МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальностей 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», 6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0612-03 «Системы управления информацией» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2025

УДК 512.64+514.12
ББК 22.143+22.151.5
Л59

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» апреля 2025 г., протокол № 8

Составитель доц. В. Г. Замураев

Рецензент доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» предназначены для студентов специальностей 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», 6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0612-03 «Системы управления информацией» дневной и заочной форм обучения. Приведены необходимые теоретические сведения, предложены задания для самостоятельной работы на практических занятиях.

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Операции над матрицами

1.1 Теоретические сведения

Матрицей размера $m \times n$ или $(m \times n)$*-матрицей* называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Суммой $A + B$ $(m \times n)$*-матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Произведением αA *матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* α (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех её элементов на α: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Произведением AB $(m \times n)$*-матрицы* $A = (a_{ij})$ *на* $(n \times k)$*-матрицу* $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$-матрица $C = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}, \ i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,k.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.

Матрица A^T называется *транспонированной* к матрице A, если выполняется условие $a_{ij}^T = a_{ji}$ для всех i, j, где a_{ij} и a_{ij}^T – элементы матриц A и A^T соответственно.

Квадратная матрица B называется *симметричной*, если $B^T = B$. Квадратная матрица C называется *кососимметричной*, если $C^T = -C$.

1.2 Задания для самостоятельной работы

1 Вычислить линейную комбинацию $3A + 2B$ матриц A и B:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&2&2\end{pmatrix}.$$

В заданиях 2−5 вычислить произведения матриц.

2 $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$. **3** $\begin{pmatrix}4&3\\7&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28&93\\38&-126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}$.

4 $\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$.

5 а) $\begin{pmatrix}4&0&-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&-2&3&1\end{pmatrix}$.

В заданиях 6−8 вычислить указанные степени матриц.

6 $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^3$. **7** $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n$, $a\in\mathbb{R}$. **8** $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

9 Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A: $f(x)=x^2-3x+1$,

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}.$$

10 Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

11 Вычислить AA^T и A^TA для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\4&-1&5&-1\end{pmatrix}$.

2 Определители второго и третьего порядков

2.1 Теоретические сведения

Квадратная таблица $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, составленная из четырёх действительных (или комплексных) чисел, называется *квадратной матрицей 2-го порядка*.

Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A (или просто – *определителем матрицы* A), называется число

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} -$$

квадратная матрица 3-го порядка, то соответствующим ей *определителем 3-го порядка* называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \qquad (1)$$

Определители 3-го порядка обычно вычисляются с использованием следующего правила Саррюса: одно из трёх слагаемых, входящих в правую часть (1) со знаком плюс, есть произведение элементов *главной* диагонали матрицы A, каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы, а слагаемые, входящие в (1) со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно второй (*побочной*) диагонали.

Имеют место следующие свойства определителей 2-го и 3-го порядков:

1) если строки матрицы определителя сделать столбцами с теми же номерами (т. е. *транспонировать* матрицу), то определитель не изменится;

2) если все элементы строки (столбца) умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число;

3) если переставить две строки (столбца) определителя, то он изменит знак; в частности, если две строки (столбца) определителя равны, то он равен нулю;

4) если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной (данного), прежние, а в данной строке (данном столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором – вторые слагаемые;

5) если одна строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

2.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1−4 вычислить определители второго порядка.

1 $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$. **2** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **3** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **4** $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ -\dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

В заданиях 5–7 вычислить определители третьего порядка.

5 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **6** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. **7** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

8 Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

9 Используя свойства определителя третьего порядка, доказать следующее тождество: $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

В заданиях 10 и 11 вычислить определители, используя свойства определителя третьего порядка.

10 $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$. **11** $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$.

12 Проверить, что определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ делится на $x-y$, $y-z$ и $z-x$.

13 Построить график функции $y = \dfrac{1}{b-a} \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ $(a \neq b)$.

3 Определители n-го порядка

3.1 Теоретические сведения

Всякое взаимно-однозначное отображение π множества первых n натуральных чисел на себя называется *подстановкой* n*-го порядка*.

Всякая подстановка может быть записана в виде

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_{i_k} = \pi(i_k)$ – образ элемента $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ при отображении π. Для фиксированной подстановки π существует много различных способов записи вида (2), отличающихся нумерацией элементов верхней строки. в частности, запись вида

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mathrm{n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

называется *канонической*.

Говорят, что пара элементов (i, j) образует *инверсию* в подстановке π, если $i < j$, но $\alpha_i > \alpha_j$. Число $s(\pi)$ всех инверсных пар определяет чётность подстановки: подстановка называется *чётной*, если $s(\pi)$ – чётное число, и *нечётной*, если $s(\pi)$ – число нечётное.

Определителем n-го порядка, соответствующим квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(или *определителем матрицы* A), называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{s(\pi)} a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)},$$

где сумма берётся по всем подстановкам π n-го порядка.

Для определителя n-го порядка выполняются основные свойства, аналогичные свойствам 1)–5) определителей 2-го и 3-го порядков.

Метод понижения порядка определителя основан на следующем соотношении (i фиксировано):

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{(i,k)}, \tag{3}$$

где

$$A^{(i,k)} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots a_{i-1n} \\ a_{i+1,1} & \dots a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} и представляет собой (с точностью до знака $(-1)^{i+k}$) определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из исходного определителя вычёркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

Соотношение (3) называется *разложением определителя по* i*-й строке*. Аналогично определяется *разложение определителя по столбцу*. Прежде чем применять метод понижения порядка, полезно, используя основные свойства определителя, обратить в нуль все, кроме одного, элементы его некоторой строки (столбца).

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании определителя, когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей, становятся равными нулю.

Метод рекуррентных соотношений позволяет выразить данный определитель, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

3.2 Задания для самостоятельной работы

1 Определить чётность подстановки $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

В заданиях 2 и 3 выяснить, какие из приведённых ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

2 $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. **3** $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

4 Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в некоторый определитель со знаком минус.

5 Вычислить определитель, используя подходящее разложение по строке или столбцу: $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

В заданиях 6–9 вычислить определители.

$$\mathbf{6}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.\ \mathbf{7}\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.\ \mathbf{9}\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

10 Вычислить определитель порядка n приведением их к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

4 Обратная матрица. Правило Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений

4.1 Теоретические сведения

Квадратная матрица A называется *вырожденной (особенной)*, если её определитель равен нулю, и *невырожденной (неособенной)* в противном случае. Если A – невырожденная матрица, то существует, и притом единственная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица (т. е. такая, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю). матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A.

Укажем основные методы вычисления обратной матрицы.

Метод присоединённой матрицы. Присоединённая матрица A^* определяется как транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A (см. формулу (4)). Таким образом,

$$A^* = \begin{pmatrix} A^{(1,1)} \ A^{(2,1)} \ \dots \ A^{(n,1)} \\ A^{(1,2)} \ A^{(2,2)} \ \dots \ A^{(n,2)} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ A^{(1,n)} \ A^{(2,n)} \ \dots \ A^{(n,n)} \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство $A^*A = AA^* = \det A \cdot E$. Отсюда следует, что если A – невырожденная матрица, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Метод элементарных преобразований. Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для данной матрицы A n-го порядка построим прямоугольную матрицу $\Gamma_A = (A|E)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу. Далее, используя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу Γ_A к виду $(E|B)$, что всегда возможно, если A невырождена. Тогда $B = A^{-1}$.

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned} \tag{5}$$

или в матричной форме $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Правило Крамера. Если в системе (5) $\det A = \Delta \neq 0$, т. е. матрица A имеет обратную A^{-1}, то система (5) имеет, и притом единственное, решение $X = A^{-1}B$, или, в покомпонентной записи, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1,2,\ldots n$, где Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

4.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1 и 2 методом присоединённой матрицы найти обратные для заданных матриц.

