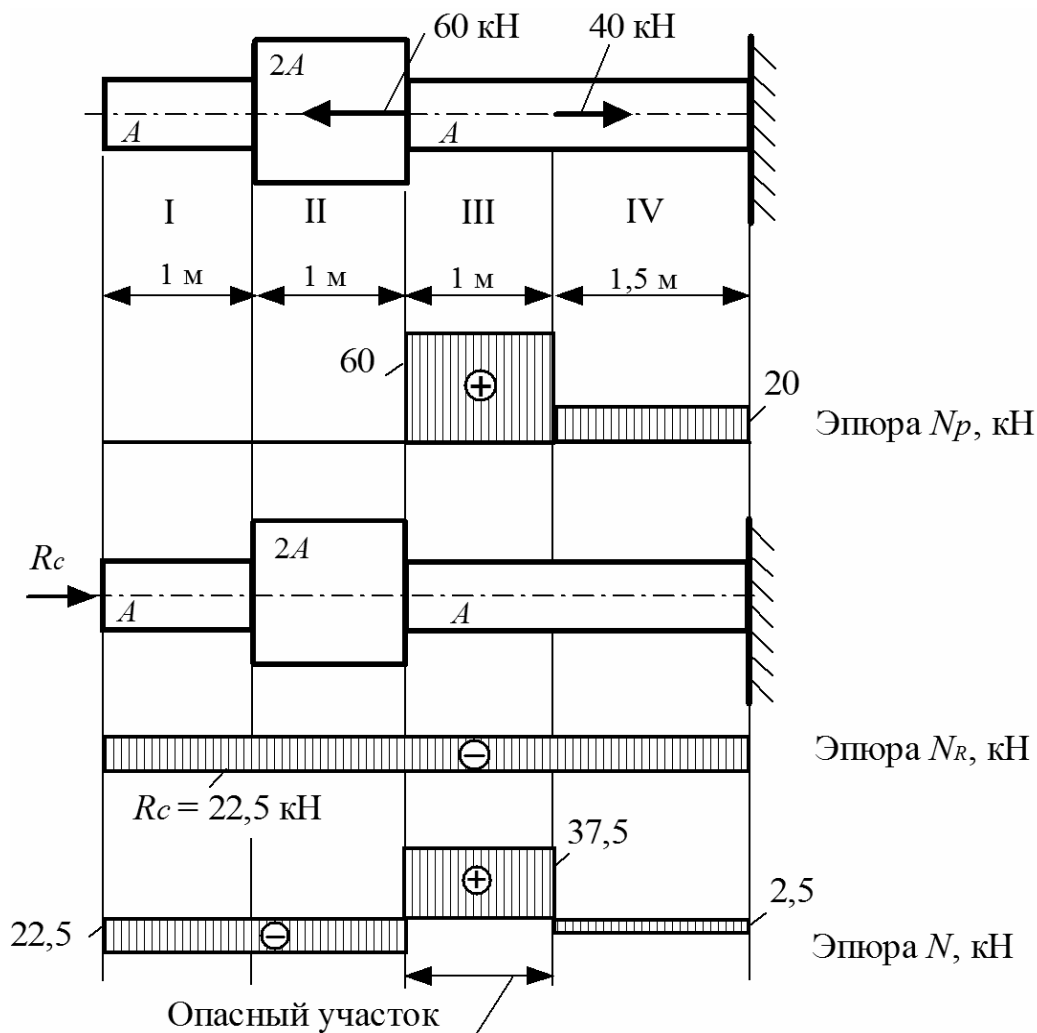


Рисунок 5.2

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta \ell_P = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1,5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta \ell_R = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot \ell_i}{E_i \cdot A_i} = -\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1,5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta \ell = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A} = 0, \text{ откуда } R_C = 22,5 \text{ кН.}$$

Окончательную эпюру продольных сил N строим суммированием эпюр N_P и N_R . Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Сколько независимых уравнений статики можно составить для плоской стержневой системы:

- а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

2 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой стержневой системы:

- а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

3 Укажите условие прочности для статически неопределимой системы, работающей на растяжение-сжатие:

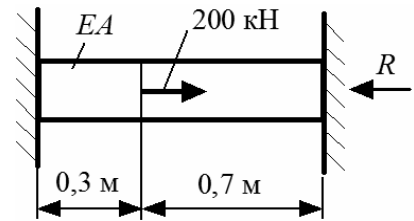
- а) $\frac{Q}{A} \leq R \cdot \gamma_c$; б) $\frac{M}{W} \leq R \cdot \gamma_c$; в) $\frac{N}{E} \leq R \cdot \gamma_c$; г) $\frac{N}{A} \leq R \cdot \gamma_c$.

4 Какое свойство не присуще статически неопределимым системам:

- а) возможность возникновения температурных напряжений;
б) возможность возникновения монтажных напряжений;
в) возможность свободного деформирования;
г) перераспределение внутренних усилий при нарушении связи.

5 Определите реакцию на правой опоре R , если жесткость поперечного сечения EA постоянна по величине:

- а) 60 кН;
- б) 200 кН;
- в) 85,7 кН;
- г) 140 кН.



6 Определение главных напряжений и главных площадок при плоском напряженном состоянии

Пример – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как указано на рисунке 6.1.

Определить положение главных площадок и направление действия главных напряжений. Проверить прочность детали по третьей теории прочности, если $R = 160$ МПа.

Определить величину максимальных касательных напряжений и указать площадки, на которых они действуют.

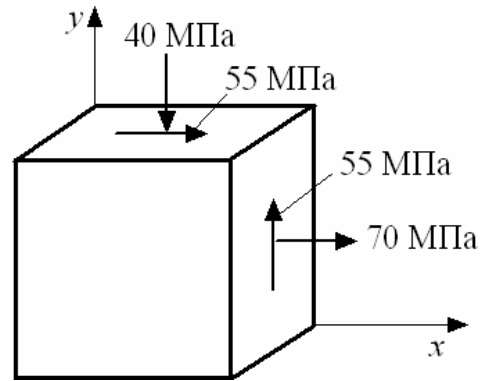


Рисунок 6.1

Решение

Напряжения, действующие на указанных площадках:

$$\sigma_x = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 55 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения

$$\sigma_{\pm 1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{70 - 40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(70 + 40)^2 + 4 \cdot 55^2} = 15 \pm 78;$$

$$\sigma_{\max} = 15 + 78 = 93 \text{ МПа} = \sigma_1;$$

$$\sigma_{\min} = 15 - 78 = -63 \text{ МПа} = \sigma_3;$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Проверка прочности: $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 93 - (-63) = 156 \text{ МПа} < R$.

Условие прочности выполняется.

Положение главных площадок определяется углом α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 55}{70 - (-40)} = 1; \quad \alpha_0 = 22,5^\circ.$$

Так как $\alpha_0 > 0$, поворачиваем заданные площадки против часовой стрелки и получаем главные площадки (рисунок 6.2).

Определяем величину максимальных касательных напряжений, которые действуют на площадках, расположенных под углом 45° по отношению к главным площадкам:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{93 - (-63)}{2} = 78 \text{ МПа.}$$

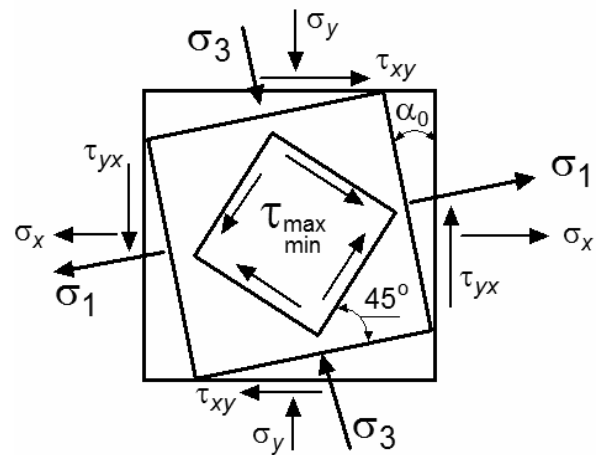
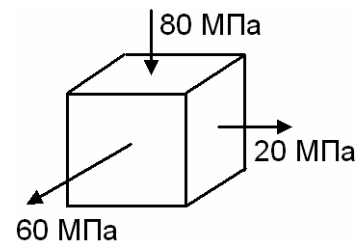


Рисунок 6.2

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

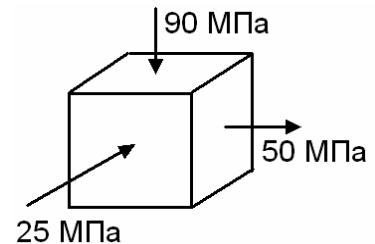
1 Для заданного напряженного состояния главное напряжение σ_3 равно:

- а) 80 МПа; в) 20 МПа;
б) 60 МПа; г) – 80 МПа.



