

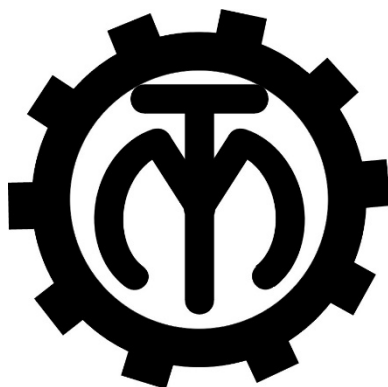
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технология машиностроения»

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство  
зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление  
недвижимостью» дневной и заочной форм обучения*

Часть 1



Могилев 2025

УДК 539.3/6  
ББК 30.121  
С86

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технология машиностроения» «28» октября 2025 г.,  
протокол № 3

Составители: ст. преподаватель В. А. Кемова;  
канд. техн. наук, доц. И. М. Кузменко

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. С. Федосенко

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» дневной и заочной форм обучения содержат материалы для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям и контрольным работам, перечень рекомендуемой литературы.

Учебное издание

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

### Часть 1

Ответственный за выпуск	В. М. Шеменков
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2025

## Содержание

Введение.....	4
1 Общие положения и понятия строительной механики.....	5
2 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета при неподвижной нагрузке.....	6
3 Определение усилий от подвижной нагрузки.....	12
4 Расчет трехшарнирных арок и рам.....	13
5 Расчет плоских ферм.....	24
6 Основные теоремы строительной механики и определение перемещений.....	28
Список литературы.....	30

## Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой по курсу «Строительная механика» для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью».

Целью изучения дисциплины «Строительная механика» является получение студентами знаний, необходимых для проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции инженерных сооружений. Задачей учебной дисциплины является умение определять внутренние усилия в элементах статически определимых и неопределимых систем от действия статических и динамических нагрузок, раскрывать статическую неопределимость методом сил и методом перемещений, строить линии влияния для простейших сооружений, рассчитывать стержневые системы на действие динамических нагрузок и устойчивость.

По каждой теме приводятся один или несколько примеров с их подробным решением, примеры для самостоятельного решения, вопросы для самопроверки. В краткой форме изложены основные теоретические положения по выполнению типовых задач, приведены примеры решения, а также список литературы, которую рекомендуется изучить студенту перед началом выполнения индивидуальных заданий.

## 1 Общие положения и понятия строительной механики

Прочность – способность сооружения сопротивляться внешним воздействиям не разрушаясь. Жесткостью сооружения (или элемента) называется его способность сопротивляться деформациям, нарушающим его нормальную эксплуатацию. Способность сооружения сохранять заданную форму равновесия называется устойчивостью.

При проектировании и выполнении расчетов материалы, в которых реализуются элементы сооружений, считаются:

- 1) однородными (их свойства одинаковы во всех точках);
- 2) изотропными (их свойства одинаковы во всех направлениях);
- 3) идеально упругими (в них соблюдается линейная зависимость между воздействиями и деформациями).

В рассматриваемых сооружениях справедливы принципы независимости действия сил и неизменных начальных размеров.

Расчетная схема сооружения представляет собой упрощенную схему реальной конструкции, отображающую только те параметры сооружения и действующие на неё нагрузки, которые имеют отношение к решению рассматриваемой задачи. При выборе расчетной схемы сооружения следует руководствоваться двумя требованиями:

- 1) схема должна отражать действительную работу сооружения;
- 2) схема должна быть простой и удобной для расчета.

### *Классификация расчетных схем*

#### 1 По геометрическим признакам:

- а) массивы – это тела, имеющие все геометрические размеры одного порядка, например подпорные стенки, монолитные дамбы, фундаментные блоки;
- б) стержни – это тела, у которых два измерения (толщина и ширина) малы по сравнению с третьим, например балки, элементы ферм, колонны;
- в) тонкостенные стержни – это тела, у которых габариты поперечного сечения малы по сравнению с длиной, но значительно превосходят толщину, например прокатные профили или трубы;
- г) пластины и оболочки – это тела, у которых один размер (толщина) гораздо меньше двух других.

#### 2 По типу опорных реакций от действия вертикальных нагрузок:

- а) балочные конструкции;
- б) арочные конструкции (распорные).

#### 3 По характеру внутренних связей:

- а) шарнирно-стержневые системы (фермы);
- б) конструкции, имеющие жесткие узлы (рамы);
- в) комбинированные конструкции.

#### 4 По характеру работы в пространстве:

- а) плоские (рамы, фермы, балки);
- б) пространственные (пространственные рамы, оболочки).

5 По числу степеней свободы:

- а)  $W > 0$  – механизмы;
- б)  $W = 0$  – статически определимые системы;
- в)  $W < 0$  – статически неопределимые системы, имеющие лишние связи.