1 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **2** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

В заданиях 3 и 4 методом элементарных преобразований найти обратные для заданных матриц.

3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **4** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5 Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

В заданиях 6 и 7 решить системы по правилу Крамера.

6 $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases}$ **7** $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$

8 Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, и при том только один, многочлен $y = f(x)$ степени ≤ 2, для которого $f(x_i) = y_i$, $i = 1,2,3$. Когда степень этого многочлена меньше двух (равна 1, равна 0)?

9 По заданных условиям найти многочлен $f(x)$: $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$.

5 Линейные операции над векторами

5.1 Теоретические сведения

Вектором (геометрическим вектором) a называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком отрезке $\overrightarrow{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор a (получен приложением вектора a к точке A). Длина отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора a и обозначается символом $|\mathrm{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор нулевой длины называется *нулевым вектором* и обозначается символом 0.

Векторы a и b называются *равными* ($\mathrm{a} = \mathrm{b}$), если множества представляющих их направленных отрезков совпадают.

В ряде задач часто бывает удобно не различать вектор и какой-либо представляющий его направленный отрезок. Именно в этом смысле, например, следует понимать выражение «построить вектор».

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ представляет вектор a. Приложив к точке B заданный вектор b, получим некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Вектор, представляемый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, называется *суммой* векторов a и b и обозначается $\mathrm{a}+\mathrm{b}$.

Произведением вектора a *на действительное число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\mathrm{a}$, такой, что:

1) $|\lambda\mathrm{a}| = |\lambda|\cdot|\mathrm{a}|$;

2) векторы a и $\lambda\mathrm{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Система векторов a_1, …, a_n называется *линейно зависимой*, если существуют числа λ_1, …, λ_n такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\mathrm{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathrm{a}_n = 0$. В противном случае система называется *линейно независимой*.

Справедливы следующие геометрические критерии линейной зависимости:

1) система $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2\}$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы a_1 и a_2 *коллинеарны*, т. е. их направления совпадают или противоположны;

2) система $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы a_1, a_2 и a_3 *компланарны*, т. е. параллельны некоторой плоскости;

3) всякая система из $n \geq 4$ векторов линейно зависима.

5.2 Задания для самостоятельной работы

1 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ − медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

2 $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ − медианы треугольника ABC. Выразить через $\mathrm{p} = \overrightarrow{AK}$ и $\mathrm{q} = \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

3 В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CM}$. Полагая $\overrightarrow{AB} = \mathrm{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \mathrm{b}$, выразить $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы a и b.

4 M − точка пересечения медиан треугольника ABC, O − произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

5 В трапеции $ABCD$ отношение длины основания AD к длине основания BC равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \mathrm{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathrm{b}$, выразить через a и b векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

6 Разложить вектор $\mathrm{s} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ по трём некомпланарным векторам: $\mathrm{p} = \mathrm{a} + \mathrm{b} - 2\mathrm{c}$, $\mathrm{q} = \mathrm{a} - \mathrm{b}$, $\mathrm{r} = 2\mathrm{b} + 3\mathrm{c}$.

7 Задан тетраэдр $OABC$.

В базисе из рёбер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overrightarrow{DE}$, где D и E − середины рёбер $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$;

б) вектора $\overrightarrow{OF}$, где F − точка пересечения медиан основания ABC.

8 Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O.

В базисе из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overrightarrow{OM}$, где M − точка пересечения диагоналей параллелограмма;

б) вектора $\overrightarrow{OK}$, где K − середина стороны AD.

9 Дан треугольник ABC, $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Прямая MN пересекает BC в точке K. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AK}$ в базисе из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

6 Базис и координаты вектора

6.1 Теоретические сведения

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов e_1, e_2, e_3 называется *базисом* во множестве всех геометрических векторов. Всякий геометрический вектор a может быть единственным образом представлен в виде

$$\mathrm{a}=X_1\mathrm{e}_1+X_2\mathrm{e}_2+X_3\mathrm{e}_3; \tag{6}$$

числа X_1, X_2, X_3 называются *координатами* вектора a в базисе $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$. Запись (6) называют также разложением вектора a по базису $\mathfrak{B}$.

Аналогично упорядоченная пара e_1, e_2 неколлинеарных векторов называется базисом $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2)$ в множестве геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор e образует базис $\mathfrak{B}=(\mathrm{e})$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор a есть *линейная комбинация* векторов a_1, a_2, …, a_n с коэффициентами λ_1, λ_2, …, λ_n, т. е. $\mathrm{a}=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\mathrm{a}_k$, то каждая координата $X_i(\mathrm{a})$ вектора a равна сумме произведений коэффициентов λ_1, …, λ_n на одноимённые координаты векторов a_1, …, a_n: $X_i(\mathrm{a})=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k X_i(\mathrm{a}_k)$, $i=1,2,3$.

Базис $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ называется *прямоугольным*, если векторы e_1, e_2 и e_3 попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\mathrm{e}_1=\mathrm{i},\ \mathrm{e}_2=\mathrm{j},\ \mathrm{e}_3=\mathrm{k}.$$

Проекцией вектора a на вектор e называется число $пр_{\mathrm{e}}\mathrm{a}=|\mathrm{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle(\mathrm{a},\mathrm{e})$ – угол между векторами a и e $(0\le\varphi\le\pi)$.

Координаты X, Y, Z вектора a в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора a на базисные орты i, j, k соответственно, а длина вектора a равна

$$|\mathrm{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,. \tag{7}$$

Числа

$$\cos\alpha = \cos\angle(\mathrm{a},\mathrm{i}) = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\beta = \cos\angle(\mathrm{a},\mathrm{j}) = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos\angle(\mathrm{a},\mathrm{k}) = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

называются *направляющими косинусами* вектора a.

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $\mathrm{a}_0 = \dfrac{1}{|\mathrm{a}|}\mathrm{a}$.

Говорят, что в трёхмерном пространстве введена *декартова прямоугольная система координат*, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *началом координат*;

2) некоторый прямоугольный базис $\mathfrak{B} = (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$ в множестве всех геометрических векторов.

Оси Ox, Oy и Oz, проведённые через точку O в направлении базисных ортов i, j и k, называются координатными осями системы координат $Oxyz$.

Если M – произвольная точка пространства, то направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе $Oxyz$ называются координаты её радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ как геометрического вектора в базисе $\mathfrak{B}$, т. е. $x(M) = X\left(\overrightarrow{OM}\right)$, $y(M) = Y\left(\overrightarrow{OM}\right)$, $z(M) = Z\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Если $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ – две произвольные точки в пространстве, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

Отсюда на основании (7) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\,.$$

Пусть на прямой l заданы точки M_1, M_2 и M, причём $M_1 \neq M_2$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. Так как они коллинеарны, то найдётся такое действительное число λ, что $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$. Число λ называется *отношением*, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, причём оно положительно, если точка M находится внутри отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, отрицательно (и $\lambda \neq -1$), если M находится вне $\overrightarrow{M_1M_2}$, и равно 0, если $M = M_1$.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M(x, y, z)$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

6.2 Задания для самостоятельной работы

1 Заданы векторы $\mathrm{a}_1(-1,2,0)$, $\mathrm{a}_2(3,1,1)$, $\mathrm{a}_3(2,0,1)$ и $\mathrm{a} = \mathrm{a}_1 - 2\mathrm{a}_2 + \frac{1}{3}\mathrm{a}_3$.

Вычислить:

а) $|\mathrm{a}_1|$ и координаты орта $(\mathrm{a}_1)_0$ вектора a_1;

б) $\cos\left(\widehat{\mathrm{a}_1, \mathrm{j}}\right)$;

в) координату X вектора a;

г) $\mathrm{pr}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{a}$.

