

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов специальности 6-05-0715-03 «Автомобили,
тракторы, мобильные и технологические комплексы»
очной формы обучения*



Могилев 2025

УДК 681.5.011
ББК 32.965
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Транспортные и технологические машины»
«25» марта 2025 г., протокол № 8

Составитель ст. преподаватель Е. В. Заровчатская

Рецензент ст. преподаватель О. А. Пономарева

Методические рекомендации разработаны на основании рабочей программы по дисциплине «Теория автоматического управления» для студентов специальности 6-05-0715-03 «Автомобили, тракторы, мобильные и технологические комплексы» очной формы обучения и предназначены для использования при выполнении лабораторных работ.

Учебное издание

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ответственный за выпуск

И. В. Лесковец

Корректор

А. А. Подошевка

Компьютерная верстка

Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2025

Содержание

Введение.....	4
1 Лабораторная работа № 1. Комплексные числа. Уравнения.....	5
2 Лабораторная работа № 2. Операции с матрицами и векторами. Решение систем линейных алгебраических уравнений	8
3 Лабораторная работа № 3. Ряды Тейлора, Маклорена и Фурье.....	11
4 Лабораторная работа № 4. Дифференциальные и разностные уравнения	12
5 Лабораторная работа № 5. Решение уравнений методом преобразований Лапласа.....	13
6 Лабораторная работа № 6. Определение передаточных функций.....	15
7 Лабораторная работа № 7. Преобразование структурных схем.....	16
8 Лабораторная работа № 8. Определение временных характеристик ...	17
9 Лабораторная работа № 9. Построение частотных характеристик.....	19
10 Лабораторная работа № 10. Определение реакций непрерывных звеньев и систем	20
11 Лабораторная работа № 11. Определение статических характеристик выходных сигналов систем управления.....	21
12 Лабораторная работа № 12. Анализ устойчивости линейных непрерывных систем	23
13 Лабораторная работа № 13. Оценка запасов устойчивости непрерывных систем	26
14 Лабораторная работа № 14. Оценка качества переходных процессов	28
15 Лабораторная работа № 15. Оценка точности САУ при случайных воздействиях	31
16 Лабораторная работа № 16. Исследование нелинейных систем.....	33
Список литературы	35

Введение

В настоящее время теория автоматического управления является одной из основных инженерных дисциплин, которые изучаются в высших учебных заведениях, ведущих подготовку специалистов большинства технических направлений. Изучение теории автоматического управления встречает известные трудности, вызванные сложностью используемого математического аппарата, необходимостью комплексного использования знаний таких курсов, как физика, химия, электротехника, электроника, информатика. Современная теория управления предполагает широкое применение ЭВМ как для анализа, так и для синтеза систем управления. Одним из важных видов учебной деятельности обучающихся, предусмотренных учебным планом дисциплины, является выполнение лабораторных работ.

Целью выполнения лабораторных работ является получение практических навыков:

- в использовании программных средств общего назначения;
- построения математических моделей;
- разработки алгоритмов и программ на алгоритмическом языке для решения задач.

В лабораторных работах решаются задачи вычислительного характера.

Цель методических рекомендаций – оказание помощи обучающимся при выполнении лабораторных работ. В методических рекомендациях изложено содержание каждой работы, даны краткие теоретические сведения по решаемой задаче и порядок выполнения работы.

Отчеты по лабораторным работам должны быть выполнены в виде файла расширением .doc. Каждый отчет должен содержать название, выполненное задание в соответствии с выданным вариантом (скриншоты экрана, графики, текст программного кода и т. д.).

1 Лабораторная работа № 1. Комплексные числа. Уравнения

Комплексные числа (от лат. complexus – связь, сочетание) – числа вида

$$a + b \cdot i,$$

где a, b – вещественные числа;

i – мнимая единица, т. е. число, для которого выполняется равенство $i^2 = -1$.

Комплексные числа можно представить на плоскости с прямоугольной системой координат: числу $z = x + i + y$ соответствует точка плоскости с координатами $\{x, y\}$, а также радиус-вектор, соединяющий начало координат с этой точкой (рисунок 1.1). Такая плоскость называется комплексной. Вещественные числа на ней расположены на горизонтальной оси, мнимая единица изображается единицей на вертикальной оси; по этой причине горизонтальная и вертикальная оси называются вещественной и мнимой осями соответственно.

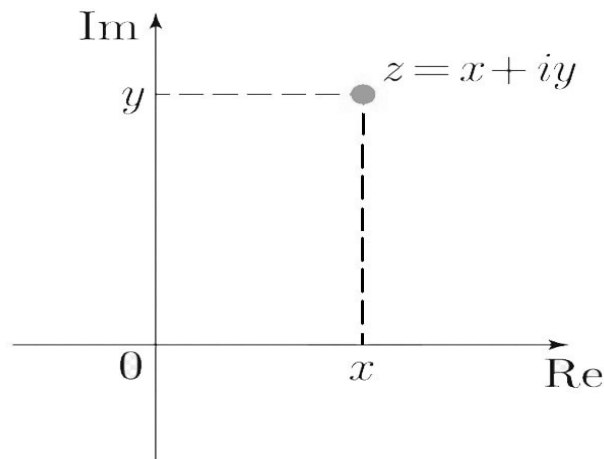


Рисунок 1.1 – Геометрическое представление комплексного числа

Модулем (абсолютной величиной) комплексного числа называется длина радиус-вектора соответствующей точки комплексной плоскости (или, что то же самое, расстояние от точки комплексной плоскости до начала координат). Модуль комплексного числа $z = x + i \cdot y$ обозначается $|z|$ (иногда r или ρ) и определяется выражением

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Корни полинома – это корни уравнения, полученного приравниванием данного полинома к нулю.

Если полином n -й степени с действительными коэффициентами

$$A(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$, то его всегда можно представить в виде произведения:

$$A(x) = \alpha_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \alpha_n \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Задача 1. Найти модуль и фазу комплексного числа $z = -4 + i \cdot 3$. Показать это число, его модуль и фазу на комплексной плоскости.

Решение в MATLAB представлено на рисунках 1.2 и 1.3.

```
>> %вводим комплексное число
z=-4+3i

z =

    -4.0000 + 3.0000i

>> %вычисляем модуль:
abs(z)

ans =

     5

>> %вычисляем фазовый угол в радианах
angle(z)

ans =

    2.4981

>> %вычисляем фазовый угол в градусах:
>> angle(z)*180/pi

ans =

   143.1301

>> compass(real(z),imag(z))
>> |
```

Рисунок 1.2 – Решение задачи

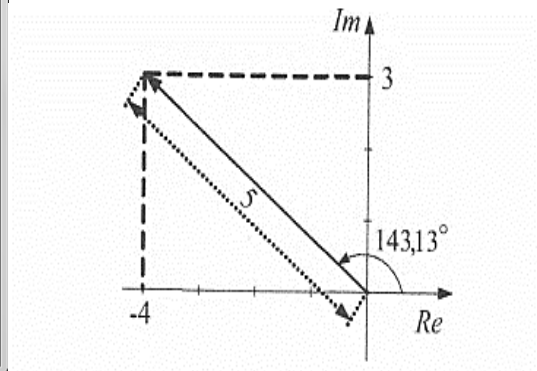
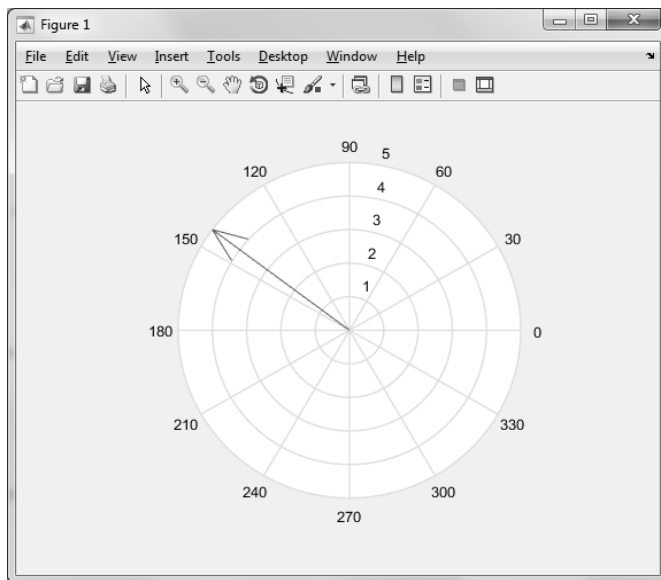


Рисунок 1.3 – Комплексная плоскость и число $z = -4 + i \cdot 3$

Задача 2. Найти корни полинома $2x^2 + 12x + 16$ и представить его в виде произведения сомножителей.