2 Для заданного напряженного состояния определить эквивалентное напряжение по теории максимальных касательных напряжений:

- а) 65 МПа; в) 165 МПа;
б) 140 МПа; г) 75 МПа.



7 Плоский изгиб прямого бруса

Пример 1 – Подобрать двутавровое поперечное сечение стальной балки (рисунок 7.1) и проверить его прочность по нормальным и касательным напряжениям. Исходные данные: $R = 160 \text{ МПа}$; $R_s = 100 \text{ МПа}$; $\gamma_c = 1$.

Решение

Поперечное сечение выбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 1} = 281,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 281,25 \text{ см}^3.$$

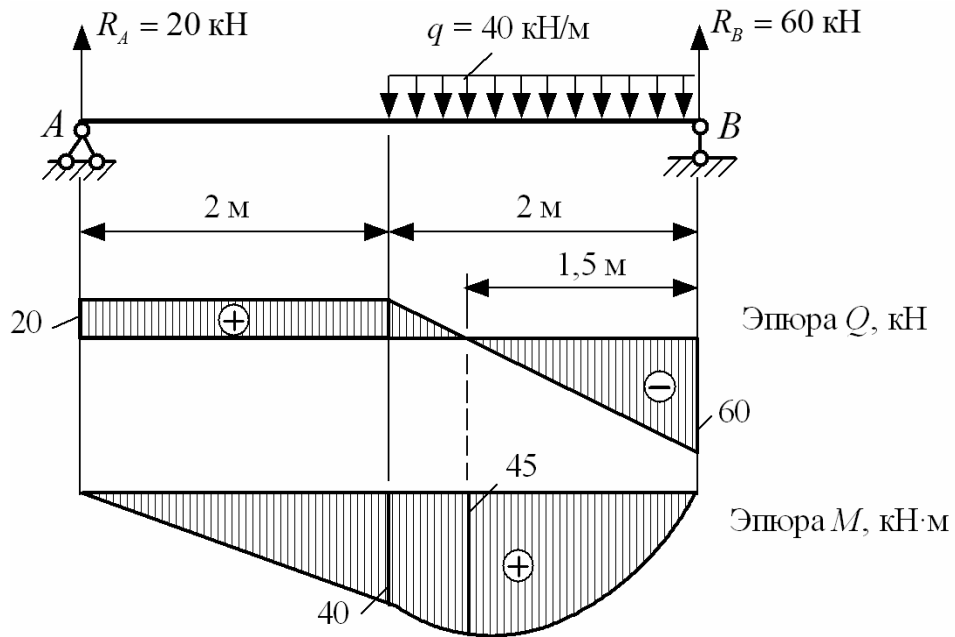


Рисунок 7.1

Рассчитанному моменту сопротивления в наибольшей степени подходит двутавр № 24 ($W_x = 289 \text{ см}^3$; $I_x = 3460 \text{ см}^4$; $S_x^* = 163 \text{ см}^3$; $b^* = 5,6 \text{ мм}$).

Проверяем прочность двутавра по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{b^* \cdot I_x} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,5 \text{ МПа} < R_s = 100 \text{ МПа}.$$

Пример 2 – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой F (рисунок 7.2). Определить допустимую величину силы $[F]$ при $R = 10 \text{ МПа}$ и $\gamma_c = 1$. Проверить прочность балки по касательным напряжениям при $R_s = 1 \text{ МПа}$.

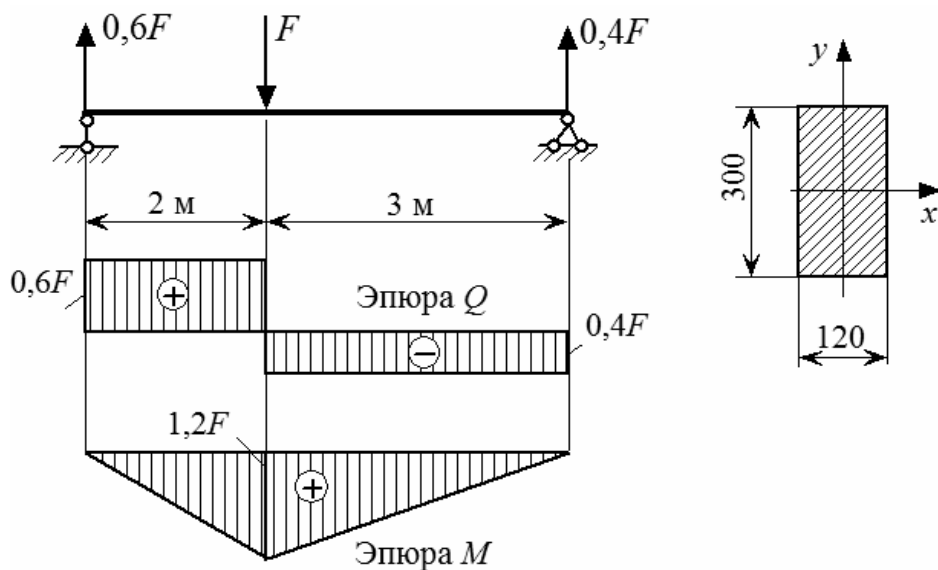


Рисунок 7.2

Решение

Осей момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 30^2}{6} = 1800 \text{ см}^3 = 1800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Допустимую силу рассчитаем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1,2 \cdot [F]}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$[F] = \frac{W_x \cdot R}{1,2} = \frac{1800 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 1}{1,2} = 15000 \text{ Н} = 15 \text{ кН}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,6 \cdot 15 \cdot 10^3}{12 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,375 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,375 \text{ МПа} < R_s = 1 \text{ МПа}.$$

Пример 3 – Проверить жесткость двутавровой балки (рисунок 7.3), если допустимый прогиб $[y] = 6 \text{ мм}$.

Исходные данные: двутавр № 20 ($I_x = 1840 \text{ см}^4$); $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

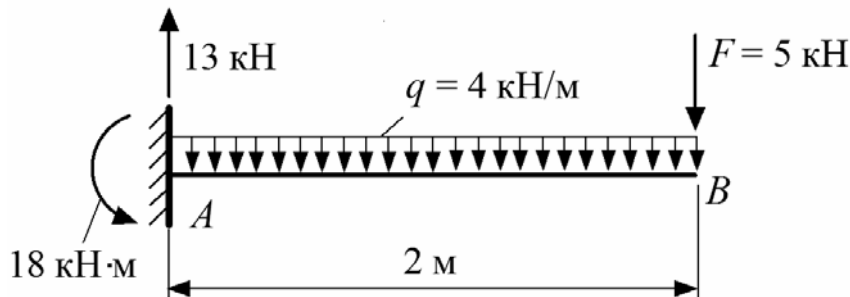


Рисунок 7.3

Решение

Уравнение прогибов для данной балки по методу начальных параметров имеет вид:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z - 18 \cdot \frac{z^2}{2!} + 13 \cdot \frac{z^3}{3!} - 4 \cdot \frac{z^4}{4!}.$$

Начальные параметры следующие: $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$.

Максимальный прогиб $y_{\max} = y_B$ при $z = 2$ м.

$$EI_x y_B = -18 \cdot \frac{2^2}{2} + 13 \cdot \frac{2^3}{6} - 4 \cdot \frac{2^4}{24} = -21,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_{\max} = y_B = \frac{21,33}{EI_x} = \frac{21,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0058 \text{ м} = 5,8 \text{ мм} < [y] = 6 \text{ мм}.$$

Пример 4 – Методом начальных параметров определить прогиб сечения C и угол поворота сечения D деревянной балки прямоугольного поперечного сечения указанных размеров (рисунок 7.4).

Модуль продольной упругости материала $E = 10^4 \text{ МПа} = 10^{10} \text{ МПа}$.