2 Заданы векторы $\mathrm{e}\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$ и $\mathrm{a}(2,-2,-1)$. Убедиться, что они коллинеарны найти разложение вектора a по базису $\mathfrak{B} = (\mathrm{e})$.

3 Заданы векторы $\mathrm{a} = 2\mathrm{i} + 3\mathrm{j}$, $\mathrm{b} = -3\mathrm{j} - 2\mathrm{k}$, $\mathrm{c} = \mathrm{i} + \mathrm{j} - \mathrm{k}$.

Найти:

а) координаты орта a_0;

б) координаты вектора $\mathrm{a} - \frac{1}{2}\mathrm{b} + \mathrm{c}$;

в) разложение вектора $\mathrm{a} + \mathrm{b} - 2\mathrm{c}$ по базису $\mathfrak{B} = (\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$;

г) $\mathrm{pr}_j(\mathrm{a} - \mathrm{b})$.

4 Найти длину и направляющие косинусы вектора $\mathrm{p} = 3\mathrm{a} - 5\mathrm{b} + \mathrm{c}$, если $\mathrm{a} = 4\mathrm{i} + 7\mathrm{j} + 3\mathrm{k}$, $\mathrm{b} = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} + \mathrm{k}$, $\mathrm{c} = 2\mathrm{i} - 3\mathrm{j} - \mathrm{k}$.

5 Найти вектор x, коллинеарный вектору $\mathrm{a} = \mathrm{i} - 2\mathrm{j} - 2\mathrm{k}$, образующий с ортом j острый угол и имеющий длину $|\mathrm{x}| = 15$.

6 Найти вектор x, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\mathrm{x}| = 2\sqrt{3}$.

7 Даны три вершины $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ и $C(1,2,-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвёртую вершину D, противоположную B.

8 Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2,0,2)$ и $D(5,-2,0)$ разделён на три равные части.

9 Треугольник задан координатами своих вершин $A(3,-2,1)$, $B(3,1,5)$, $C(4,0,3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

10 Даны вершины треугольника $A(1,0,2)$, $B(1,2,2)$ и $C(5,4,6)$. Точка L делит отрезок $\overrightarrow{AC}$ в отношении $\lambda = 1/3$, CE − медиана, проведённая из вершины C. Найти координаты точки M пересечения прямых BL и CE.

7 Произведения векторов

7.1 Теоретические сведения

Скалярным произведением ненулевых векторов a_1 и a_2 называется число

$$(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = |\mathrm{a}_1||\mathrm{a}_2|\cos\angle(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2).$$

Для скалярного произведения наряду с обозначением $(\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2)$ используется также обозначение $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2$.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1) $\mathrm{a}_1 \perp \mathrm{a}_2 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 = 0$ (*условие перпендикулярности векторов*);

2) если $\varphi = \angle(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$, то

$$0 \le \varphi < \pi/2 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 > 0$$

и

$$\pi/2 < \varphi \le \pi \ \Leftrightarrow\ \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 < 0.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1) $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 = \mathrm{a}_2\mathrm{a}_1$;

2) $(\lambda\mathrm{a}_1)\mathrm{a}_2 = \lambda(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2)$;

3) $\mathrm{a}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2) = \mathrm{ab}_1 + \mathrm{ab}_2$.

Если векторы $\mathrm{a}_1(X_1,Y_1,Z_1)$ и $\mathrm{a}_2(X_2,Y_2,Z_2)$ представлены своими координатами в некотором базисе, то скалярное произведение равно

$$\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Из этой формулы, в частности, следует формула для определения косинуса угла между векторами

$$\cos\angle(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)=\frac{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}{|\mathrm{a}_1||\mathrm{a}_2|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

Если задан некоторый вектор e, то *ортогональной составляющей* произвольного вектора a *вдоль вектора* e называется такой вектор a_e, который коллинеарен e, причём разность $\mathrm{a}-\mathrm{a}_\mathrm{e}$ перпендикулярна вектору e.

Аналогично *ортогональной составляющей* вектора a *в плоскости* P называется вектор a_P, компланарный плоскости P, причём разность $\mathrm{a}-\mathrm{a}_P$ перпендикулярна этой плоскости.

Если базис $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ – прямоугольный, то координаты произвольного вектора $\mathrm{a}=X_1\mathrm{e}_1+X_2\mathrm{e}_2+X_3\mathrm{e}_3$ в этом базисе могут быть вычислены по формуле

$$X_i=\mathrm{a}\mathrm{e}_i,\ i=1,2,3.$$

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов e_1, e_2, e_3 называется *правой*, если наблюдателю, находящемуся внутри телесного угла, образованного этими векторами, кратчайшие повороты от e_1 к e_2 и от e_2 к e_3 кажутся происходящими против часовой стрелки. в противном случае тройка e_1, e_2, e_3 называется *левой.*

Векторным произведением вектора a_1 на вектор a_2 называется вектор, обозначаемый символом $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]$ (или $\mathrm{a}_1\times\mathrm{a}_2$), определяемый следующими тремя условиями:

1) длина вектора $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах a_1 и a_2, т. е. $|[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]|=|\mathrm{a}_1||\mathrm{a}_2|\sin\angle(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$;

2) вектор $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]$ перпендикулярен плоскости векторов a_1 и a_2;

3) упорядоченная тройка a_1, a_2, $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]$ правая.

Из определения векторного произведения следует, что

$$\mathrm{a}_1\parallel\mathrm{a}_2\ \Leftrightarrow\ [\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]=0.$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]=-[\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_1]$;

2) $[\lambda\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]=\lambda[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]$;

3) $[\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2,\mathrm{b}]=[\mathrm{a}_1,\mathrm{b}]+[\mathrm{a}_2,\mathrm{b}]$.

Если $\mathrm{a}_1(X_1,Y_1,Z_1)$ и $\mathrm{a}_2(X_2,Y_2,Z_2)$ – векторы, заданные своими координатами в правом прямоугольном базисе, то разложение векторного произведения в том же базисе имеет вид

$$[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\mathrm{i}+(Z_1X_2-X_1Z_2)\mathrm{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\mathrm{k},$$

или, в символической записи с использованием понятия определителя 3-го порядка

$$[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов a_1, a_2, a_3 называется число $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]\mathrm{a}_3$.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) если V – объём параллелепипеда, построенного на векторах a_1, a_2 и a_3, то

$$[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]\mathrm{a}_3=\begin{cases} V, \text{ если тройка } (\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3) \text{ правая,} \\ -V, \text{ если тройка } (\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3) \text{ левая;} \end{cases}$$

2) для того чтобы три вектора a_1, a_2, a_3 были компланарны, необходимо и достаточно выполнение условия $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]\mathrm{a}_3=0$.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т. е.

$$[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]\mathrm{a}_3=[\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3]\mathrm{a}_1=[\mathrm{a}_3,\mathrm{a}_1]\mathrm{a}_2.$$

Это свойство позволяет ввести обозначение $[\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2]\mathrm{a}_3=\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3$ (результат не зависит от того, как расставить квадратные скобки в правой части). Смешанное произведение через координаты векторов в правом прямоугольном базисе записывается в виде

$$\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

7.2 Задания для самостоятельной работы

1 $|\mathrm{a}_1|=3$, $|\mathrm{a}_2|=4$, $\left(\widehat{\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2}\right)=2\pi/3$.

Вычислить:

а) $\mathrm{a}_1^2=\mathrm{a}_1\mathrm{a}_1$; б) $(3\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2)(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2)$; в) $(\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2)^2$.