Решение в MATLAB представлено на рисунке 1.4.

```

>> %Вводим исходный полином, начиная с коэффициента при старшей степени p
>> p1=[2 12 16];
>> %вычисляем корни полинома
>> roots(p1)

ans =

    -4
    -2

>> %Вводим полином, в приведенной форме
>> p2=[1 6 8];
>> % находим корни
>> roots(p2)

ans =

    -4
    -2

```

Рисунок 1.4 – Решение задачи

Полином в виде произведения $A(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 4)$.

Задачи для самостоятельного решения

1 Представить числа в показательной форме:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| а) $z = 7 + i8$; | е) $z = -8 + i8$; |
| б) $z = 16 - i7$; | ж) $z = 4 - i2$; |
| в) $z = -8 - i5$; | з) $z = -1 + i10$; |
| г) $z = i10$; | и) $z = 3$; |
| д) $z = -4$; | к) $z = -5 - i20$. |

2 Найти корни полинома и представить его в виде произведения сомножителей:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| а) $4x^2 + 8x + 32 = 0$; | е) $x^2 + 4x + 8 = 0$; |
| б) $x^2 + 10x + 16 = 0$; | ж) $x^2 - 5x + 6 = 0$; |
| в) $3x^2 + 18x + 27 = 0$; | з) $6x^2 + 3x - 1 = 0$; |
| г) $x^2 + 12x + 32 = 0$; | и) $5x^2 + 14x - 3 = 0$; |
| д) $5x^2 + 25x + 35 = 0$; | к) $3x^2 - 5x + 2 = 0$. |

2 Лабораторная работа № 2. Операции с матрицами и векторами. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Матрица – математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), который представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся его элементы.

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов – количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

Вектор (от лат. vector – перевозчик, переносчик, несущий) – в простейшем случае математический объект, характеризующийся величиной и направлением.

Векторы могут иметь различную природу: направленные отрезки, матрицы, числа, функции и другие, однако все линейные пространства одной размерности изоморфны между собой.

Данным понятием вектора чаще всего пользуются при решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также при работе с линейными операторами (пример линейного оператора – оператор поворота). Многие математические объекты (например, матрицы, тензоры и т. д.), в том числе обладающие структурой более общей, чем конечный (а иногда даже и чем счетный) упорядоченный список, удовлетворяют аксиомам векторного пространства, т. е. являются с точки зрения алгебры векторами.

Задача 1. Найти сумму матриц A и B и умножить ее на 3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение в MATLAB представлено на рисунке 2.1.

```
%Вводим заданные матрицы
A=[3 4 5; 0 2 1; 3 0 0];
B=[5 7 2; 1 4 1; 1 1 1];
%Находим умноженную на три сумму матриц
3*(A+B)

ans =

    24    33    21
     3    18     6
    12     3     3
```

Рисунок 2.1 – Решение задачи

Задача 2. Найти произведение матриц AB , AC , BC .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение в MATLAB представлено на рисунке 2.2.

```
%Вводим заданные матрицы и векторы
A=[2 1; 3 4];
B=[3 2; 1 1; 2 0];
C=[3 1; 4 2];
%Находим произведение матриц A и C
A*C
ans =
    10     4
    25    11

%Находим произведение матриц B и C
B*C
ans =
    17     7
     7     3
     6     2
```

Рисунок 2.2 – Решение задачи

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти сумму матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{е) } A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 15 \\ 0 & 12 & 1 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & -11 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2 Найти произведение матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\text{е) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

3 Лабораторная работа № 3. Ряды Тейлора, Маклорена и Фурье

Ряд Тейлора – разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Частный случай разложения в ряд Тейлора в нулевой точке называется **рядом Маклорена**.

Ряд Фурье – представление функции f с периодом τ в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(k \frac{2\pi}{\tau} x + \theta_k\right),$$

где A_k – амплитуда k -го гармонического колебания;

$k \frac{2\pi}{\tau}$ – круговая частота гармонического колебания;

θ_k – начальная фаза k -го колебания.

Задача. Разложить функцию $f(x) = 2\sin x + 5e^{-2x}$ в ряд Тейлора в точке $x = 0,5$ и в ряд Маклорена (найти по пять членов ряда). Построить графики функции и её ряда в окрестности точек разложения.

Решение в MATLAB представлено на рисунке 3.1.

```
syms x y
y=2*sin(x)+5*exp(-2*x)
t=taylor(f,0.5,6)
sym2poly(t)
t=subs(t,'x-1/2','y')
sym2poly(t)
fm=taylor(y,6)
sym2poly(fm)
```

Рисунок 3.1 – Решение задачи

Задача для самостоятельного решения

Найти по четыре члена ряда Тейлора в окрестности точки $x = a$ и построить графики следующих функций и их рядов:

- а) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 1$;
- б) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $a = 0,5$;
- в) $f(x) = 2\ln x^2$; $a = 2$;
- г) $f(x) = \arcsin(x - 1)$; $a = 1$;
- д) $f(x) = e^{2\sin x^2}$; $a = 2$;
- е) $f(x) = \operatorname{sign}(x + x^2 - 2)$; $a = 1$.

4 Лабораторная работа № 4. Дифференциальные и разностные уравнения

Дифференциальным называют уравнение, связывающее независимые переменные, искомые функции и производные от искомых функций. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется такое уравнение, в котором искомые функции зависят лишь от одной независимой переменной и все они и их производные входят в уравнение в виде своих значений в одной и той же переменной точке. Например, уравнение $y'(x) = y^2(x)$ является ОДУ первого порядка. Часто в записи ОДУ аргументы у неизвестной функции и ее производных опускают, поскольку они одинаковы. Приведем примеры уравнений, не являющихся обыкновенными дифференциальными. Уравнение

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = 0$$

является уравнением в частных производных. Оно содержит частные производные неизвестной функции, зависящей от двух переменных x и y .

Разностным (или рекуррентным) уравнением называют уравнение относительно неизвестной последовательности. Разностные уравнения часто используются в моделях динамики с дискретным временем и для приближенного решения дифференциальных уравнений.

$$x(t+n) = F(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1)),$$

где $t \in N$, $F: N \times X^n \rightarrow X$ – заданная функция, $X \subset R$.

Задача. Найти решение однородного дифференциального уравнения $3\ddot{y} + 18\dot{y} + 75y = 0$ при начальных условиях $y(0) = -5$, $\dot{y}(0) = -3$.