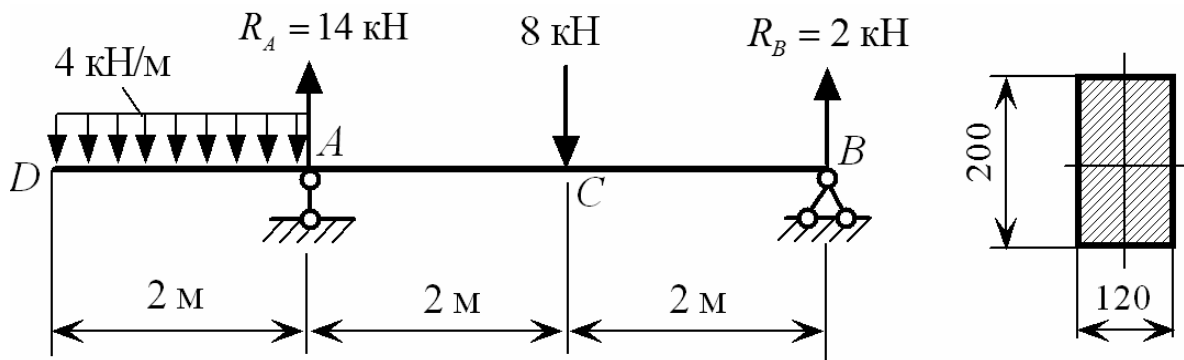


Рисунок 7.4

Решение

Определение осевого момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Определение начальных параметров:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{2^4}{4!} = 0;$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{6^4}{4!} + 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 14 \cdot \frac{4^3}{3!} - 8 \cdot \frac{2^3}{3!} = 0;$$

$$EI_x y_0 = -\frac{40}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_x \theta_0 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Прогиб сечения C

$$\begin{aligned}
 EI_x y_C &= EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 14 \cdot \frac{2^3}{3!} = \\
 &= -\frac{40}{3} + 8 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{24} + 4 \cdot \frac{2^4}{24} + 14 \cdot \frac{2^3}{6} = -\frac{8}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \\
 y_C &= -\frac{8}{3 \cdot EI_x} = -\frac{8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = -0,33 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -3,3 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

Угол поворота сечения D равен начальному параметру θ_0 :

$$\theta_D = \frac{8}{EI_x} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 0,01 \text{ рад}.$$

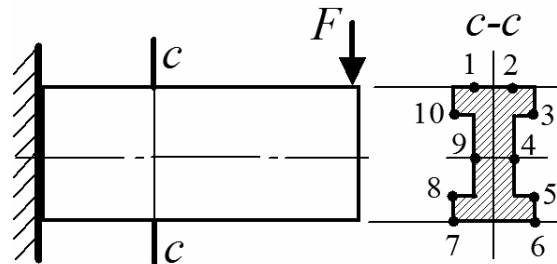
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки имеет следующий вид:

а) $\frac{M}{W} \leq R \cdot \gamma_c$; б) $\frac{M \cdot \ell}{W} \leq R \cdot \gamma_c$; в) $\frac{M}{E \cdot I} \leq R \cdot \gamma_c$; г) $\frac{F}{W} \leq R \cdot \gamma_c$.

2 Максимальные нормальные напряжения действуют в точках:

- а) 10, 3, 8, 5;
- б) 3, 5, 6;
- в) 1, 2, 7, 6;
- г) 9, 4.

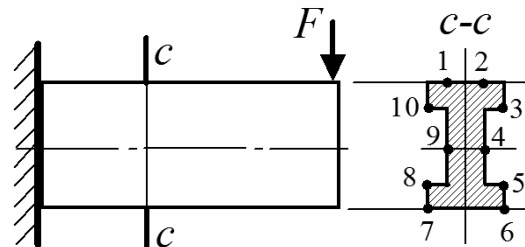


- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный.

3 Какой закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки:

4 Максимальные касательные напряжения действуют в точках:

- а) 10, 3, 8, 5;
- б) 3, 5, 6;
- в) 1, 2, 7, 6;
- г) 9, 4.



- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный.

5 Какой закон распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки:

6 Укажите наиболее общее определение «начальные параметры»:

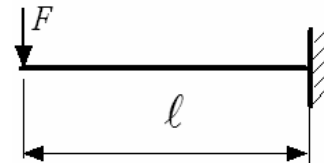
- а) прогиб и угол поворота в опорном сечении;
- б) прогиб и угол поворота в крайнем левом сечении балки;
- в) прогиб и угол поворота в жесткой заделке;
- г) прогиб и угол поворота в крайнем правом сечении балки.

7 Укажите жесткость поперечного сечения при изгибе:

- а) GI_x ; б) EI_ρ ; в) EI_x ; г) EA

8 Начальные параметры показанной балки равны:

- а) $y_0 \neq 0, \theta_0 = 0$;
- б) $y_0 \neq 0, \theta_0 \neq 0$;
- в) $y_0 = 0, \theta_0 = 0$;
- г) $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$.



8 Расчеты на прочность при сдвиге

Пример – Проверить прочность заклепочного соединения двух листов, перекрытых двумя накладками (рисунок 8.1), если $F = 500$ кН, диаметр заклепки $d = 20$ мм. Расчетное сопротивление на срез материала заклепки $R_S = 90$ МПа.

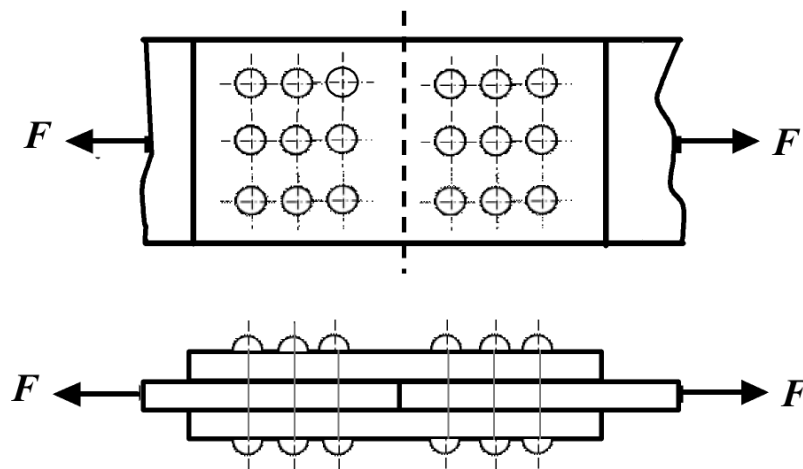


Рисунок 8.1

Решение

Проверку прочности выполняем по условию

$$\tau_{\max} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot k} \leq R_S,$$

где n – число заклепок, $n = 18$;

k – число плоскостей среза на одной заклепке, $k = 2$;

d – диаметр заклепки, $d = 0,02$ м.

$$\tau_{\max} = \frac{500 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 0,02^2}{4} \cdot 18 \cdot 2} = 44,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44,25 \text{ МПа} < R_s = 90 \text{ МПа}.$$

Неразъемность соединения обеспечена с большим запасом прочности. Определим минимальное количество заклепок для данного соединения.

$$n = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot R_s \cdot k} = \frac{500 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 0,02^2}{4} \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 2} = 8,85 \text{ шт.}$$

С учетом симметричности соединения принимаем $n = 10$ шт.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие прочности при сдвиге имеет следующий вид:

$$\text{а) } \frac{M}{W} \leq R_s; \quad \text{б) } \frac{F}{W} \leq R_s; \quad \text{в) } \frac{F}{I_x} \leq R_s; \quad \text{г) } \frac{F}{A_{cd}} \leq R_s.$$

2 Укажите жесткость поперечного сечения при сдвиге:

$$\text{а) } GI_x; \quad \text{б) } EI_\rho; \quad \text{в) } GA_{cd}; \quad \text{г) } EA_{cd}.$$

9 Кручение цилиндрического стержня

Пример 1 – Проверить прочность и жесткость ступенчатого стального бруса (рисунок 9.1). Исходные данные: $R_s = 60$ МПа; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; $[\varphi] = 0,03$ рад.

Решение

Геометрические характеристики вала следующие:

$$I_{\rho 1} = I_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4 = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4 = 25,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_{\rho 1} = W_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,53 \text{ см}^3 = 24,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3 = 12,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

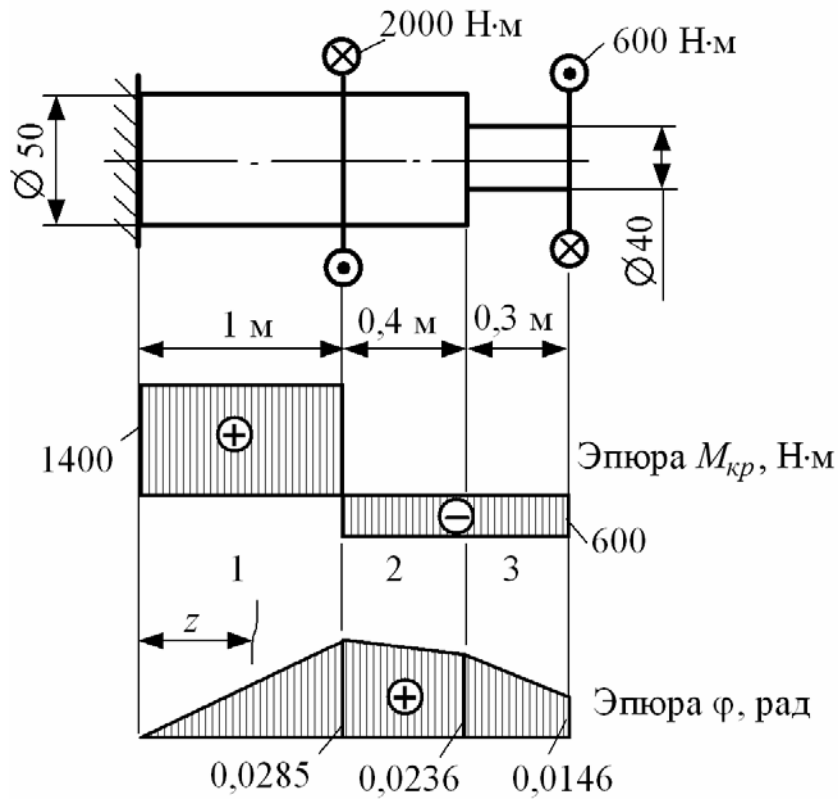


Рисунок 9.1

Проверка прочности вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 1}} = \frac{1400}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 57,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 57,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 2}} = \frac{600}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 3}} = \frac{600}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 57,1 \text{ МПа} < R_s = 60 \text{ МПа}.$$