2 Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathrm{a}=\mathrm{p}-3\mathrm{q}$, $\mathrm{b}=5\mathrm{p}+2\mathrm{q}$, если известно, что $|\mathrm{p}|=2\sqrt{2}$, $|\mathrm{q}|=3$ и $\left(\widehat{\mathrm{p},\mathrm{q}}\right)=\pi/4$.

3 Определить угол между векторами a и b, если известно, что

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2+(\mathrm{a}+2\mathrm{b})^2=20$$

и $|\mathrm{a}|=1$, $|\mathrm{b}|=2$.

4 Даны векторы $a_1(4,-2,-4)$ и $a_2(6,-3,2)$.

Вычислить:

а) a_1a_2; б) $(2a_1-3a_2)(a_1+2a_2)$; в) $(a_1-a_2)^2$; г) $|2a_1-a_2|$; д) $\mathrm{pr}_{a_1}a_2$; е) $\mathrm{pr}_{a_2}a_1$; ж) направляющие косинусы вектора a_1; з) $\mathrm{pr}_{a_1+a_2}(a_1-2a_2)$; и) $\cos\left(\widehat{a_1,a_2}\right)$.

5 Вычислить работу силы $F=i+2j+k$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1,2,0)$ в положение $B(2,1,3)$.

6 $|a_1|=1$, $|a_2|=2$ и $\left(\widehat{a_1,a_1}\right)=2\pi/3$.

Вычислить:

а) $|[a_1,a_2]|$; б) $|[2a_1+a_2,a_1+2a_2]|$; в) $|[a_1+3a_2,3a_1-a_2]|$.

7 Заданы векторы $a_1(3,-1,2)$ и $a_2(1,2,-1)$.

Найти координаты векторов:

а) $[a_1,a_1]$; б) $[2a_1+a_2,a_2]$; в) $[2a_1-a_2,2a_1+a_2]$.

8 Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.

9 Векторы a_1, a_2, a_3 образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|a_1|=4$, $|a_1|=2$, $|a_3|=3$. Вычислить $a_1a_2a_3$.

10 Установить, образуют ли векторы a_1, a_2 и a_3 базис в множестве всех векторов, если: $a_1(2,3,-1)$, $a_2(1,-1,3)$, $a_3(1,9,-11)$.

11 Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках $A(2,-3,5)$, $B(0,2,1)$, $C(-2,-2,3)$ и $D(3,2,4)$.

8 Ранг матрицы

8.1 Теоретические сведения

Всякая упорядоченная совокупность из n действительных (комплексных) чисел называется *действительным (комплексным) арифметическим вектором* и обозначается символом $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Числа x_1, x_2, … , x_n называются *компонентами* арифметического вектора x.

Над арифметическими векторами вводятся следующие операции.

Сложение: если $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, то

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n). \tag{8}$$

Умножение на число: если λ – число (действительное или комплексное) и $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ – арифметический вектор, то

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n). \tag{9}$$

Множество всех действительных (комплексных) арифметических n-компонентных векторов с введёнными выше операциями сложения (8) и умножения на число (9) называется *пространством арифметических векторов* (соответственно действительным или комплексным). Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматривается действительное пространство арифметических векторов, обозначаемое символом $\mathbb{R}^n$.

Система арифметических векторов $\{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_s\}$ называется *линейно-зависимой*, если найдутся числа λ_1, …, λ_s, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda_1\mathrm{x}_1+\ldots+\lambda_s\mathrm{x}_s=0$ (где $0=(0,\ldots,0)$ – нулевой вектор). В противном случае эта система называется *линейно-независимой*.

Пусть Q – произвольное множество арифметических векторов. Система векторов $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_s)$ называется *базисом* в Q, если выполнены следующие условия:

1) $\mathrm{e}_k\in Q$, $k=1,2,\ldots,s$;

2) система $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_s)$ линейно-независима;

3) для любого вектора $\mathrm{x}\in Q$ найдутся числа λ_1, …, λ_s такие, что

$$\mathrm{x}=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\mathrm{e}_k\,. \tag{10}$$

Формула (10) называется *разложением* вектора x по базису $\mathfrak{B}$. Коэффициенты λ_1, …, λ_s однозначно определяются вектором x и называются *координатами* этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$.

Справедливы следующие утверждения.

1 Всякая система векторов $Q\subset\mathbb{R}^n$ имеет по меньшей мере один базис; при этом оказывается, что все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* системы Q и обозначаемого $rang\ Q$ или $r(Q)$.

2 Ранг всего пространства $\mathbb{R}^n$ равен n и называется *размерностью* этого пространства; при этом в качестве базиса $\mathbb{R}^n$ можно взять следующую систему:

$$\mathrm{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\ \mathrm{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \mathrm{e}_3=(0,0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ \mathrm{e}_n=(0,0,0,\ldots,1). \tag{11}$$

Этот базис принято называть *каноническим*.

Зафиксируем произвольный базис $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда всякому вектору x можно поставить во взаимно-однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе, т. е.

$$\mathrm{x} = x_1\mathrm{e}_1 + \ldots + x_n\mathrm{e}_n \;\Leftrightarrow\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Необходимо различать компоненты вектора и его координаты в некотором базисе. Мы используем для них одинаковое обозначение, хотя следует помнить, что координаты вектора совпадают с его компонентами только в каноническом базисе.

Линейные операции (8) и (9) над арифметическими векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y} \;\Leftrightarrow\; Z = X + Y \;\; (\Leftrightarrow\; z_k = x_k + y_k,\; k = 1,2,\ldots,n),$$

$$\mathrm{y} = \lambda\mathrm{x} \;\Leftrightarrow\; Y = \lambda \cdot X \;\; (\Leftrightarrow\; y_k = \lambda x_k,\; k = 1,2,\ldots,n).$$

Пусть в матрице A размера $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \le \min(m,n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы A.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется её *рангом*, а любой минор порядка r, отличный от нуля, – *базисным минором*.

Строки (столбцы) матрицы A размера $m \times n$ можно рассматривать как систему арифметических векторов из $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{R}^m$).

Теорема о базисном миноре. *Ранг матрицы равен рангу системы её строк (столбцов); при этом система строк (столбцов) матрицы, содержащая базисный минор, образует базис в системе всех строк (столбцов) этой матрицы.*

Приведём основные методы вычисления ранга матрицы.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдётся ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований основан на том факте, что элементарные преобразования (см. разд. 4) матрицы не меняют её ранга. Используя эти преобразования, матрицу можно привести к такому виду, когда все её элементы, кроме a_{11}, a_{22}, …, a_{rr} ($r \le \min(m,n)$), равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

Понятие ранга матрицы используется для исследования линейной зависимости системы арифметических векторов.

8.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1 и 2 найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.

1 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **2** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Чему равен ранг матрицы A при различных значениях λ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В заданиях 4 и 5 вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований.

4 $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$. **5** $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -61 \end{pmatrix}$.

В заданиях 6 и 7 вычислить ранг матрицы

6 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **7** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

8 Найти ранг системы арифметических векторов $a_1(1,-1,0,0)$, $a_2(0,1,-1,0)$, $a_3(1,0,-1,1)$, $a_4(0,0,0,1)$, $a_5(3,-5,2,-3)$.

9 Произвольные системы линейных алгебраических уравнений

9.1 Теоретические сведения

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \tag{12}
$$

или в матричной форме

$$AX = B, \tag{13}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $B = O$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Решением системы (12) называется всякий n-компонентный вектор-столбец X, обращающий матричное уравнение (13) в равенство (соответствующий решению X арифметический вектор $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ также будем называть решением системы (12)).

Система называется *совместной*, если у неё существует по крайней мере одно решение, в противном случае она называется *несовместной*.