Решение в MATLAB представлено на рисунках 4.1 и 4.2.

```
y0=dsolve('3*D2y+18*Dy+75*y=0', 'y(0)=-5', 'Dy(0)=-3')
y0 =
    - 5*cos(4*t)*exp(-3*t) - 3*sin(4*t)*exp(-3*t)
    % для построения в MATLAB графика этого решения
t=0:0.01:3
y=- 5*exp(-3*t).*cos(4*t) - 3*exp(-3*t).*sin(4*t)
plot(t,y)
grid on
```

Рисунок 4.1 – Решение задачи

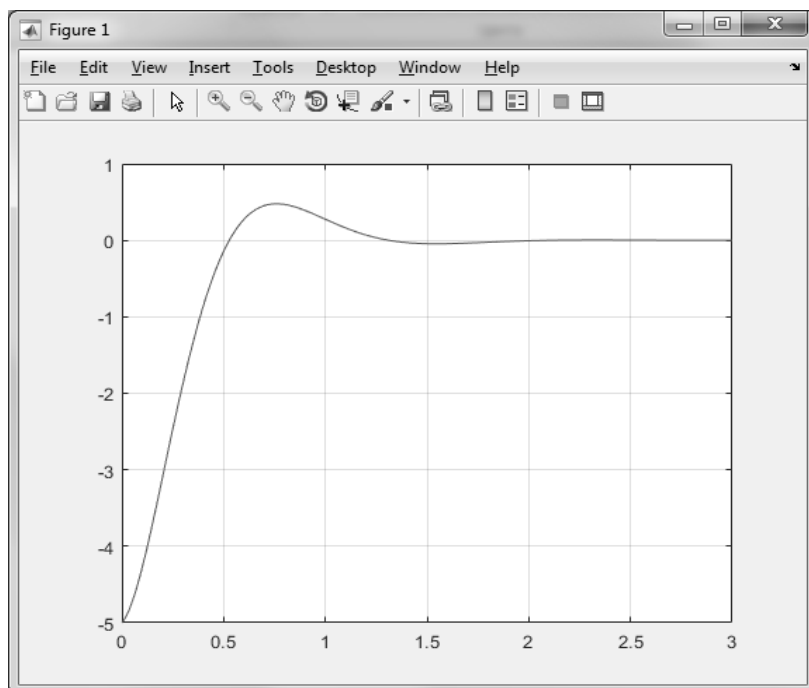


Рисунок 4.2 – График решения дифференциального уравнения в MATLAB

Задача для самостоятельного решения

Найти решения следующих дифференциальных уравнений:

- а) $3\ddot{y} + 24\dot{y} + 36y = 0$ при $y(0) = 1; \dot{y}(0) = 2$;
- б) $3\ddot{y} + 9\dot{y} + 14y = 2 + 3t$ при $y(0) = 1; \dot{y}(0) = 1$;
- в) $2\ddot{y} + 4\dot{y} + 6y = 2t$ при $y(0) = 2; \dot{y}(0) = 0$;
- г) $3\ddot{y} + 18\dot{y} + 24y = 0$ при $y(0) = 4; \dot{y}(0) = 2$;
- д) $5\ddot{y} + 25\dot{y} + 75y = 2 + e^{-t}$ при $y(0) = 3; \dot{y}(0) = 1$;
- е) $2\ddot{y} + 24\dot{y} + 72y = e^{-2t}$ при $y(0) = 2; \dot{y}(0) = 3$.

Построить графики решений.

5 Лабораторная работа № 5. Решение уравнений методом преобразований Лапласа

Преобразование Лапласа – интегральное преобразование, связывающее функцию $F(s)$ комплексного переменного (изображение) с функцией $f(x)$ вещественного переменного (оригинал). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

Задача. Найти решение неоднородного дифференциального уравнения

$$5\ddot{y} + \dot{y} + 40,05y = 40 \cdot 1(t)$$

при начальных условиях $y(0) = 1; \dot{y}(0) = -1$ методом преобразования Лапласа (операторным методом).

Решение в MATLAB представлено на рисунках 5.1 и 5.2.

```
y0=dsolve('5*D2y+Dy+40.05*y=40.05','y(0)=1','Dy(0)=-1')
y0=
    1 - (2^(1/2)*exp(-t/10).*sin(2*2^(1/2)*t))/4
% для построения в MATLAB графика этого решения
t=0:0.02:35
y=1 - (2^(1/2)*exp(-t/10).*sin(2*2^(1/2)*t))/4
plot(t,y,'k'), grid on
```

Рисунок 5.1 – Решение задачи

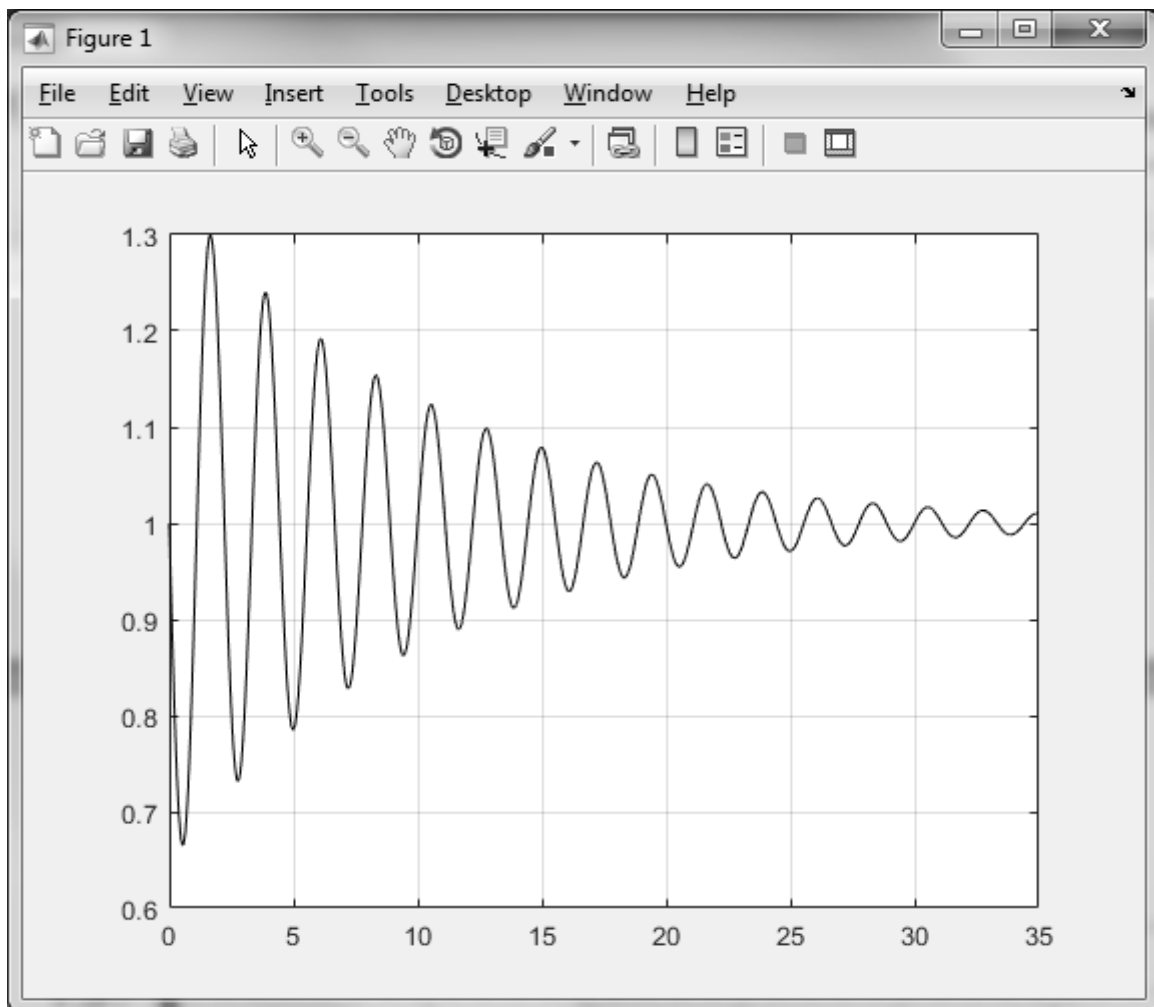


Рисунок 5.2 – График решения неоднородного дифференциального уравнения в MATLAB

Задача для самостоятельного решения

Представить числа в показательной форме:

а) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = 5t$ при $y(0) = 1; \dot{y}(0) = 2;$

- б) $3\ddot{y} + 24\dot{y} + 96y = 0$ при $y(0) = 1; \dot{y}(0) = 0$;
 в) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 5e^{-3t}$ при $y(0) = 3; \dot{y}(0) = 5; \ddot{y}(0) = -66$;
 г) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ при $y(0) = 2; \dot{y}(0) = -1$;
 д) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 10y = 5e^{-2t}$ при $y(0) = 1; \dot{y}(0) = -1$;
 е) $\ddot{y} + 10\dot{y} + 16y = 4\cos 3t$ при $y(0) = 0; \dot{y}(0) = 1$.

6 Лабораторная работа № 6. Определение передаточных функций

Передаточная функция звена $W(s)$ – это отношение выходной величины звена к его входной величине, преобразованных по Лапласу, при нулевых начальных условиях и при отсутствии прочих возмущений.