Проверка жесткости вала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр i} \cdot \ell_i}{G_i \cdot I_{\rho i}};$$

$$z = 0 \text{ м}; \quad \varphi = 0 \text{ рад};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 = \frac{1400 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0285 \text{ рад};$$

$$z = 1,4 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0285 - \frac{600 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0236 \text{ рад};$$

$$z = 1,7 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_3 = 0,0236 - \frac{600 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,12 \cdot 10^{-8}} = 0,0146 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\max} = 0,0285 \text{ рад} < [\varphi] = 0,03 \text{ рад}.$$

Пример 2 – Определить минимальный диаметр стального вала (рисунок 9.2), если $R_S = 90 \text{ МПа}$, $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\Theta] = 0,03 \text{ рад/м}$.

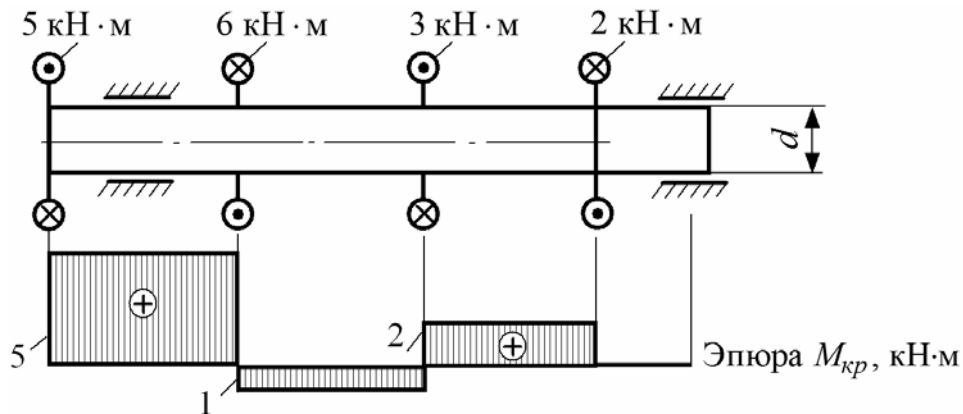


Рисунок 9.2

Решение

По эпюре $M_{кр}$ определим опасный участок, на котором действует максимальный крутящий момент $5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot R_S}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,0657 \text{ м}.$$

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,03}} = 0,0679 \text{ м}.$$

В качестве минимального диаметра вала выбираем значение

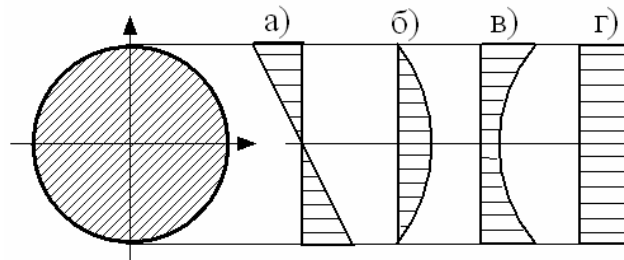
$$d = 0,0679 \text{ м} = 67,9 \text{ мм.}$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите формулу для расчета максимальных касательных напряжений при кручении:

$$\text{а) } \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \ell}{W_{\rho}}; \quad \text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\rho}}; \quad \text{в) } \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\rho}}; \quad \text{г) } \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}.$$

2 Как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении:



3 Укажите жесткость поперечного сечения при кручении:

$$\text{а) } GI_x; \quad \text{б) } EI_{\rho}; \quad \text{в) } EI_x; \quad \text{г) } EA.$$

10 Сложное сопротивление

Пример 1 – Стальная балка двутаврового поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 10.1). Проверить прочность балки.

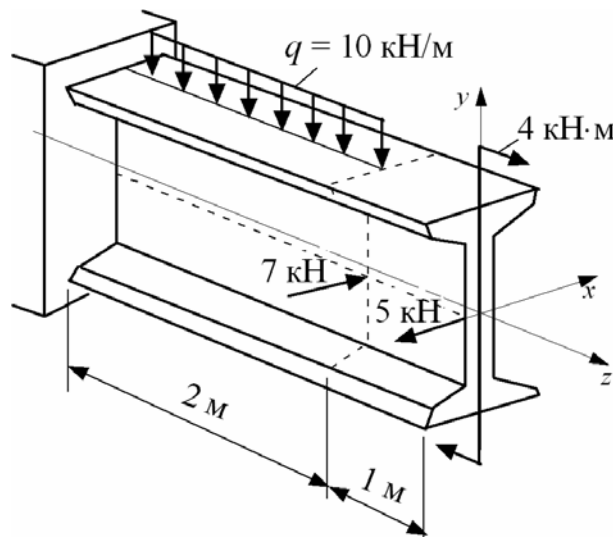


Рисунок 10.1

Дано: двутавр № 30 ($W_x = 472 \text{ см}^3$; $W_y = 49,9 \text{ см}^3$); $R = 160 \text{ МПа}$; $\gamma_c = 1$.

Решение

Балка испытывает косой изгиб. Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. Вертикальные силы изгибают балку в вертикальной плоскости, создавая момент M_x . Горизонтальные силы изгибают балку в горизонтальной плоскости, создавая момент M_y . Промежуточные расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 10.2.

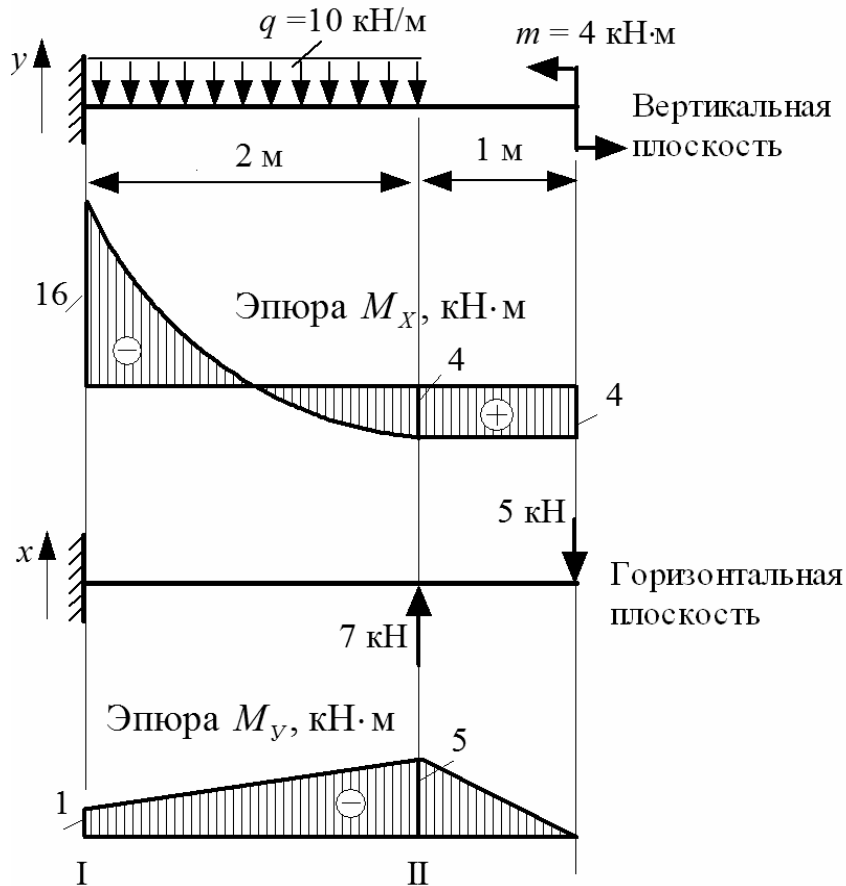


Рисунок 10.2

Выполним проверку прочности в предполагаемых опасных сечениях по условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R \cdot \gamma_c.$$

Напряжение в сечении I

$$\sigma_I = \frac{16 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{1 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 54 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Напряжение в сечении II

$$\sigma_{II} = \frac{4 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Наиболее опасным оказалось сечение II. Условие прочности выполняется:

$$\sigma_{\max} = 109 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 160 \text{ МПа}.$$

Пример 2 – Проверить прочность бетонной колонны, если $F = 7 \text{ кН}$, $R_{\text{раст}} = 0,6 \text{ МПа}$, $R_{\text{сж}} = 6 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$. Размеры на рисунке 10.3 показаны в миллиметрах.