Две системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Теорема Кронекера – Капелли. *Для того чтобы система* (*12*) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$rang\ A = rang\ \overline{A},$$

где $\overline{A} = (\,A|B\,)$ – *расширенная матрица системы.*

Пусть $rang\ A = rang\ \overline{A} = r$, т. е. система совместна. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный минор располагается в первых r $(1 \le r \le \min(m,n))$ строках и столбцах матрицы A. Отбросив последние $m - r$ уравнений системы (12), запишем *укороченную* систему:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r,
\end{aligned} \tag{14}
$$

которая эквивалентна исходной. Назовём неизвестные x_1, x_2, …, x_r *базисными*, а x_{r+1}, …, x_n *свободными* и перенесём слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (14). Получаем систему относительно базисных неизвестных:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n,\\
&a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n,
\end{aligned}
$$

которая для каждого набора значений свободных неизвестных $x_{r+1} = c_1$, …, $x_n = c_{n-r}$ имеет единственное решение $x_1(c_1,\dots,c_{n-r})$, …, $x_r(c_1,\dots,c_{n-r})$, находимое по правилу Крамера. Соответствующее решение укороченной, а следовательно, и исходной систем имеет вид

$$
X(c_1,\dots,c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1,\dots,c_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(c_1,\dots,c_{n-r}) \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}. \tag{15}
$$

Формула (15), выражающая произвольное решение системы в виде вектор-функции от $n-r$ свободных неизвестных, называется *общим решением* системы (12).

Однородная система $AX = O$ всегда совместна, поскольку имеет *тривиальное* решение $X = O$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $r = rang\, A < n$ (при $m = n$ это условие означает, что $\det A = 0$).

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n-r$ векторов e_1, …, e_{n-r}. Соответствующая ему в каноническом базисе (см. (11)) система вектор-столбцов E_1, …, E_{n-r} называется *фундаментальной системой решений*. Общее решение однородной системы имеет вид $X = c_1E_1 + \dots + c_{n-r}E_{n-r}$, где c_1, …, c_{n-r} – произвольные постоянные.

Базисные решения E_1, …, E_{n-r} могут быть получены методом, изложенным в п. 2, если свободным неизвестным придавать поочерёдно значение 1, полагая остальные равными 0.

Если задана неоднородная система $AX = B$, то её общее решение может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $AX = O$ и произвольного частного решения неоднородной системы.
С помощью элементарных преобразований над строками и перестановкой столбцов расширенная матрица системы (12) может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_m \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица (16) является расширенной матрицей системы

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1, \\ x_2 \quad + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n &= b'_r, \\ 0 &= b'_{r+1}, \\ &\ldots \\ 0 &= b'_m, \end{aligned} \tag{17}$$

которая с точностью до обозначения неизвестных эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел b'_{r+1}, …, b'_m отлично от нуля, то система (17), а следовательно, и исходная система (12) несовместны.

Если же $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$, то система совместна и формулы (17) дают по существу явное выражение для базисных неизвестных x_1, …, x_r через свободные неизвестные x_{r+1}, …, x_n.

9.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1−4 исследовать совместность и найти общее решение систем.

1 $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$ **2** $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

В заданиях 5−7 методом Жордана − Гаусса исследовать совместность и найти общее решение систем.

5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$ **6** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

10 Прямая на плоскости

10.1 Теоретические сведения

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ – *общее уравнение* прямой;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно *нормальному вектору* $\mathrm{n}(A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно *направляющему вектору* $\mathrm{q}(l, m)$ (*каноническое уравнение* прямой);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, – параметрические уравнения прямой, которые в векторной форме имеют вид

$$\mathrm{r} = \mathrm{r}_0 + \mathrm{q}t\,,$$

где $\mathrm{r}_0(x_0, y_0)$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, $\mathrm{q}(l, m)$ – направляющий вектор прямой;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой *в отрезках*, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ – *нормальное уравнение* прямой, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы нормального вектора n, направленного из начала координат в сторону прямой, а $p > 0$ – расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение приводится к нормальному виду путём умножения на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Если прямая L задана нормальным уравнением, а $M(x, y)$ – некоторая точка плоскости, то выражение

$$\delta(M, L) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

задаёт *отклонение точки M от прямой L*. Знак $\delta(M, L)$ указывает на взаимное расположение точки M, прямой L и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от прямой L, то $\delta(M, L) > 0$, а если M и начало координат находятся по одну сторону от прямой L, то $\delta(M, L) < 0$. Расстояние $\rho(M, L)$ от точки M до прямой L определяется равенством $\rho(M, L) = |\delta(M, L)|$.

Пусть заданы две прямые L_1 и L_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) L_1 и L_2 – параллельные прямые, в частности они совпадают;

2) L_1 и L_2 пересекаются.

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и при этом $B \neq 0$ (т. е. прямая не параллельна оси Oy), то эта прямая может быть описана *уравнением с угловым коэффициентом* вида $y = kx + b$.

Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то

$$\operatorname{tg}\left(\widehat{L_1, L_2}\right) = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

10.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1–3 написать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую; привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

1 Прямая L задана точкой $M_0(-1,2)\in L$ и нормальным вектором $\vec{n}(2,2)$.

2 Прямая L задана точкой $M_0(-1,2)\in L$ и направляющим вектором $\vec{q}(3,-1)$.

3 Прямая L задана двумя своими точками $M_1(1,2)$ и $M_2(-1,0)$.

4 Заданы прямая L и точка M.

Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M,L)$ от точки M до прямой L;

2) написать уравнение прямой L', проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой L;

3) написать уравнение прямой L'', проходящей через точку M параллельно заданной прямой L. Исходные данные: $L: -2x+y-1=0$, $M(-1,2)$.

В задачах 5–7 исследовать взаимное расположение заданных прямых L_1 и L_2. При этом в случае параллельности прямых L_1 и L_2 найти расстояние $\rho(L_1,L_2)$ между прямыми, а в случае, если эти прямые пересекаются, найти косинус угла между ними и точку M их пересечения.

5 $L_1: -2x+y-1=0$, $L_2: 2y+1=0$. **6** $L_1: x+y-1=0$, $L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}$.

7 $L_1: -x+2y+1=0$, $L_2: 2x-4y-2=0$.

8 Треугольник ABC задан координатами своих вершин.

Требуется:

1) написать уравнение стороны AB;

2) написать уравнение высоты CD и вычислить её длину $h=CD$;

3) найти угол φ между высотой CD и медианой BM;

4) написать уравнение биссектрис L_1 и L_2 внутреннего и внешнего углов при вершине A. Исходные данные: $A(1,2)$, $B(2,-2)$, $C(6,1)$.

9 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ и удалённой от точки $A(-2,-5)$ вдвое дальше, чем от точки $B(1,8)$.

10 В уравнении прямой $4x+\lambda y-20=0$ подобрать λ так, чтобы угол между этой прямой и прямой $2x-3y+6=0$ равнялся $45°$.

11 Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым L_1 и L_2 и проходящей посередине между ними, если $L_1: 3x-2y-1=0$, $L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{3}$.

12 Написать уравнение сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1,3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

11 Кривые второго порядка

11.1 Теоретические сведения

Говорят, что кривая Γ в системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x,y)=0, \tag{18}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x,y)$ принадлежит кривой Γ в том и только том случае, когда её координаты удовлетворяют соотношению (18). Если, в частности, $F(x,y)=f(x)-y$, то уравнение (18) может быть записано в виде

$$y=f(x),$$

и в этом случае кривая Γ совпадает с графиком функции $f(x)$.

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Γ, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{19}$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю (в противном случае Γ – прямая, т. е. алгебраическая кривая первого порядка).