Задача. Найти передаточную функцию системы, если её уравнение вход-выход имеет вид

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 5g + 4\dot{g}.$$

Решение

Передаточная функция системы определяется как отношение изображений по Лапласу при нулевых начальных условиях (ННУ), т. е.

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}. \quad (6.1)$$

Произведя замену в уравнении (6.1) функций и производных их изображениями по Лапласу при нулевых начальных условиях

$$y \Leftrightarrow Y(p); \dot{y} \Leftrightarrow pY(p); \ddot{y} \Leftrightarrow p^2 Y(p); g \Leftrightarrow G(p); \dot{g} \Leftrightarrow pG(p),$$

получим $p^2 Y(p) + 2pY(p) + 3Y(p) = 5G(p) + 4pG(p)$. Отсюда, согласно (6.1), находим

$$W(P) = \frac{5 + 4p}{p^2 + 2p + 3}.$$

Задача для самостоятельного решения

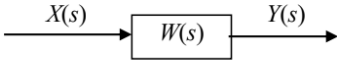
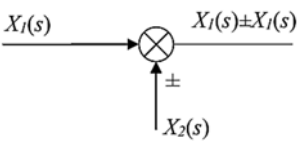
Найти передаточные функции следующих систем:

- а) $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 5g + 3\dot{g}$;
 б) $\dot{y} = 2g + \dot{g}$;
 в) $5\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 2g_1 + 3g_2 + 2\ddot{g}_2$.

7 Лабораторная работа № 7. Преобразование структурных схем

Структурная схема – графическое изображение математической модели системы автоматического управления (САУ) в виде соединений элементов. На структурных схемах приняты обозначения, приведенные в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Обозначения элементов структурных схем

Номер элемента	Название	Обозначение на схеме
1	Звено	
2	Сравнивающие и суммирующие устройства	
3	Связи между звеньями	 – скалярный сигнал;  – векторный сигнал

Задача. Найти передаточную функцию $W_{yg}(p)$ и записать уравнение вход-выход системы (структурная схема приведена на рисунке 7.1):

$$W_1(p) = \frac{10}{2p+1}; \quad W_2(p) = \frac{30}{p(p+2)}; \quad W_3(p) = \frac{2}{p}.$$

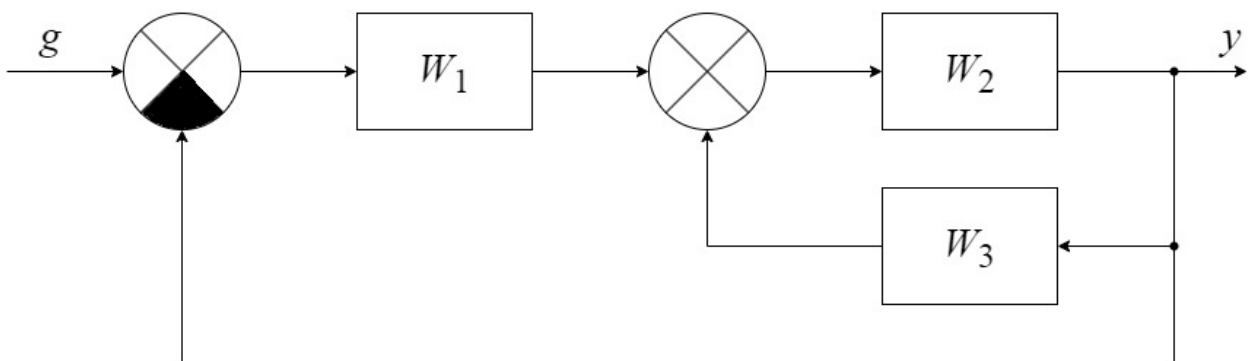


Рисунок 7.1 – Система с двумя обратными связями

Решение в MATLAB представлено на рисунке 7.2.

```

%Создаем lti-модели каждого звена в виде передаточных функций
W1=tf(10, [2 1])
W2=tf(30, [1 2 0])
W3=tf(2, [1 0])
%Вычисляем передаточную функцию соединения звеньев W2 и W3
% с положительной обратной связью:
W23=feedback(W2,W3,+1)
% Вычисляем передаточную функцию последовательного соединения
% звеньев W1 и W23, охваченного отрицательной единичной обратной связью:
Wyg=feedback(W1*W23,tf(1,1))

Wyg =

          300 s
-----
2 s^4 + 5 s^3 + 2 s^2 + 180 s - 60

```

Рисунок 7.2 – Решение задачи

Задача для самостоятельного решения

Найти передаточную функцию $W_{yg}(p)$ и записать уравнение вход-выход системы, структурная схема которой приведена на рисунке 7.1:

а) $W_1(P) = \frac{20}{5p-3}$; $W_2(P) = \frac{3}{p(p+1)}$; $W_3(P) = \frac{12}{p+1}$;

б) $W_1(P) = \frac{1}{15p-1}$; $W_2(P) = \frac{1}{2p+1}$; $W_3(P) = \frac{20}{p+1}$;

в) $W_1(P) = \frac{1}{7p+2}$; $W_2(P) = \frac{4}{p(p-8)}$; $W_3(P) = \frac{3}{2p+1}$.

8 Лабораторная работа № 8. Определение временных характеристик

Свойства звеньев описываются временными и частотными характеристиками. К временным характеристикам относятся весовая и переходная характеристики.

Переходная характеристика $h(t)$ звена – выходной сигнал звена $Y(t)$, возникающий при подаче на вход этого звена ступенчатой единичной функции (обозначается $X(t) = 1(t)$, $1(t) = 0$ при $t < 0$, $1(t) = 1$ при $t \geq 0$). Если входное воздействие представляет собой не единичную ступенчатую функцию $X(t) = A \cdot 1(t)$, то выходная величина будет равна $Y(t) = A \cdot h(t)$.

Задача. Найти аналитические выражения для переходной $h(t)$ и весовой $w(t)$ функций системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} g; \quad y = [0,5 \quad 2] x.$$

Решение в MATLAB представлено на рисунке 8.1.

```
sys=ss([0 -4;1 -4],[2 3]',[0.5 2],0)
sys1=tf(sys)
set.Variable='p'
% Промежуточный результат
sys1 =

      7 s + 2
      -----
      s^2 + 4 s + 4

syms p t
ht=ilaplace((7*p+2)/(p^2+4*p+4)/p,p,t)
wt=ilaplace((7*p+2)/(p^2+4*p+4),p,t)

ht =

6*t*exp(-2*t) - exp(-2*t)/2 + 1/2

wt =

7*exp(-2*t) - 12*t*exp(-2*t)
```

Рисунок 8.1 – Решение задачи

Задача для самостоятельного решения

Найти передаточную функцию $W_{yg}(p)$ и записать уравнение вход-выход системы (структурная схема приведена на рисунке 7.1):

а) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 10y = 10g$;

б) $18\ddot{y} + 36\dot{y} + 18y = 72g$;

в) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} g; \quad y = [3 \ -1] x + 2g.$

9 Лабораторная работа № 9. Построение частотных характеристик

Частотные характеристики получаются по частотной передаточной функции звена $W(j\omega)$. Частотная передаточная функция (ЧПФ) получается из передаточной функции $W(s)$ заменой $s = j\omega$ и представляется в двух формах:

1) алгебраическая

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где $P(\omega)$ – вещественная часть ЧПФ;

$Q(\omega)$ – мнимая часть ЧПФ;

2) показательная

$$W(j\omega) = N(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $N(\omega)$ – модуль ЧПФ;

$\varphi(\omega)$ – аргумент ЧПФ.

Задача. Получить аналитические выражения и построить графики амплитудной и фазовой характеристик звена с передаточной функцией

$$W_{yg}(P) = \frac{65}{0,75p^3 + 4p^2 + 12p + 48}.$$

Решение в MATLAB представлено на рисунках 9.1 и 9.2, результаты вычислений – в таблице 9.1.