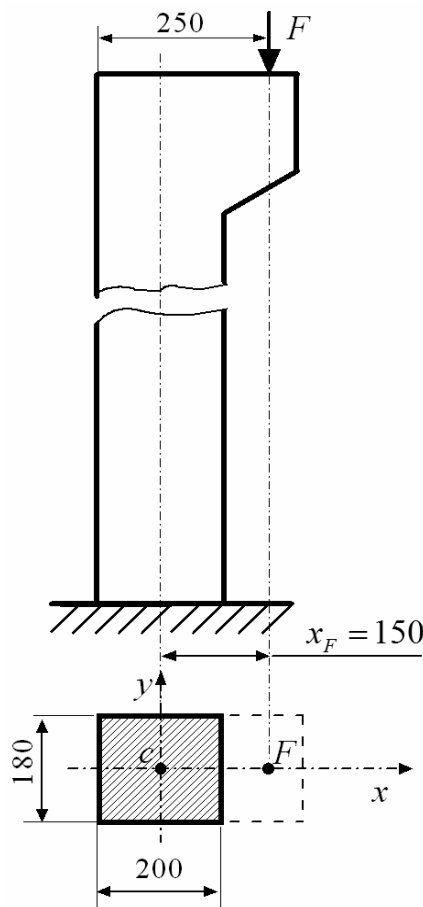


Рисунок 10.3

Решение

Условие прочности для сжимающей силы

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_{on}}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_{on}}{i_x^2} \right) \leq R \cdot \gamma_c.$$

Чтобы им воспользоваться, нужно определить положение нейтральной оси и опасные точки в сечении с координатами $x_{он}, y_{он}$.

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны.
Площадь

$$A = 20 \cdot 18 = 360 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 18^3}{12} = 9720 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 20^3}{12} = 12000 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{9720}{360} = 27 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{12000}{360} = 33,3 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = 15 \text{ см}, y_F = 0$.

Положение нейтральной оси определяется по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (рисунок 10.4):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{33,3}{15} = -2,2 \text{ см}; \quad Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{27}{0} = -\infty.$$

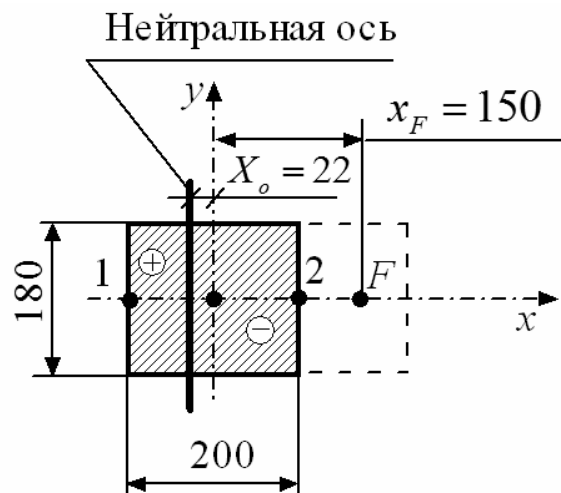


Рисунок 10.4

Нейтральная ось разделила колонну на две части. Определим координаты *опасных точек*.

В *растянутой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например, точку 1: $x_1 = -10 \text{ см}, y_1 = 0$.

В *сжатой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например, точку 2: $x_2 = 10 \text{ см}, y_2 = 0$.

Проверка прочности в *сжатой области*:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_2 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot 10}{33,3} + 0\right) = -1,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{сж} = 1,07 \text{ МПа} < R_{сж} \cdot \gamma_c = 6 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности в *растянутой области*:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot (-10)}{33,3} + 0\right) = 0,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,68 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{раст} = 0,68 \text{ МПа} > R_{раст} \cdot \gamma_c = 0,6 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{0,68 - 0,6}{0,6} \cdot 100 \% = 13,3 \% > 5 \%,$$

что недопустимо.

Вывод: так как условие прочности на растяжение не выполняется, то прочность колонны не обеспечена.

Пример 3 – Определить минимальный диаметр стального стержня, к которому приложена растягивающая сила $F = 30 \text{ кН}$ (рисунок 10.5), если расчетное сопротивление материала $R = 180 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

Решение

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,785 \cdot d^2.$$

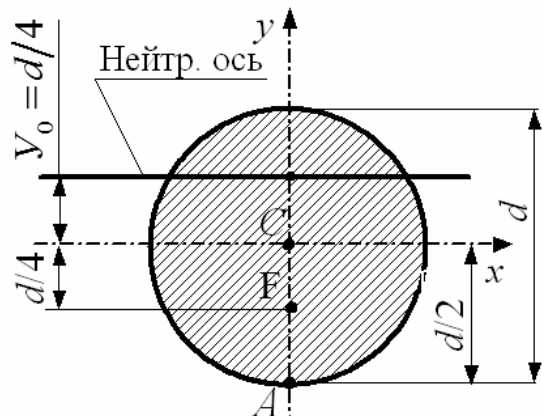


Рисунок 10.5

Квадрат радиуса инерции

$$i_x^2 = i_y^2 = d^2/16.$$

Координаты точки приложения силы: $x_F = 0$, $y_F = -d/4$.

Отрезки, которые отсекает нейтральная линия на осях координат,

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{d^2/16}{0} = -\infty;$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{d^2/16}{-d/4} = \frac{d}{4}.$$

Опасной является точка A , как самая удаленная точка от нейтральной оси. Ее координаты следующие: $x_A = 0$, $y_A = -d/2$.

Определим минимальный диаметр стержня из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{0 \cdot 0}{d^2/16} + \frac{(-d/4) \cdot (-d/2)}{d^2/16} \right) = \frac{F}{0,785 \cdot d^2} \cdot 3 = R \cdot \gamma_c;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{F \cdot 3}{R \cdot \gamma_c \cdot 0,785}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{180 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 0,785}} = 0,025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

Пример 4 – Определить допустимую сжимающую силу для чугунного стержня коробчатого поперечного сечения (рисунок 10.6), если расчетное сопротивление материала $R_{\text{раст}} = 60$ МПа, $R_{\text{сж}} = 150$ МПа, $\gamma_c = 1$. Построить ядро сечения. Размеры на рисунке 10.6 показаны в миллиметрах.

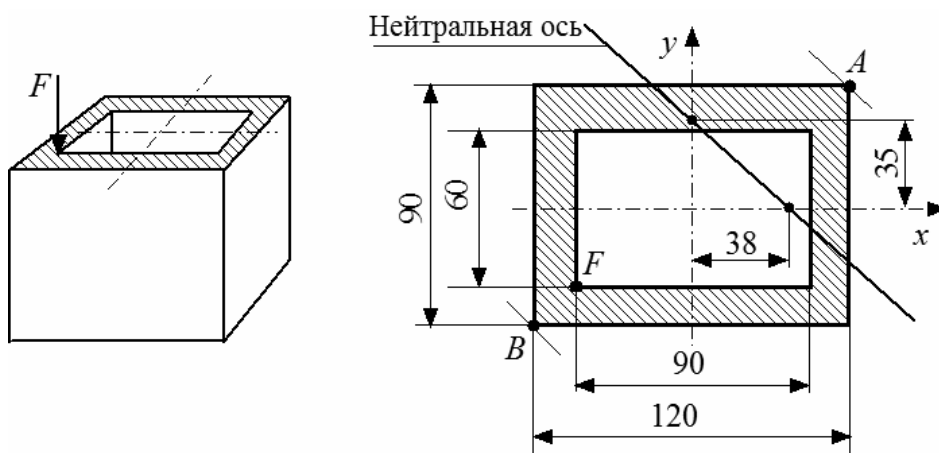


Рисунок 10.6

Решение

Площадь поперечного сечения $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931,5}{54} = 17,25 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = -4,5 \text{ см}$; $y_F = -3 \text{ см}$.

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат:

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17,25}{-4,5} = 3,8 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,5}{-3} = 3,5 \text{ см}.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части.