В общем случае может оказаться, что уравнение (19) определяет так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая Γ невырожденная, то для неё найдётся такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих трёх видов (*каноническое уравнение*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\ge b>0, \tag{20}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0, \tag{21}$$

$$y^2=2px,\ p>0, \tag{22}$$

при этом кривая Γ называется соответственно *эллипсом, гиперболой* или *параболой*, а сама система координат, в которой её уравнение имеет вид (20), (21) или (22), называется *канонической системой координат* для заданной кривой. Рассмотрим основные геометрические свойства невырожденных кривых второго порядка на основе их канонических уравнений.

Эллипс имеет каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a\ge b>0$.

Параметры a и b называют *полуосями* эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$ – его *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy – *главными осями*, а центр симметрии O – *центром* эллипса.

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}\ge 0$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу. В частном случае $a=b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, или $x^2+y^2=a^2$, т. е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ $(0\le e<1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e=0$ эллипс является окружностью).

Прямые $D_1: x=-a/e$ и $D_2: x=a/e$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* эллипса.

Пусть заданы точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, $c\ge 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a$ есть эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$.

Гипербола имеет каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$.

Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы, точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ – её *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy – *действительной* и *мнимой осями*, а центр симметрии O – *центром* гиперболы.

Прямые $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей гиперболе.

Число $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$ $(1<e<+\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы и является мерой её «сплюснутости». В частном случае $a=b$ гипербола называется равносторонней; её эксцентриситет равен $e=\sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\pi/2$.

Прямые $D_1: x=-a/e$ и $D_2: x=a/e$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* гиперболы.

Пусть заданы точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, $c>0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\left|\left|\overrightarrow{F_1M}\right|-\left|\overrightarrow{F_2M}\right|\right|=2a$, $a>0$ есть гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$.

П а р а б о л а имеет каноническое уравнение $y^2=2px,\ p>0$.

Число p называется *параметром* параболы, точка O – её *вершиной*, а ось Ox – *осью* параболы.

Точка $F(p/2,0)$ называется *фокусом* параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ – *фокальным радиус-вектором*, а число $r=\left|\overrightarrow{FM}\right|$ – *фокальным радиусом* точки M параболы.

Прямая $D: x=-p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется её *директрисой*.

Пусть заданы точка $F(p/2,0)$ и прямая $D: x=-p/2$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\dfrac{\left|\overrightarrow{FM}\right|}{\rho(M,D)}=1$, есть парабола $y^2=2px$.

Говорят, что на плоскости введена полярная система координат $\langle O,u\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *полюсом*;

2) некоторый луч u, исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки $M\neq O$ называются два числа: *полярный радиус* $r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|>0$ и *полярный угол* $\varphi(M)$ – угол, на который следует повернуть ось u для того, чтобы её направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (при этом, как обычно, $\varphi(M)>0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi(M)<0$ в противном случае). Запись $M(r,\varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ.

Полярный угол $\varphi(M)$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0\le\varphi<2\pi$, называется *главным*. В некоторых случаях главным значением полярного угла называют значение φ, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\le\pi$.

Пусть на плоскости введены правая декартова прямоугольная система координат Oxy (т. е. такая, что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy происходит против часовой стрелки) и полярная система $\langle O,u\rangle$, причём полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки $M\neq O$ даётся формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $F(r,\varphi) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданном в декартовых прямоугольных координатах.

Пусть кривая − эллипс, ветвь гиперболы или парабола. Предположим, что полюс полярной системы координат совпадает с фокусом этой кривой, а полярная ось сонаправлена с осью кривой. Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p/e. Параметр p называется полуфокальным диаметром, e − эксцентриситет кривой. Уравнение в полярной системе координат, общее для эллипса, гиперболы и параболы, имеет вид $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$.

11.2 Задания для самостоятельной работы

1 Построить эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

2 Написать каноническое уравнение эллипса, если: а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 5$, $c = 4$; в) $c = 3$, $e = 3/5$; г) $b = 5$, $e = 12/13$; д) $c = 2$ и расстояние между директрисами равно 5; е) $e = 1/2$ и расстояние между директрисами равно 32.

3 Установить, что следующее уравнение определяет эллипс, найти его центр C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис: $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

4 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если сумма расстояний от неё до точек $F_1(-1,-1)$, $F_2(1,1)$ остаётся постоянной и равной $2\sqrt{3}$.

5 Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

6 Написать каноническое уравнение гиперболы, если: а) $a = 2$, $b = 3$; б) $b = 4$, $c = 5$; в) $c = 3$, $e = 3/2$; г) $a = 8$, $e = 5/4$; д) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$; е) $e = 3/2$ и расстояние между директрисами равно $8/3$.

7 Написать уравнение гиперболы, если известно, что её фокусами являются точки $F_1(-3,-4)$ и $F_2(3,4)$, а расстояние между директрисами равно $3{,}6$.

8 Построить следующие параболы и найти их параметры: а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

9 Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты её вершины A и величину параметра p: а) $y^2 = 4x - 8$;

б) $x^2 = 2 - y$; в) $y = 4x^2 - 8x + 7$; г) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; д) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

12 Плоскость в пространстве

12.1 Теоретические сведения

Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – *общее уравнение* плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно *нормальному вектору* $\mathrm{n}(A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости *в отрезках*, где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно;

4) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ – *нормальное уравнение* плоскости, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормального вектора n, направленного из начала координат в сторону плоскости, а $p > 0$ – расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение приводится к нормальному виду путём умножения на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если плоскость P задана нормальным уравнением, а $M(x, y, z)$ – некоторая точка пространства, то выражение

$$\delta(M, P) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

задаёт *отклонение точки* M *от плоскости* P. Знак $\delta(M, P)$ указывает на взаимное расположение точки M, плоскости P и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P, то $\delta(M, P) > 0$, а если M и начало координат находятся по одну сторону от плоскости P, то $\delta(M, P) < 0$.

Расстояние $\rho(M, P)$ от точки M до плоскости P определяется равенством $\rho(M, P) = |\delta(M, P)|$.

12.2 Задания для самостоятельной работы

1 Заданы плоскость $P: -2x + y - z + 1 = 0$ и точка $M(1,1,1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$.

2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,1,1)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(0,1,2)$ и $\vec{a}_2(-1,0,1)$.

3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,0)$ и $M_2(2,1,1)$ параллельно вектору $\vec{a}(3,0,1)$.

4 Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ и $M_3(3,0,1)$.

В задачах 5 и 6 исследовать взаимное расположение заданных плоскостей. При этом в случае, если эти плоскости параллельны, найти расстояние между ними, а в случае, если плоскости пересекаются по некоторой прямой, найти косинус угла между ними.

5 $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$, $P_2: y + 3z - 1 = 0$.

6 $P_1: 2x - y + z - 1 = 0$, $P_2: -4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

7 Вычислить объём пирамиды, ограниченной плоскостью $P: 2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

8 Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0$ и $P_2: 3x - 2y - z + 3 = 0$.

9 Написать уравнение плоскости, равноудалённой от двух заданных плоскостей $P_1: 4x - y - 2z - 3 = 0$ и $P_2: 4x - y - 2z - 5 = 0$.

10 Известны координаты вершин тетраэдра: $A(2,0,0)$, $B(5,3,0)$, $C(0,1,1)$, $D(-2,-4,1)$. Написать уравнения его граней.

11 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,-1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

13 Прямая и плоскость в пространстве

13.1 Теоретические сведения

Прямая L в пространстве может быть задана:

1) *общими уравнениями*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, что равносильно её заданию как линии пересечения плоскостей;

2) *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\mathrm{r}(t) = \mathrm{r}_0 + \mathrm{q}t,$$

где $\mathrm{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ – радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой, а $\mathrm{q}(l, m, n)$ – направляющий вектор прямой;

3) *каноническими уравнениями*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

что равносильно описанию прямой как линии пересечения трёх плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

13.2 Задания для самостоятельной работы

1 Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой канонические уравнения и уравнения в проекциях.