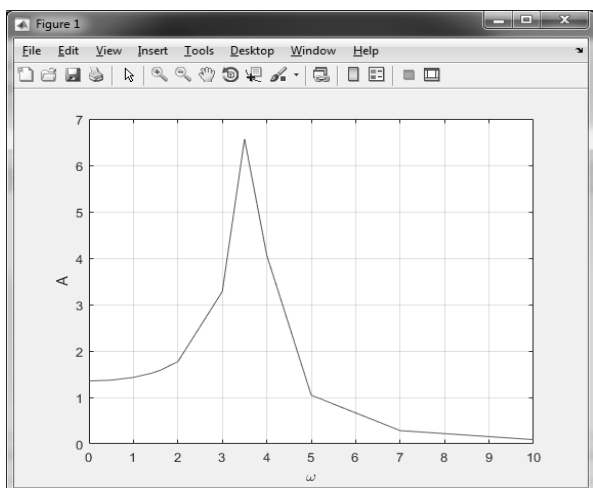
```
sys=tf(65, [0.75 4 12 48])
w=[0 0.5 1 1.4 1.6 2 3 3.5 4 5 7 10]';
pq=shftdim(freqresp(sys,w))
[w abs(pq) unwrap(angle(pq))*180/pi]
```

Рисунок 9.1 – Решение задачи

Таблица 9.1 – Результаты вычислений

ω	0	0,5	1	1,4	1,6	2	3	3,5	4	5	7	10	∞
A	1,35	1,37	1,43	1,52	1,58	1,77	3,28	6,57	4,06	1,05	0,29	0,09	0
φ , град	0	-7,2	-14	-20	-23	-29	-53	-96	-180	-213	-229	-241	-270

а)



б)

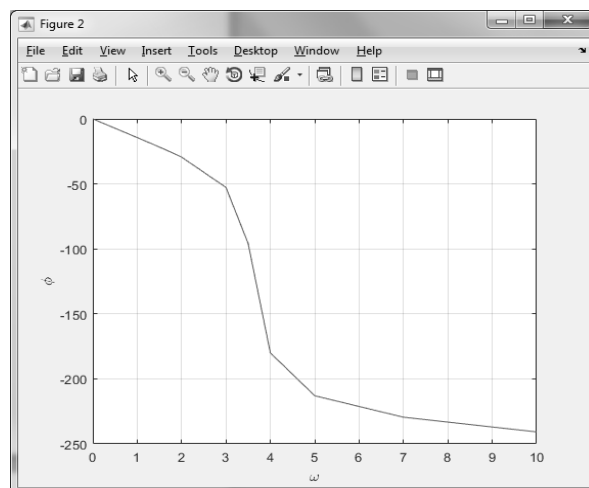


Рисунок 9.2 – Графики амплитудной (а) и фазовой (б) характеристик в MATLAB

Задача для самостоятельного решения

Построить графики амплитудной и фазовой частотных характеристик, а также годограф Найквиста следующих систем в разомкнутом состоянии:

а) $W_{yg}(P) = \frac{46}{p^3 + 5p^2 + 12p + 46};$

б) $0,01\ddot{y} + 0,12\dot{y} + y + 18y = 10g;$

в) $W_p(P) = \frac{60}{5p^3 + 9p^2 + 40p}.$

10 Лабораторная работа № 10. Определение реакций непрерывных звеньев и систем

Системой непрерывного действия называется такая система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. При этом закон изменения выходной величины во времени может быть произвольным, в зависимости от формы изменения входной величины и от вида уравнения динамики (или характеристики) звена.

Чтобы автоматическая система в целом была непрерывной, необходимо, прежде всего, чтобы статические характеристики всех звеньев системы были непрерывными.

Задача. Найти реакцию системы, описываемой уравнением вход-выход

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = f(t),$$

при $f(t) = 5e^{-2t} + 3$ и начальных условиях $y_0 = -1; \dot{y}_0 = 1$.

Решение в MATLAB представлено на рисунке 10.1.

```
yt=dsolve('D2y+6*Dy+8*y=5*exp(-2*t)+3', 'y(0)=-1', 'Dy(0)=1')
yt =
(17*exp(-4*t))/8 - (9*exp(-2*t))/4 + exp(-2*t)*((5*t)/2 + (3*exp(2*t))/4) -
- (exp(-2*t)*(3*exp(2*t) + 10))/8
```

Рисунок 10.1 – Решение задачи

Это выражение приводится к виду

$$y(t) = \left(-\frac{7}{2} + \frac{17}{8}e^{-2t} + \frac{5}{2}t \right) e^{-2t} + \frac{3}{8}, \quad t \geq 0.$$

Задача для самостоятельного решения

Построить графики амплитудной и фазовой частотных характеристик, а также годограф Найквиста следующих систем в разомкнутом состоянии:

а) $W_{yg}(P) = \frac{2p+12}{2p^2+10p+12}; y_0 = -2; \dot{y}_0 = 1; g(t) = 0,5t + 3e^{-2t};$

б) $W_{yg}(P) = \frac{13}{p^2+4p+13}; y_0 = -0,5; \dot{y}_0 = 1; g(t) = 5 \cdot 1(t);$

в) $W_{yg}(P) = \frac{24}{4p^2+20p+24}; y_0 = 0; \dot{y}_0 = 0; f(t) = 5 \sin 2t.$

11 Лабораторная работа № 11. Определение статических характеристик выходных сигналов систем управления

Статической характеристикой звена (системы) называется зависимость между постоянным входным воздействием и постоянной выходной величиной звена (системы) в установившемся режиме (после окончания переходного процесса).

Статическая характеристика обычно изображается графически в плоскости координат (x, y) .

Статическая характеристика полностью характеризует поведение динамического звена в установившемся режиме.

Статические характеристики простейших типовых звеньев:

- пропорциональное (усилительное, безынерционное) звено:

$$y = K \cdot x;$$

- аperiodическое (инерционное) звено первого порядка:

$$y = K \cdot x;$$

- запаздывающее звено (звено чистого запаздывания):

$$y = x.$$

Задача. Определить среднее значение, спектральную плотность и дисперсию выходной переменной системы, показанной на рисунке 11.1, на случайное воздействие $\varphi(t)$, если его среднее значение и спектральная плотность описываются выражениями

$$\bar{\varphi} = 0,5; S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{0,36}{\omega^2 + 16}.$$

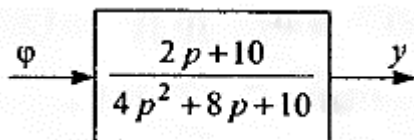


Рисунок 11.1 – Система с одним случайным воздействием

Решение в MATLAB представлено на рисунке 11.2.

```

%команды
w=sym('w','real')
Wy=(10+2*j*w)/(10+8*j*w+4*(j*w)^2)
Wy2=abs(Wy)^2

% результат:
Wy2 =
abs(10 + w*2i)^2/abs(- 4*w^2 + w*8i + 10)^2

Sff=0.36/(w^2+16)
Dy=int(Wy2*Sff,w,-inf,inf)/2/pi
Dy=simplify(Dy)

% результат:
Dy =
18/1325=0.013585
  
```

Рисунок 11.2 – Решение задачи

Задача для самостоятельного решения

Определить среднее значение, спектральную плотность и дисперсию выходной переменной системы, показанной на рисунке 11.1, на случайное воздействие $\varphi(t)$, если его среднее значение и спектральная плотность описываются следующими выражениями:

а) $\bar{\varphi} = 0,9; S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 16};$

б) $\bar{\varphi} = 0,1; S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 1};$

в) $\bar{\varphi} = 1,1; S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{1}{2\omega^2 + 1}.$

12 Лабораторная работа № 12. Анализ устойчивости линейных непрерывных систем

Дана линейная многомерная стационарная система управления, поведение которой описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t_0) = x_0; y(t) = Cx(t),$$

где x – n -мерный вектор состояния;

u – r -мерный вектор управления, $u \in R^r$;

t – время, $t \in [t_0, t_1]$;

$[t_0, t_1]$ – промежуток времени функционирования системы;

y – k -мерный вектор выхода;

A, B, C – матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(k \times n)$ соответственно;

x_0 – начальное состояние.

Система называется **вполне управляемой по состоянию**, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в произвольное, заранее заданное, конечное состояние $x(t_1)$.

Система называется **вполне управляемой по выходу**, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в такое конечное состояние, при котором обеспечивается заранее заданное произвольное значение выхода $y(t_1)$.