В *растянутой области* составим условие прочности для опасной точки A с координатами $x_A = 6 \text{ см}$ и $y_A = 4,5 \text{ см}$:

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot 6}{17,25} + \frac{(-3) \cdot 4,5}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot (-1,85)}{A} \leq R_{\text{раст}} = 60 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot R_{\text{раст}}}{1,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,85} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

В *сжатой области* составим условие прочности для опасной точки B с координатами $x_B = -6 \text{ см}$ и $y_B = -4,5 \text{ см}$:

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot (-6)}{17,25} + \frac{(-3) \cdot (-4,5)}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot 3,85}{A} \leq R_{\text{сж}} = -150 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot R_{\text{сж}}}{3,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{3,85} = 210 \cdot 10^3 \text{ Н} = 210 \text{ кН}.$$

Допустимой силой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил:

$$[F] = 175 \text{ кН.}$$

Для построения *ядра сечения* (рисунок 10.7) нужно провести касательные линии к контуру сечения и определить координаты угловых точек ядра по следующим формулам:

$$x_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_x^2}{Y_0}.$$

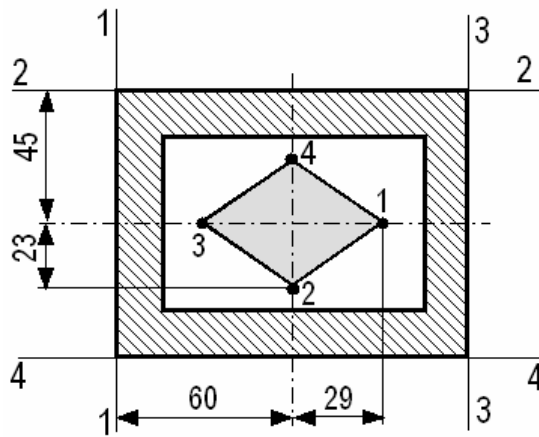


Рисунок 10.7

Касательная 1–1: $X_0 = -6 \text{ см}$, $Y_0 = \infty$.

$$\text{Точка 1: } x_1 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{-6} = 2,9 \text{ см}, \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 2–2: $X_0 = \infty$, $Y_0 = 4,5 \text{ см}$.

$$\text{Точка 2: } x_2 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0, \quad y_2 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{4,5} = -2,3 \text{ см.}$$

Касательная 3–3: $X_0 = 6 \text{ см}$, $Y_0 = \infty$.

$$\text{Точка 3: } x_3 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{6} = -2,9 \text{ см}, \quad y_3 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 4–4: $X_0 = \infty$, $Y_0 = -4,5 \text{ см}$.

$$\text{Точка 4: } x_4 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0, \quad y_4 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{-4,5} = 2,3 \text{ см.}$$

Найденные точки соединяются прямыми линиями (см. рисунок 10.7).

Пример 5 – Рассчитать минимальный диаметр стального вала, на который насажены две шестерни средним диаметром $D_1 = 0,16$ м и $D_2 = 0,25$ м по третьей теории прочности (рисунок 10.8, а). Вал вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с и передает мощность 20 кВт. Расчетное сопротивление материала вала $R = 90$ МПа.

Решение

Вал испытывает совместное действие изгиба и кручения. Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерни,

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов и эпюра $M_{кр}$ показаны на рисунке 10.8, б.

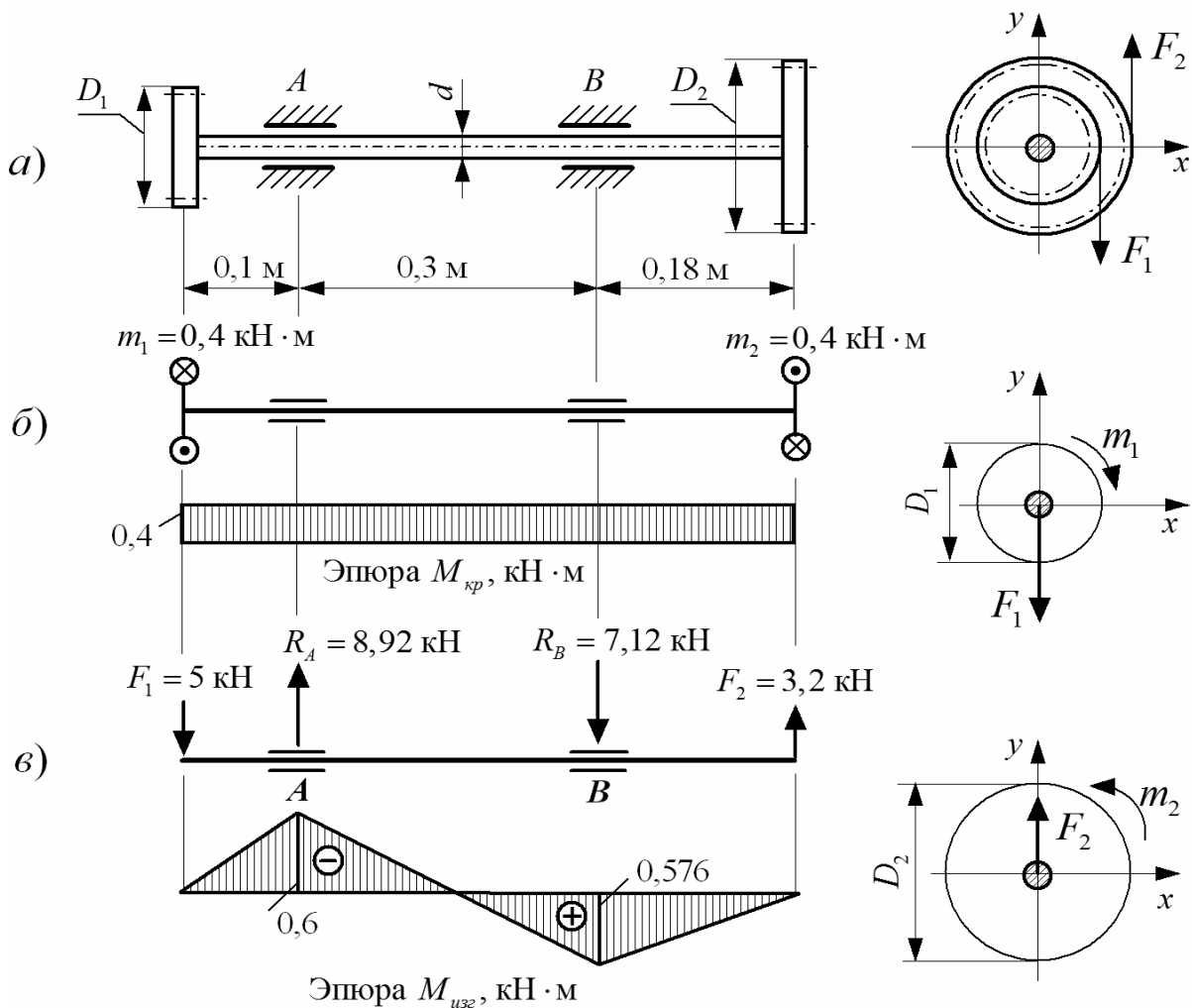


Рисунок 10.8

Окружные усилия, действующее на шестерни в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,16} = 5 \text{ кН}; \quad F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,25} = 3,2 \text{ кН}.$$

Схема действия изгибающих сил показана на рисунке 10.8, в. Опорные реакции R_A и R_B определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов $M_{изг}$.

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно третьей теории прочности,

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,4^2} = 0,72 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Диаметр вала

$$d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{экв}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,72 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,043 \text{ м} = 43 \text{ мм}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 По какой формуле определяются напряжения при косом изгибе:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma &= \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; & \text{в) } \sigma &= \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; \\ \text{б) } \tau &= \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y}; & \text{г) } \sigma &= \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y} \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x}. \end{aligned}$$

2 По какой формуле определяются максимальные напряжения при косом изгибе для сечений, которые вписываются в прямоугольник:

$$\text{а) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y}; \quad \text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}; \quad \text{в) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \text{г) } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}.$$

3 Максимальные нормальные напряжения при косом изгибе возникают в точках поперечного сечения, которые:

- а) максимально удалены от нейтральной оси;
- б) во всех угловых точках;
- в) в центре тяжести поперечного сечения;
- г) во всех точках по внешнему контуру сечения.

4 Для каких поперечных сечений косой изгиб невозможен:

- а) двутавр и прямоугольник;
- б) квадрат и равносторонний треугольник;
- в) швеллер и равнобедренный треугольник;
- г) равнополочный уголок.

5 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии:

- а) продольная сила и поперечная сила;
- б) только продольная сила;
- в) только изгибающие моменты;
- г) изгибающие моменты и продольная сила.

6 По какой формуле определяются напряжения при внецентренном растяжении-сжатии:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; & \text{в) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_x^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_y^2} \right); \\ \text{б) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y}; & \text{г) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right). \end{array}$$

7 При внецентренном растяжении-сжатии нулевая линия:

- а) проходит через центр тяжести поперечного сечения;
- б) проходит через точку приложения силы;
- в) находится за центром тяжести поперечного сечения напротив силы;
- г) находится между центром тяжести и точкой приложения силы.

8 При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения максимальны:

- а) на границе ядра сечения;
- б) в точке, наиболее удаленной от нулевой линии;
- в) в точке приложения силы;
- г) в центре поперечного сечения.

9 Какие напряжения испытывает брус, если сжимающая внецентренная сила приложена в ядре сечения:

- а) нормальные напряжения на растяжение и на сжатие;
- б) нормальные напряжения только на сжатие;
- в) нормальные напряжения только на растяжение;
- г) касательные напряжения на сдвиг.