Внешние связи обеспечивают неподвижность сооружений относительно земли и называются опорами. Внутренние связи определяют взаимодействие элементов конструкции.

## 2 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета при неподвижной нагрузке

В процессе эксплуатации на сооружение действуют различные внешние силы (вес оборудования, собственный вес конструкции, снеговая и ветровая нагрузки, силы взаимодействия отдельных элементов сооружения). В расчетах также учитываются температурное и кинематическое воздействия (осадка опор). Все внешние силы можно объединить термином «внешняя нагрузка» [1].

Воспринимая внешнюю нагрузку, сооружение передает ее опорам через свои элементы, тем самым вызывая в них опорные реакции, которые в расчетах также рассматриваются как внешние нагрузки. Внешние нагрузки, распределяясь между элементами сооружения, вызывают появление внутренних сил, напряжений и деформаций.

В элементах строительных конструкций (в плоской системе) возникают три внутренних усилия (внутренних силовых фактора, далее – ВСФ): изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольная сила  $N$ .

Изгибающий момент считается положительным, если создающие его усилия сжимают верхние волокна (правило «улыбки») (рисунок 2.1). Эпюра изгибающих моментов строится на растянутых волокнах, т. е. положительные ординаты откладываются вниз от нейтральной оси, а отрицательные – вверх. Скачок на эпюре возможен только в месте приложения сосредоточенного изгибающего момента на его величину.

При построении эпюр необходимо руководствоваться правилом знаков (см. рисунок 2.1, а).

В строительной механике в первую очередь строится эпюра изгибающих моментов. Поперечные силы на участках определяются по ординатам эпюры изгибающих моментов по формуле Журавского

$$Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \pm \frac{ql}{2}, \quad (2.1)$$

где  $M_{np}, M_{лев}$  – ординаты эпюры изгибающего момента на правой и левой границах участка соответственно;

$l$  – длина рассматриваемого участка;

$q$  – величина интенсивности распределенной нагрузки на участке.

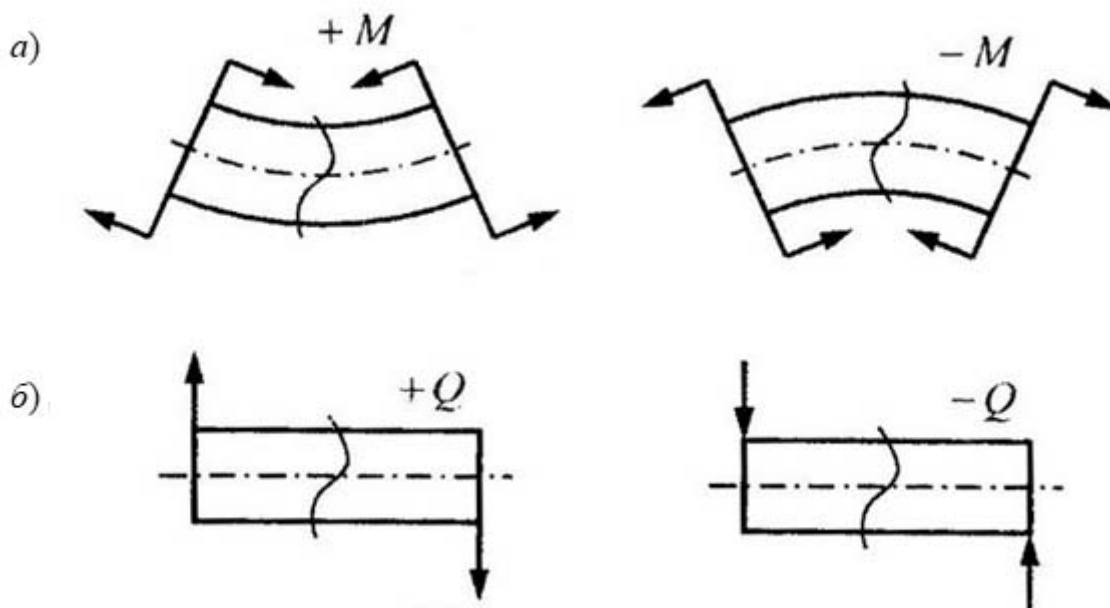


Рисунок 2.1 – Правило знаков внутренних силовых факторов

Если распределенная нагрузка действует сверху вниз, то для определения ординаты на левой границе участка берется слагаемое со знаком плюс, а для правой – минус. Общее правило знаков для поперечной силы гласит, что если равнодействующая всех поперечных сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, вращает по часовой стрелке, то она считается положительной (см. рисунок 2.1, б). Скачок на эпюре поперечных сил  $Q$  возможен только в месте приложения сосредоточенных сил (реакций) на их величину.

Многопролетная статически определимая балка – это геометрически неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок, соединенных между собой шарнирами (рисунок 2.2).