Система называется **вполне наблюдаемой**, если по реакции $y(t)$ на выходе системы на промежутке времени $[t_0, t_1]$ при заданном управляющем воздействии $u(t)$ можно определить начальное состояние $x(t_0)$.

Постановка задачи формулируется следующим образом.

Пусть известны матрицы A, B, C системы. Требуется определить, является ли система вполне управляемой и наблюдаемой.

Выделяют следующие критерии управляемости и наблюдаемости.

Критерий управляемости по состоянию. Для того чтобы система была вполне управляемой по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по состоянию

$$W = (BABA^2B...A^{n-1}B)$$

равнялся размерности вектора состояния $\text{rang} W = n$.

Критерий управляемости по выходу. Для того чтобы система была вполне управляемой по выходу, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по выходу

$$P = (CB \ CAB \ CA^2B...CA^{n-1}B)$$

равнялся размерности вектора выхода $\text{rang}P = k$.

Критерий наблюдаемости. Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости

$$Q = (C^T A^T C^T (A^T)^2 C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T)$$

равнялся размерности вектора состояния $\text{rang}Q = n$.

Задача. Исследовать управляемость и наблюдаемость объекта:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Решение в MATLAB представлено на рисунках 12.1 и 12.2.

Проверку управляемости и наблюдаемости в MATLAB можно осуществить двумя способами.

Первый способ. По заданным матрицам A , B и C строятся матрицы управляемости U и наблюдаемости N , а затем определяются и выводятся на экран монитора их ранги. Заключение принимается самим исследователем.

```
A=[0 1 1;0 1 1;0 1 1]
B=[1 0 0]'
C=[0 1 1;1 1 0]
disp(['порядок системы равен' num2str(size(A))])
U=ctrb(A,B)
disp(['ранг U равен' num2str(rank(U))])
N=obsv(A,C)
disp(['ранг N равен' num2str(rank(N))])
```

```
порядок системы равен3   3

U =

    1     0     0
    0     0     0
    0     0     0

ранг U равен1

N =

    0     1     1
    1     1     0
    0     2     2
    0     2     2
    0     4     4
    0     4     4

ранг N равен2
```

Рисунок 12.1 – Решение задачи первым способом

Заключение пользователя: поскольку ранг матриц управляемости и наблюдаемости меньше порядка системы, то она и не вполне управляемая и не вполне наблюдаемая.

Второй способ. Определение матриц управляемости и наблюдаемости и заключение осуществляется MATLAB.

```
A=[0 1 1;0 1 1;0 1 1]
B=[1 0 0]';
C=[0 1 1;1 1 0]
if rank(ctrb(A,B))==length(A)
    disp('система управляема')
else
    disp('система не вполне управляема')
end
if rank(observ(A,C))==length(A)
    disp('система наблюдаемая')
else
    disp('система не вполне наблюдаемая')
end

% результат
система не вполне управляема
система не вполне наблюдаемая
```

Рисунок 12.2 – Решение задачи вторым способом

Задача для самостоятельного решения

Проверить управляемость пар матриц A , B и наблюдаемость пар матриц A , C в следующих случаях:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

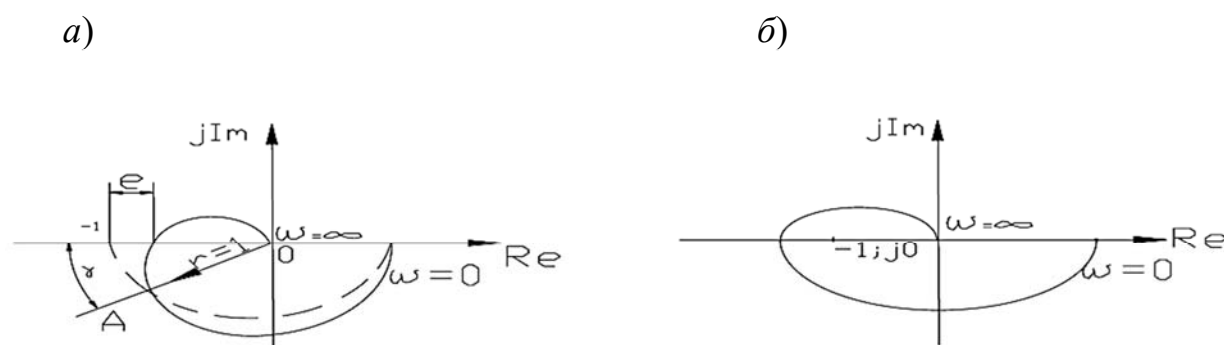
13 Лабораторная работа № 13. Оценка запасов устойчивости непрерывных систем

Критерий устойчивости Найквиста. Для оценки устойчивости замкнутой САУ при известной амплитудно-фазовой характеристике (АФХ) разомкнутой системы применяют критерий Найквиста. Необходимая АФХ может быть получена как аналитически, так и экспериментально. Последнее обстоятельство выгодно отличает рассматриваемый критерий устойчивости от уже рассмотренных.

Отметим, что разомкнутая САУ может быть устойчивой, неустойчивой или находиться на границе устойчивости. Если САУ состоит из устойчивых звеньев, то она будет устойчивой и в разомкнутом состоянии, а при наличии хотя бы одного неустойчивого элемента разомкнутая система будет неустойчивой.

Критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом: автоматическая система регулирования устойчивая или нейтрально устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива в замкнутом, если АФХ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами $(-1; j0)$. Она строится на комплексной плоскости при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

На рисунке 13.1 приведены примеры устойчивой и неустойчивой замкнутой САУ, когда в разомкнутом состоянии система устойчива.



а – устойчивая САУ; б – неустойчивая САУ

Рисунке 13.1 – Критерии устойчивости Найквиста

Задача. Найти с помощью годографа Найквиста запасы устойчивости по амплитуде и по фазе системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W_p(P) = \frac{60}{5p^3 + 9p^2 + 40p}.$$

Решение в MATLAB представлено на рисунке 13.2.

```

w=1.5:0.001:3
j=sqrt(-1)
Wp=60./(5*(j*w).^3+9*(j*w).^2+40*j*w)
% вычисление запаса по фазе dphi:
jj=find(abs(Wp)>=1)
jcp=jj(end)
x0=real(Wp(jcp))
y0=imag(Wp(jcp))
dphi=(pi+atan2(y0,x0))*180/pi
disp(['Запас по фазе ' num2str(dphi) ' град'])
% вычисление запаса по амплитуде gamma:
jj=find(imag(Wp)<=0)
jpi=jj(end)
gamma=1-abs(Wp(jpi))
disp(['Запас по амплитуде ' num2str(gamma)])
%результат:
% Запас по фазе 22.3184 град
% Запас по амплитуде 0.16642

```

Рисунок 13.2 – Решение задачи

Задача для самостоятельного решения

Найти запасы устойчивости по амплитуде и по фазе систем:

$$\text{а) } W_p(P) = \frac{2p + 12}{2p^2 + 10p + 12};$$

$$\text{б) } W_p(P) = \frac{13}{p^2 + 4p + 13};$$

$$\text{в) } W_p(P) = \frac{24}{4p^2 + 20p + 24}.$$

14 Лабораторная работа № 14. Оценка качества переходных процессов

В замкнутых автоматических системах управления при появлении возмущающих воздействий в общем случае возникают колебания регулируемой величины. Эти колебания могут быть затухающими, незатухающими и расходящимися. Качество управления САУ состоит из трех основных частей:

- 1) устойчивость;
- 2) точность;
- 3) качество переходного процесса.

Причем главным является устойчивость систем автоматического регулирования (САР), т. к. если САР – неустойчива, то говорить о точности и тем более о качестве переходного процесса нет смысла.

Устойчивость – это способность системы, выделенной из состояния равновесия под влиянием возмущающих и управляющих воздействий, с течением времени вновь прийти в равновесное состояние.

Задача 1. Определить показатели качества переходного процесса следящей системы при обработке задающего воздействия $g(t)$. Структурная схема системы представлена на рисунке 14.1. Параметры системы: $K_y = 160$; $K_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $T_y = 0,02 \text{ с}$; $T_0 = 0,1 \text{ с}$. Влияние возмущения $f(t)$ не учитывать.