10 Какая теория прочности применяется для расчета стальных валов на совместное действие изгиба и кручения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq R; & \text{в) } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R; \\ \text{б) } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \kappa \cdot \sigma_3 \leq R; & \text{г) } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq R. \end{array}$$

11 Как определить эквивалентный момент по третьей теории прочности:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}; & \text{в) } M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2}; \\ \text{б) } M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; & \text{г) } M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{изг}}^2}. \end{array}$$

12 Как определить суммарный изгибающий момент:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x + M_y}; & \text{в) } M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x \cdot M_y}; \\ \text{б) } M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; & \text{г) } M_{\text{изг}} = M_x + M_y. \end{array}$$

11 Устойчивость сжатых стержней

Пример 1 – Проверить устойчивость стального стержня (рисунок 11.1), определить его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: $R = 200$ МПа; $\gamma_c = 0,9$; коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$; коэффициенты $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Решение

Площадь сечения $A = 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Минимальный осевой момент инерции

$$I_y = I_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 162 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{162}{54}} = 1,73 \text{ см}.$$

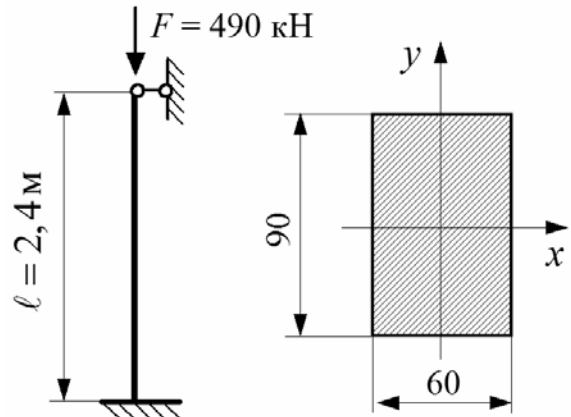


Рисунок 11.1

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 97,1.$$

Определим коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные таблицы [3, таблица 15.1]: при $\lambda = 90$ $\varphi = 0,665$; при $\lambda = 100$ $\varphi = 0,599$.

$$\varphi = 0,665 - \frac{0,665 - 0,599}{100 - 90} \cdot (97,1 - 90) = 0,618.$$

Проверим устойчивость стержня по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c.$$

$$\sigma = \frac{490 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^{-4}} = 90,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,74 \text{ МПа} < \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 0,618 \cdot 200 \cdot 0,9 = 111,24 \text{ МПа}.$$

Критическую силу определим по формуле Ясинского, т. к. гибкость стержня меньше предельной гибкости для стали ($97,1 < 100$):

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 97,1) \cdot 54 \cdot 10^{-4} = 1076 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1076}{490} = 2,2.$$

Пример 2 – Определить допустимое значение сжимающей силы $[F]$ стального стержня (рисунок 11.2), его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$; расчетное сопротивление $R = 200$ МПа; $\gamma_c = 0,8$; модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

Площадь и минимальный радиус инерции двутавра № 10: $A = 12$ см²; $i_y = i_{\min} = 1,22$ см.

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 163,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные таблицы [3, таблица 15.1]: при $\lambda = 160$ $\varphi = 0,29$; при $\lambda = 170$ $\varphi = 0,259$.

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,259}{170 - 160} \cdot (163,9 - 160) = 0,278.$$

Из условия устойчивости найдем допустимое значение сжимающей силы:

$$[F] = A \cdot \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0,278 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,8 = 53,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 53,4 \text{ кН}.$$

Критическую силу определим по формуле Эйлера, т. к. гибкость стержня больше предельной гибкости для стали ($163,95 > 100$):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{163,9^2} \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 88,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 88,1 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{88,1}{53,4} = 1,65.$$

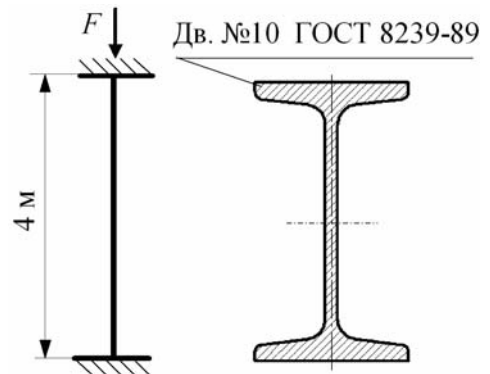


Рисунок 11.2

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие устойчивости:

а) $\sigma = A/F \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c$;

в) $\sigma = F/A \leq R \cdot \gamma_c$;

б) $\sigma = \varphi \cdot F/A \leq R \cdot \gamma_c$;

г) $\sigma = F/A \leq \varphi \cdot R \cdot \gamma_c$.

2 Формула Ясинского для стального стержня справедлива при:

а) $0 < \lambda \leq 40$;

в) $40 < \lambda \leq 100$;

б) $100 < \lambda \leq 140$;

г) $\lambda \geq 100$.

3 Формула Эйлера для стального стержня справедлива при:

а) $0 < \lambda \leq 40$;

в) $40 < \lambda \leq 100$;

б) $80 < \lambda \leq 100$;

г) $\lambda \geq 100$.

4 Коэффициент приведения длины μ зависит от:

а) гибкости стержня;

в) величины критической силы;

б) условий закрепления стержня;

г) формы поперечного сечения.

12 Простейшие задачи при динамическом нагружении

Пример 1 – Груз $G = 10$ кН падает с высоты $h = 10$ см на двутавровую стойку № 20 ($A = 26,8$ см²) длиной $l = 4$ м (рисунок 12.1, а). Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Определить величину нормального напряжения и укорочение стойки при ударе, если стойка не теряет устойчивость.

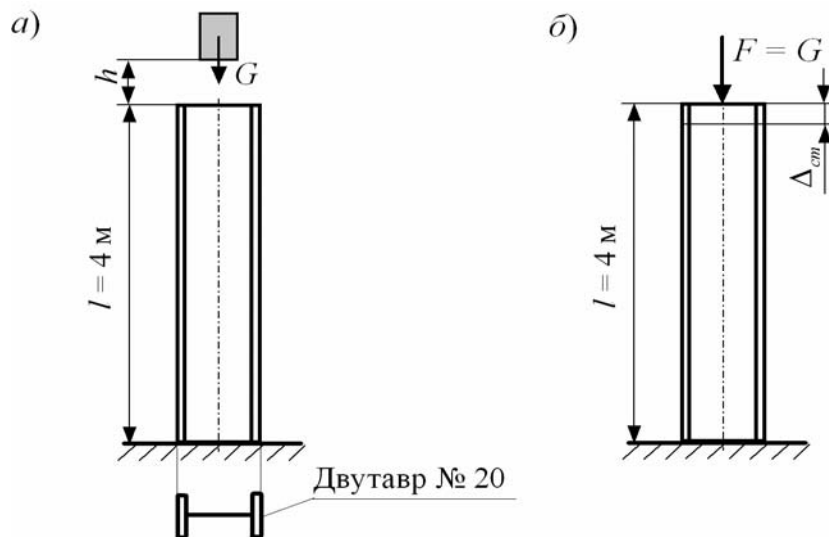


Рисунок 12.1

Решение

Расчетными формулами при ударе являются следующие:

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{ст};$$

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{ст};$$

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}},$$

где k – динамический коэффициент при ударе.

Определим величину нормального напряжения и укорочение стойки, соответствующие статическому способу приложения силы (рисунок 12.1, б):

$$\sigma_{ст} = \frac{F}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 3,73 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\Delta_{ст} = \frac{Fl}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 26,8 \cdot 10^{-4}} = 0,746 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,746 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Динамический коэффициент

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,746 \cdot 10^{-2}}} = 1 + 51,8 = 52,8.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{ст} = 52,8 \cdot 3,73 = 193 \text{ МПа}.$$

Укорочение стойки при ударе

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{ст} = 52,8 \cdot 0,746 \cdot 10^{-2} = 0,394 \text{ см}.$$

Пример 2 – На двутавровую балку № 20 длиной $l = 9$ м, свободно лежащую на двух шарнирных опорах, с высоты $h = 45$ мм падает груз $G = 1,2$ кН (рисунок 12.2, а). Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, осевой момент инерции двутавра $I_x = 1840$ см⁴, осевой момент сопротивления $W_x = 184$ см³.

Определить наибольшее нормальное напряжение в балке и прогиб в месте падения груза.

Решение

Рассчитываем балку на действие статической нагрузки: $F = G = 1,2$ кН (рисунок 12.2, б).

Реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot 3 - R_B \cdot 9 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3}{9} = \frac{1,2 \cdot 3}{9} = 0,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 6 - R_A \cdot 9 = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot 6}{9} = \frac{1,2 \cdot 6}{9} = 0,8 \text{ кН}.$$

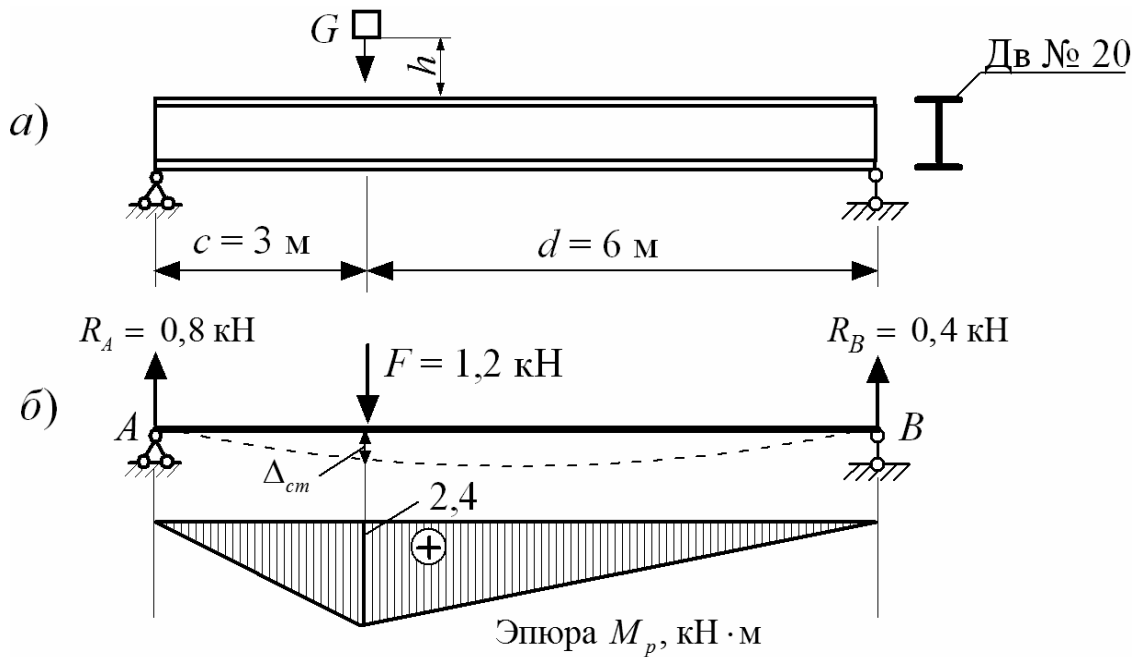


Рисунок 12.2

Строим эпюру изгибающих моментов M_p , по которой определяем максимальный момент: $M_{\max} = 2,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определим максимальное нормальное напряжение, соответствующие статическому способу приложения силы:

$$\sigma_{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 13 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13 \text{ МПа}.$$

Для определения прогиба Δ_{cm} воспользуемся готовым решением из справочных материалов [8, таблица Б.17]:

$$\Delta_{cm} = \frac{F c^2 d^2}{3(c+d)EI_x} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 3^2 \cdot 6^2}{3(3+6) \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,9 \text{ мм}.$$

Определяем динамический коэффициент:

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 45}{3,9}} = 5,9.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке при ударе

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{cm} = 5,9 \cdot 13 = 76,7 \text{ МПа.}$$

Прогиб в месте падения груза

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{cm} = 5,9 \cdot 3,9 = 23,01 \text{ мм.}$$

Тестовые вопросы для самопроверки

1 Динамический коэффициент при ударе вычисляется по следующей формуле:

а) $k = 1 + \frac{a}{q}$;

в) $k = 1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}$;

б) $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}}$;

г) $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}}$.

2 Гипотезы предполагают, что удар:

- а) абсолютно упругий;
- б) абсолютно неупругий;
- в) упругопластический;
- г) вязкий.

3 Динамические напряжения равны:

а) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} (1 + k)$;

в) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} / k$;

б) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} (1 + \sqrt{k})$;

г) $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} \cdot k$.

13 Основы расчетов за пределами упругости

Пример — Определить допустимую нагрузку $[F]$ статически неопределимого стержня (рисунок 13.1), если площадь поперечного сечения $A = 10 \text{ см}^2$.

Исходные данные: модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, расчетное сопротивление $R = 160 \text{ МПа}$, предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, коэффициент запаса прочности по предельной нагрузке $n_F = 1,75$.

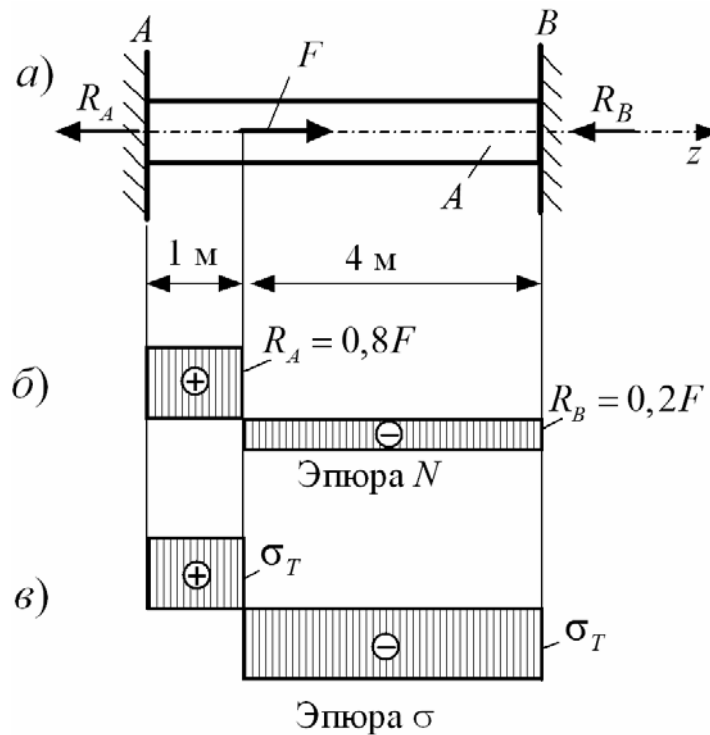


Рисунок 13.1

*Решение**Расчет в упругой области.*Выразим реакцию R_A из деформационного уравнения:

$$\Delta \ell = \frac{5R_A}{EA} - \frac{4F}{EA} = 0; \quad R_A = 0,8F.$$

Из уравнения статического равновесия сил реакция R_B

$$\sum Z = R_A - F + R_B = 0; \quad R_B = -R_A + F = -0,8F + F = 0,2F.$$

Определим допустимую силу из условия прочности (см. рисунок 13.1, б):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{0,8[F]}{A} = [\sigma];$$

$$[F] = \frac{A \cdot R}{0,8} = \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6}{0,8} = 200 \cdot 10^3 \text{ Н} = 200 \text{ кН}.$$

Расчет по предельной нагрузке (за пределами упругости).

В предельном состоянии напряжение на всех участках стержня достигло предела текучести (см. рисунок 13.1, в). Следовательно, реакции на опорах достигли значения $\sigma_T A$. Уравнение статического равновесия будет иметь вид:

$$\sum Z = R_A - F_{пред} + R_B = \sigma_T \cdot A - F_{пред} + \sigma_T \cdot A = 0.$$

Откуда

$$F_{пред} = 2\sigma_T \cdot A = 2 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 480 \cdot 10^3 \text{ Н} = 480 \text{ кН}.$$

Допустимая сила

$$[F] = \frac{F_{пред}}{n_F} = \frac{480}{1,75} = 274 \text{ кН}.$$

Тестовые вопросы для самопроверки

- 1 При предельном изгибающем моменте напряжения равны σ_T :
 - а) на внешних волокнах;
 - б) в центре поперечного сечения;
 - в) во всем сечении;
 - г) в ядре сечения.
- 2 Расчет в упругопластической стадии деформирования производят:
 - а) для хрупких материалов;
 - б) для анизотропных материалов;
 - в) для всех материалов;
 - г) для пластичных материалов.

Список литературы

- 1 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – М.: Юрайт, 2016. – 413 с.
- 2 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов: учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Альянс, 2018. – 624 с.
- 3 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
- 4 **Копнов, В. А.** Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчётно-графических работ: учеб. пособие / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. – М.: Высш. шк., 2003. – 351 с.
- 5 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
- 6 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник / М. Д. Подскребко. – Минск: Высш. шк., 2007. – 797 с.

7 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В. Н. Скопинский. – М.: МГИУ, 2007. – 240 с.

8 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник / Э. И. Старовойтов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

9 **Валишвили, Н. В.** Сопротивление материалов и конструкций: учебник / Н. В. Валишвили, С. С. Гаврюшин. – М.: Юрайт, 2022. – 530 с.

10 Сопротивление материалов в вопросах-ответах и сборник задач для самостоятельной работы с примерами их решений: учеб. пособие / А. Г. Схиртладзе, В. В. Волков, В. С. Николаев [и др.]. – 3-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 324 с.