$L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$

2 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

3 Написать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(1, -2, 1)$ и $M_2(3, 1, -1)$.

4 Заданы прямая $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$ и точка $M(0, 1, 2) \notin L$ (проверить!).

Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L;

г) вычислить расстояние $\rho(M, L)$;

д) найти проекцию точки M на прямой L.

5 Заданы плоскость $P: x + y - z + 1 = 0$ и прямая $L: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$, причём $L \notin P$ (проверить!).

Требуется:

а) вычислить синус угла между плоскостью P и прямой L и координаты точки их пересечения;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L перпендикулярно к плоскости P;

в) написать уравнение проекции прямой L на плоскость P.

6 Убедившись в том, что прямые L_1 и L_2 принадлежат одной плоскости, написать уравнение этой плоскости:

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4},\ L_2 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

7 Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

8 Найти расстояние от точки $A(2,3,-1)$ до заданной прямой

$$L : \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y - 2z + 17 = 0. \end{cases}$$

9 Доказать, что прямые $L_1 : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases}$ и $L_2 : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ параллельны и найти расстояние $\rho(L_1, L_2)$.

10 Найти уравнения проекций прямой $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$ на плоскость $x - 3y - z + 8 = 0$.

11 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(7,1,0)$ параллельно плоскости $2x + 3y - z - 15 = 0$ и пересекающей прямую $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

12 $L_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2},\ L_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-2}$.

13 Куб $ABCDA'B'C'D'$ задан своими вершинами $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, $B'(1,0,1)$, $C'(1,1,1)$, $D'(0,1,1)$.

Выполнить следующие задания:

а) написать уравнения прямых $A'C$ и BC';

б) вычислить расстояние между прямыми $A'C$ и BC';

в) написать уравнение общего перпендикуляра к прямым $A'C$ и BC'.

14 Поверхности второго порядка

14.1 Теоретические сведения

Говорят, что поверхность S в системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x,y,z)=0, \tag{23}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x,y,z)$ принадлежит поверхности S в том и только том случае, когда её координаты удовлетворяют соотношению (23). Если, в частности, $F(x,y,z)=f(x,y)-z$, то уравнение (23) может быть записано в виде

$$z=f(x,y),$$

и в этом случае поверхность S совпадает с графиком функции двух переменных $f(x,y)$.

Кривая Γ в пространстве в общем случае определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S_1 и S_2 (определяемых неоднозначно), т. е. заданием системы двух уравнений

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$$

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \tag{24}$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю (в противном случае S – алгебраическая поверхность первого порядка, т. е. плоскость).

Может оказаться, что уравнение (24) определяет так называемую *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей).

Если же поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат её уравнение (24) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности.

1 *Эллипсоид*: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

2 *Гиперболоид*

а) однополостный: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

б) *двуполостный*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

3 *Конус второго порядка*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

4 *Параболоид*

а) *эллиптический*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$;

б) *гиперболический*: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

5 *Цилиндр второго порядка*

а) *эллиптический*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

б) *гиперболический*: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

в) *параболический*: $y^2=2px,\ p>0$.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по её уравнению является *метод сечений*.

Выделяют три класса поверхностей: цилиндрические, конические и поверхности вращения, – инвариантных относительно преобразований соответствующего типа.

Цилиндрической поверхностью (*цилиндром*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований параллельного переноса, определяемых любым вектором, коллинеарным некоторому вектору $\mathrm{q}(l,m,n)$. Из этого определения следует, что если точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит цилиндру S, то и вся прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ также принадлежит этому цилиндру.

Принята следующая терминология: всякая прямая, коллинеарная вектору $\mathrm{q}(l,m,n)$, называется *осью* цилиндра S; прямые $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, целиком принадлежащие цилиндру, называются его *образующими*; всякая кривая Γ, лежащая на цилиндре и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого цилиндра.

Пусть $\mathrm{q}(l,m,n)$ – любой вектор, коллинеарный оси цилиндра S, а направляющая Γ задана уравнениями

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$$

Точка $M(x,y,z)$ принадлежит цилиндру S в том и только в том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x+lt$, $y+mt$, $z+nt$ лежит на образующей Γ, т. е.

$$\begin{cases} F_1(x+lt, y+mt, z+nt) = 0, \\ F_2(x+lt, y+mt, z+nt) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Исключая параметр t из системы (25), получим соотношение вида $F(x,y,z)=0$, которое и является уравнением заданного цилиндра.

Конической поверхностью (*конусом*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований гомотетии с произвольным коэффициентом k и центром в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, называемой *вершиной* конуса. Из этого определения следует, что если точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ принадлежит конусу, то вся прямая $\frac{x-x_1}{x_1-x_0}=\frac{y-y_1}{y_1-y_0}=\frac{z-z_1}{z_1-z_0}$, проходящая через эту точку и вершину M_0 и называемая *образующей* конуса, целиком лежит на конусе. Всякая кривая Γ, лежащая на конусе и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого конуса.

Пусть задан конус S с вершиной $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющей

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$$

Точка $M(x,y,z)$ принадлежит конусу S в том и только в том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x+t(x-x_0)$, $y+t(y-y_0)$, $z+t(z-z_0)$ лежит на образующей Γ, т. е.

$$\begin{cases} F_1(x+t(x-x_0), y+t(y-y_0), z+t(z-z_0)) = 0, \\ F_2(x+t(x-x_0), y+t(y-y_0), z+t(z-z_0)) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Исключая параметр t из системы (26), получим уравнение конуса в виде $F(x,y,z)=0$.

Поверхностью вращения называется поверхность, инвариантная относительно поворотов на любой угол φ вокруг некоторой фиксированной оси u. Эта поверхность может быть получена вращением вокруг оси u кривой, получающейся в сечении поверхности любой плоскостью, проходящей через эту ось.

Если, например, поверхность образована вращением кривой $F(x,z)=0$, $y=0$ вокруг оси Oz, то уравнение этой поверхности имеет вид

$$F\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0.$$

14.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1 и 2 установить тип заданных поверхностей и построить эти поверхности.

1 $x^2+y^2-z^2=-1$. **2** $x^2-y^2=z^2$.

3 Составить уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида $y^2+z^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$.

4 Найти точки пересечения поверхности и прямой: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и $\frac{3-x}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$.

5 Доказать, что плоскость $4x-5y-10z-20=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ по прямолинейными образующим. Составить уравнения этих образующих.

6 Построить заданную цилиндрическую поверхность: $z=4-x^2$.

7 Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=h. \end{cases}$

8 Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z=x^2$, $y=0$ вокруг оси Oz.

9 Показать, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ есть уравнение поверхности вращения с осью вращения Ox. Написать уравнение кривой в плоскости $z=0$, вращением которой получена эта поверхность.

15 Линейные операторы

15.1 Теоретические сведения

Линейным оператором в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется всякое отображение $\mathrm{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ в себя, обладающее свойствами

$$\mathrm{A}(\lambda \mathrm{x})=\lambda \mathrm{Ax} \text{ и } \mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\mathrm{Ax}+\mathrm{Ay}.$$

Пусть A – линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{B}=(\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n)$ – некоторый фиксированный базис. Разложим векторы Ae_k, $k=1,2,\dots,n$, по базису $\mathfrak{B}$:

$$\mathrm{Ae}_k=a_{1k}\mathrm{e}_1+\dots+a_{nk}\mathrm{e}_n,\ k=1,2,\dots,n.$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора* A *в базисе* $\mathfrak{B}$.

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $\mathrm{y} = \mathrm{Ax}$, то $Y = AX$, где X, Y – столбцы координат векторов x, y и A – матрица оператора A в базисе $\mathfrak{B}$.