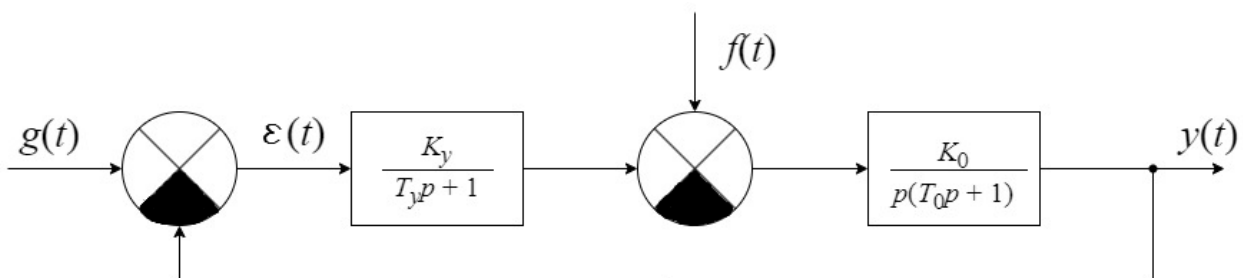


Рисунок 14.1 – Схема следящей системы

Решение в MATLAB представлено на рисунке 14.2.

```

Ky=160
K0=0.1
K=Ky*K0
Ty=0.02
T0=0.1
delta=0.05
hust=1
T2=Ty*T0
T1=Ty+T0
Wyg=tf(K, [T2 T1 1 K])
dt=0.01
tmax=1.45
t=0:dt:tmax
t=t'
ht=step(Wyg,t)
jj=find(abs((ht-hust)/hust)>=delta)
tp=t(jj(end))
disp(['время регулирования tp = ' num2str(tp) ' c'])
jj=find(ht==max(ht))
hm=ht(jj(1))
tm=t(jj(1))
sigma=(hm-hust)/hust*100
disp(['перерегулирование sigma = ' num2str(round(sigma*10)/10) ' %'])
disp(['время первого максимума tm = ' num2str(tm) ' c'])
tmax1=0.6
jmax=round(tmax1/dt)
jj=find(ht(1:jmax)>hust)
Tperiod=length(jj)*dt*2
N=tp/Tperiod
disp('число колебаний за время регулирования')
disp(['N = ' num2str(round(N*10)/10) ' ])
% результаты:
% время регулирования tp = 0.88 c
% перерегулирование sigma = 40.6 %
% время первого максимума tm = 0.29 c
% число колебаний за время регулирования N = 1.6

```

Рисунок 14.2 – Решение задачи

Задача 2. Построить график переходной функции $h(t)$ и найти значения показателей качества замкнутой системы с передаточной функцией

$$W_{yg}(P) = \frac{T_1 p + 1}{T_0 T_1 T_2 p^3 + T_0 T_1 p^2 + 1 + T_1 p + 1}$$

при следующих значениях параметров: $T_1 = 0,08$ с; $T_0 = 0,03$ с; $T_2 = 0,000174$ с.

Решение в MATLAB представлено на рисунках 14.3 и 14.4.

```

T0=0.03
T1=0.08
T2=0.000174
w=tf([T1 1],[T0*T1*T2 T1*T0 T1 1])
step(w)
grid on

```

Рисунок 14.3 – Решение задачи

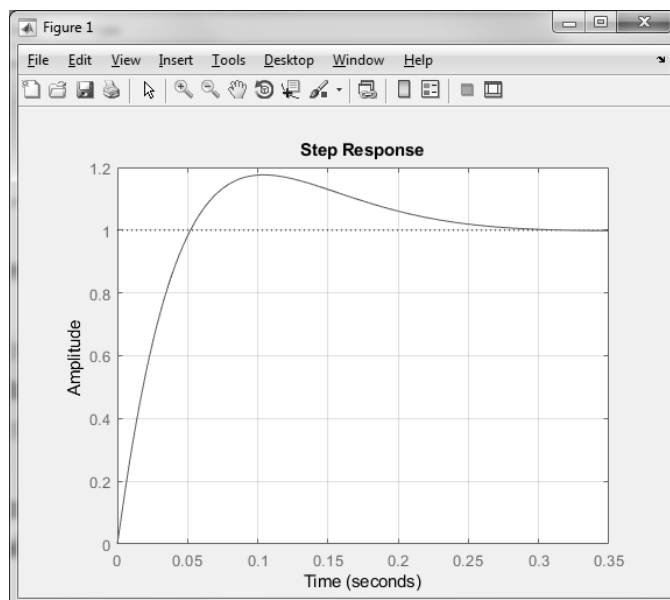


Рисунок 14.4 – График переходной характеристики в MATLAB

По графику переходной функции находим значения следующих показателей переходного процесса: $h_{ycm} = 1$; $\sigma \approx 18\%$; $t_m \approx 0,107$ с; $t_p \approx 0,207$ с.

Задача для самостоятельного решения

Построить график переходной функции $h(t)$ и найти значения показателей качества замкнутой системы с передаточной функцией

$$W_{yg}(P) = \frac{T_1 p + 1}{T_0 T_1 T_2 p^3 + T_0 T_1 p^2 + 1 + T_1 p + 1}$$

при следующих значениях параметров:

- а) $T_1 = 0,4$ с; $T_0 = 0,09$ с; $T_2 = 0,0005$ с;
- б) $T_1 = 0,33$ с; $T_0 = 0,03$ с; $T_2 = 1,58 \cdot 10^{-5}$ с;
- в) $T_1 = 0,7$ с; $T_0 = 0,9$ с; $T_2 = 0,005$ с.

15 Лабораторная работа № 15. Оценка точности САУ при случайных воздействиях

Как отмечалось ранее, интегральная оценка управления складывается из трех основных понятий:

- 1) устойчивость САР;
- 2) точность САР;
- 3) качество переходного процесса.

Очевидно, что главным является устойчивость САР (или запас устойчивости). Если САР не устойчива или очень мал запас устойчивости, то говорить о точности (неустойчивая САР) или о качестве переходного процесса (малые запасы устойчивости) не имеет смысла.

Если САР устойчива и запасы устойчивости достаточны по величине, то понятие точность САР является весьма важным показателем.

Точность определяют по отработке САР следующих видов воздействий:

- ступенчатое внешнее воздействие (управляющее или возмущающее), часто называется постоянным внешним воздействием;
- линейное внешнее воздействие, т. е. линейно изменяющееся внешнее воздействие (управляющее или возмущающее);
- гармоническое воздействие;
- медленно меняющееся произвольное внешнее (управляющее или возмущающее) воздействие;
- другие воздействия (параболическое, импульсное и т. д.).

Задача. Найти величину среднеквадратической ошибки (СКО) замкнутой следящей системы (рисунок 15.1), если на вход этой системы поступает сумма некоррелированных случайных сигналов: полезного сигнала $\varphi = \varphi(t)$ и случайной помехи $\psi = \psi(t)$ в виде белого шума. Передаточная функция системы и спектральные плотности указанных случайных сигналов определяются выражениями

$$W_p(p) = \frac{K(T_2 + 1)}{p(T_1 + 1)}; S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{a^2}{\tau^2 \omega^2 + 1}; S_{\psi\psi}(\omega) = N.$$

Параметры системы и характеристик случайных воздействий имеют следующие значения: $K = 100$; $T_0 = 1$ с; $T_1 = 1$ с; $T_2 = 0,1$ с; $a^2 = 3,2$ град² · с; $\tau = 0,5$ с; $N = 0,4$ град² · с.

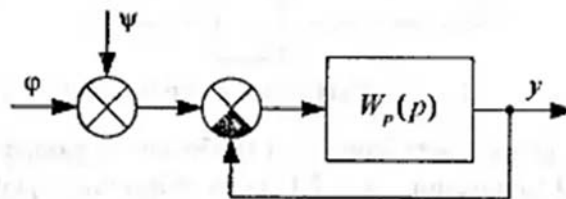


Рисунок 15.1 – Система со случайными воздействиями

Решение в MAPLE 6 представлено на рисунке 15.2.

```
restart
with (LinearAlgebra)
I2:=N*(B1^2*C0+B0^2*C2)/(2*C0*C1*C2)
subs(K=100, T0=1, T1=1, T2=0.1, N= 0.4, 1/2*N*(K^3*T2^2+
+K^2*T1*T0)/(K*(T0+K*T2)*T1*T0))

% первый интеграл:  I2=3.63636363 град^2

I3:=(B2^2*C0*C1+(B1^2-2*B0*B2)*C0*C3+B0*C0*C3)/(2*C0*C3*(C1*C2-C0*C3))
subs(K=100, T0=1, T1=1, T2=0.1, tau=0.5, a2=3.2,
a2*(T1^2*T0^2*K*(T0+K*T2+K*tau)+T0^3*K*tau*T1)/(K*tau*T1*T0*
((T0+K*T2+K*tau)*(tau*(T0+K*T2)+T1*T0)-K*tau*T1*T0)))

% второй интеграл:  I3=0,5679653680 град^2

Delta:=sqrt(3.63636363+0.5679653680)

%результат
Delta=
2.050
```

Рисунок 15.2 – Решение задачи

Задача для самостоятельного решения

Найти величину среднеквадратической ошибки (СКО) замкнутой следящей системы (см. рисунок 15.1), если на вход этой системы поступает сумма некоррелированных случайных сигналов: полезного сигнала $\varphi = \varphi(t)$ и случайной помехи $\psi = \psi(t)$ в виде белого шума. Передаточная функция системы и спектральные плотности указанных случайных сигналов определяются выражениями

$$W_p(p) = \frac{K(T_2 + 1)}{p(T_1 + 1)}; \quad S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{a^2}{\tau^2 \omega^2 + 1}; \quad S_{\psi\psi}(\omega) = N.$$

Параметры системы и характеристик случайных воздействий имеют следующие значения:

а) $K = 200$; $T_0 = 10$ с; $T_1 = -1$ с; $T_2 = 0,01$ с; $a^2 = 32$ град² · с; $\tau = 0,3$ с; $N = 0,9$ град² · с;

б) $K = 10$; $T_0 = 0,1$ с; $T_1 = 1$ с; $T_2 = 1$ с; $a^2 = 5$ град² · с; $\tau = 0,1$ с; $N = 0,8$ град² · с;

в) $K = 50$; $T_0 = 5$ с; $T_1 = 2$ с; $T_2 = 0,01$ с; $a^2 = 2,2$ град² · с; $\tau = 0,1$ с; $N = 0,9$ град² · с.

16 Лабораторная работа № 16. Исследование нелинейных систем

Нелинейной системой называется такая система, в состав которой входит хотя бы один элемент, линеаризация которого невозможна без потери существенных свойств системы управления в целом.

Существенным признаком нелинейных систем является наличие характеристик, в которых координаты или их производные по времени входят в уравнение в виде произведений или степени, отличной от первой, или коэффициенты уравнения являются функциями некоторых координат или их производных.

Если при составлении модели системы нелинейность, с учетом допущений можно линеаризовать, то такая нелинейность называется **несущественной**. Так, например, можно пренебречь зоной нечувствительности какого-либо звена, если она мала по сравнению с установившимися отклонениями в системе, определяемыми без её учета, или можно не учитывать петлю гистерезиса магнитного материала, если она достаточно узка. В противном случае нелинейность называется **существенной**. Существенными нелинейностями обладают всякого рода релейные элементы. Даже в тех случаях, когда была проведена линеаризация несущественной нелинейности в системе, часто на конечном этапе исследования может потребоваться рассмотрение исходной нелинейной модели.

Задача. Найти координаты особых точек нелинейной системы

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = (\omega_1 - \omega_2)(1 - \omega_1 - \omega_2); \\ \dot{\omega}_2 = \omega_1(3 - \omega_2). \end{cases} \quad (16.1)$$

Решение

Особые точки нелинейной динамической системы, описываемой уравнениями

$$\dot{\omega}_i = f_i(\omega); \quad i = \overline{1, n}, \quad (16.2)$$

это её положения равновесия. С другой стороны, эти точки являются стационарными (постоянными) решениями системы дифференциальных уравнений (16.2).

Поэтому координаты особых точек нелинейной системы можно найти путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_i(\omega) = 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad (16.3)$$

которая очевидным образом записывается по уравнениям (16.2).

В случае линейной системы с постоянными коэффициентами $\dot{\omega} = A\omega$ соответствующая система (16.3) имеет единственное решение $\omega^0 = 0$. В нелинейном случае эта система имеет обычно несколько решений $\omega^s, s = \overline{1, m}$. Поэтому нелинейные динамические системы обычно имеют несколько положений равновесия.

Для заданной нелинейной системы (16.1) система (16.3) имеет вид

$$\begin{cases} (\omega_1 - \omega_2)(1 - \omega_1 - \omega_2) = 0; \\ \omega_1(3 - \omega_2) = 0. \end{cases} \quad (16.4)$$

Переходя к её решению, замечаем, что второе уравнение этой системы имеет два решения:

$$\omega_1^1 = 0 \text{ и } \omega_2^3 = 3.$$

Подставив $\omega_1^1 = 0$ в первое уравнение (16.4), получим новое уравнение $-\omega_2(1 - \omega_2) = 0$. Находим два его решения $\omega_2^1 = 0$ и $\omega_2^2 = 1$, которые соответствуют значению $\omega_1^1 = 0$. Следовательно, точки $O_1 (0; 0)$ и $O_2 (0; 1)$ – это особые точки системы (16.1).

Теперь подставим решение $\omega_2^3 = 3$ в первое уравнение (16.4) и найдем его решения: $\omega_1^3 = 3$, $\omega_1^4 = -2$. Этим решениям соответствуют еще две особые точки $O_3 (3; 3)$ и $O_4 (-2; 3)$.

Таким образом, система (16.1) имеет четыре особые точки: $O_1 (0; 0)$, $O_2 (0; 1)$, $O_3 (3; 3)$ и $O_4 (-2; 3)$, которые показаны на рисунке 16.1.

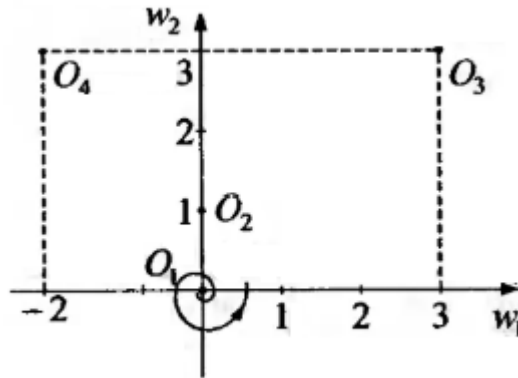


Рисунок 16.1 – Особые точки нелинейной системы

Задача для самостоятельного решения

Найти особые точки (положения равновесия) нелинейных систем, описываемых следующими уравнениями:

а) $\dot{\omega}_1 = \omega_1(3 - \omega_1 - \omega_2); \dot{\omega}_2 = \omega_2(5 - \omega_1);$

б) $\dot{\omega}_1 = 4\omega_1\omega_2^2 - \omega_2^2; \dot{\omega}_2 = 2\omega_1 - \omega_2\omega_1;$

в) $\dot{\omega}_1 = 0,25\omega_2\omega_1^2 - \omega_1^2; \dot{\omega}_2 = 2\omega_1 - \omega_2\omega_1.$

Список литературы

1 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы : учебник и практикум для академ. бакалавриата / Д. П. Ким. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2017. – 441 с.

2 **Кудинов, Ю. И.** Теория автоматического управления (с использованием MATLAB-SIMULINK) : учеб. пособие / Ю. И. Кудинов, Ф. Ф. Пащенко. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2018. – 312 с.

3 **Сеславин, А. И.** Теория автоматического управления. Линейные, непрерывные системы : учебник / А. И. Сеславин. – М. : ИНФРА-М, 2022. – 314 с.

4 **Гайдук, А. Р.** Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учеб. пособие / А. Р. Гайдук, В. Е. Беляев, Т. А. Пьявченко. – 3-е изд. – СПб. : Лань, 2016. – 464 с.