Над линейными операторами вводятся следующие операции:

а) сложение операторов: $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{x} = \mathrm{Ax}+\mathrm{Bx}$; при этом оператор $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ имеет матрицу $A+B$;

б) умножение операторов на числа: $(\lambda\mathrm{A})\mathrm{x} = \lambda(\mathrm{Ax})$; при этом оператор $\lambda\mathrm{A}$ имеет матрицу λA;

в) умножение операторов: $(\mathrm{AB})\mathrm{x} = \mathrm{A}(\mathrm{Bx})$; при этом оператор AB имеет матрицу AB.

Обратным к оператору A называется оператор A^{-1} такой, что $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$, где E – *единичный* оператор, реализующий тождественное отображение. Оператор A имеет обратный (и в этом случае называется *невырожденным*) в том и только в том случае, когда его матрица A невырождена (в любом базисе); при этом оператор A^{-1} имеет матрицу A^{-1}, обратную к матрице A.

Множество T_A всех векторов $A\mathrm{x}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, называется *образом* оператора A. Множество N_A всех векторов $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, для которых $A\mathrm{x} = 0$, называется *ядром* оператора A. Образ и ядро линейного оператора являются подпространствами в $\mathbb{R}^n$. При этом размерность образа r_A называется *рангом*, а размерность ядра n_A – дефектом оператора A. Справедливо равенство $r_A + n_A = n$.

Пусть число λ и вектор $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{x} \neq 0$, таковы, что

$$\mathrm{Ax} = \lambda\mathrm{x}. \qquad (27)$$

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора A, а вектор x – *собственным вектором* этого оператора, соответствующим собственному числу λ.

Векторное равенство (27) эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E)X = O, \ X \neq O. \qquad (28)$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора A в том и только в том случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е. λ есть корень многочлена

$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, называемого *характеристическим многочленом* оператора A. Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, есть некоторое ненулевое решение системы (28).

Линейный оператор A^* называется *сопряжённым к оператору* A, если для любых векторов x и y выполняется равенство $(A\mathrm{x},\mathrm{y}) = (\mathrm{x}, A^*\mathrm{y})$. Для всякого оператора A сопряжённый оператор A^* существует и единствен. Если оператор A в ортонормированном базисе имеет матрицу $A = (a_{ij})$, то сопряжённый оператор A^* в том же базисе имеет матрицу $A^* = (a_{ji}) = A^T$.

Линейный оператор называется *самосопряжённым*, если $A = A^*$. Для того чтобы оператор A был самосопряжённым, необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица A удовлетворяла соотношению $A = A^T$. Такие матрицы называются *симметричными*. Самосопряжённые операторы также называются симметричными.

15.2 Задания для самостоятельной работы

В заданиях 1−3 установить, какие из заданных отображений пространства E^3 в себя являются линейными операторами; выписать их матрицы в прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$.

1 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$, λ − фиксированное число.

2 $A\mathrm{x} = [\mathrm{a},\mathrm{x}]$, a − фиксированный вектор.

3 $A\mathrm{x} = (\mathrm{a},\mathrm{x})\mathrm{x}$, a − фиксированный вектор.

4 Установить, является ли заданное отображение A пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^3$ линейным оператором; в случае утвердительного ответа выписать его матрицу в каноническом базисе:

$$Ax = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, -3x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_3).$$

5 Описать образ и ядро линейного оператора A, действующего в пространстве E^3: $A\mathrm{x} = (\mathrm{x},\mathrm{e})\mathrm{e}$, $|\mathrm{e}| = 1$.

6 Найти собственные числа и собственные векторы оператора A в E^3. Решить эту задачу геометрически, то есть в инвариантной форме, не связанной с выбором какого-либо базиса в E^3. После этого провести аналитическое решение: $A\mathrm{x} = (\mathrm{x},\mathrm{i})\mathrm{i}$ − оператор проектирования на ось Ox.

В заданиях 7 и 8 найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных своими матрицами.

7 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **8** $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

9 Линейный оператор A в базисе $\mathfrak{B}' = (\mathrm{e}_1', \mathrm{e}_2')$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряжённого оператора A^* в том же базисе $\mathfrak{B}'$, если векторы e_1', e_2' заданы столбцами своих координат в некотором ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = (e_1, e_2)$: $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10 Показать, что в пространстве E^3 оператор A является симметричным: $A\mathrm{x} = \mathrm{x} - (\mathrm{x}, \mathrm{e})\mathrm{e}$, $|\mathrm{e}| = 1$.

16 Квадратичные формы

16.1 Теоретические сведения

Говорят, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана *линейная форма*, если каждому вектору $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие число $f(\mathrm{x})$, причём выполнены условия

$$f(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{y}),\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n,$$

$$f(\lambda \mathrm{x}) = \lambda f(\mathrm{x}),\ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Числовая функция $A(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная пространстве $\mathbb{R}^n$, называется *билинейной формой*, если при фиксированном y она является линейной формой по x, а при фиксированном x − линейной формой по y. Билинейная форма называется *симметрической*, если $A(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = A(\mathrm{y}, \mathrm{x})$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$. Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$, то матрица $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = A(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$, называется *матрицей билинейной формы* $A(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$.

Пусть $A(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ − симметрическая билинейная форма. Форма $A(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, которая получается из $A(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, если положить $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, называется *квадратичной*. При этом $A(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ называется билинейной формой, *полярной* к квадратичной форме $A(\mathrm{x}, \mathrm{x})$. Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$, то квадратичная форма $A(\mathrm{x}, \mathrm{x})$ в этом базисе имеет вид

$$A(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\,, \tag{29}$$

где $A = (a_{ij})$ − матрица квадратичной формы и $\mathrm{x} = x_1 \mathrm{e}_1 + \ldots + x_n \mathrm{e}_n$. Пусть в некотором базисе выражение (29) квадратичной формы не содержит произведений

$x_i x_j$ $(i \neq j)$, т. е.

$$A(\mathrm{x},\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 . \qquad (30)$$

Тогда выражение (30) называется *каноническим видом* квадратичной формы. В частности, если $\lambda_i = \pm 1,\ 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то получаем *нормальный вид* квадратичной формы $A(\mathrm{x},\mathrm{x})$.

Для всякой квадратичной формы существует такой базис $\mathfrak{B}'$, в котором она имеет канонический (и даже нормальный) вид.

Одним из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод собственных векторов. Будем рассматривать квадратичную форму (29) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как её матрица $A = (a_{ij})$ симметрична, то она может быть представлена в виде $A = UDU^T$, где D − диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A, а U − ортогональная матрица. Столбцы матрицы U являются координатами некоторого ортонормированного базиса $\mathfrak{B}'$, в котором матрица A имеет диагональный вид D, и, следовательно, квадратичная форма – искомый канонический вид. Соответствующее преобразование координат определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

16.2 Задания для самостоятельной работы

1 Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ функция $A(\mathrm{x},\mathrm{y})$ является билинейной формой: $A(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, $\mathrm{x},\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})$ − некоторая матрица.

2 Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $A(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Найти её матрицу в базисе $\mathfrak{B} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$, если $A(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$, $\mathrm{e}_1 = (1,1,1)$, $\mathrm{e}_2 = (1,1,-1)$, $\mathrm{e}_3 = (1,-1,-1)$.

В заданиях 3 и 4 найти ортогональное преобразование, приводящее форму к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

3 $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

4 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

В заданиях 5−7 определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определёнными, а какие – нет.

5 $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$. **6** $-x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2$. **7** $x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Список литературы

1 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 223 с.

2 Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – 464 с.

3 Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие: в 4 ч. / под ред. А. С. Поспелова. – М. : Юрайт, 2021. – Ч. 1. – 355 с.