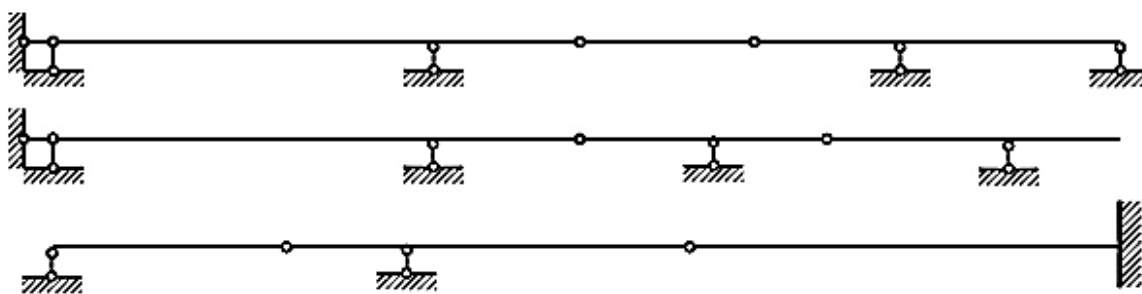


Рисунок 2.2 – Примеры многопролетных статически определимых балок

Число промежуточных шарниров рассчитывается из уравнения

$$Ш = C_{оп} - 3. \quad (2.2)$$

Шарниры должны устанавливаться так, чтобы отдельные элементы балки были геометрически неизменяемы и статически определимы. При установке

шарниров используют следующие правила.

1 В каждом пролете может быть установлено не более двух шарниров.

2 Пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим при условии, что один пролет остается без шарнира.

3 Пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров (кроме балок с заделками).

4 Если крайняя балка опирается в заделке, то шарниры могут устанавливаться во всех пролетах.

Расчет статически определимой многопролетной балки начинают с анализа взаимодействия отдельных ее элементов и построения так называемой поэтажной схемы.

В многопролетных шарнирно-консольных балках различают основные и вспомогательные балки. К основным балкам относят геометрически неизменяемые системы, прикрепленные к основанию при помощи двух шарнирных опор или заделки. Эти балки являются основой для построения поэтажной схемы. Вспомогательные балки опираются на основные, поэтому при построении поэтажной схемы их располагают выше, над основными балками. Все выше-расположенные балки являются вспомогательными по отношению к нижерасположенным.

На рисунке 2.3, *а, в* показаны многопролетные балки, а поэтажные схемы для них – на рисунке 2.3, *б, г*.

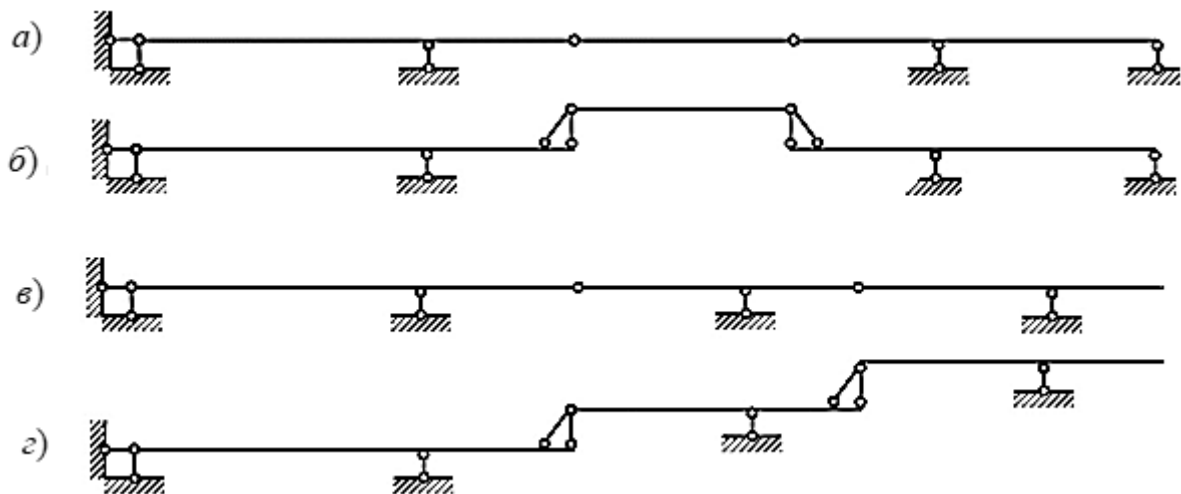


Рисунок 2.3 – Многопролетные балки и их поэтажные схемы

Так как постоянное усилие передается со вспомогательной балки на основную, то расчет на постоянную нагрузку (построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил) начинают с самой верхней вспомогательной балки, представляя ее как статически определимую и геометрически неизменяемую систему. Передача усилия происходит от вспомогательной балки к основной через шарнирные опоры в виде давления.



### Расчет многопролетной статически определимой балки

**Пример** – Для заданной балки (рисунок 2.4, а) построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ .

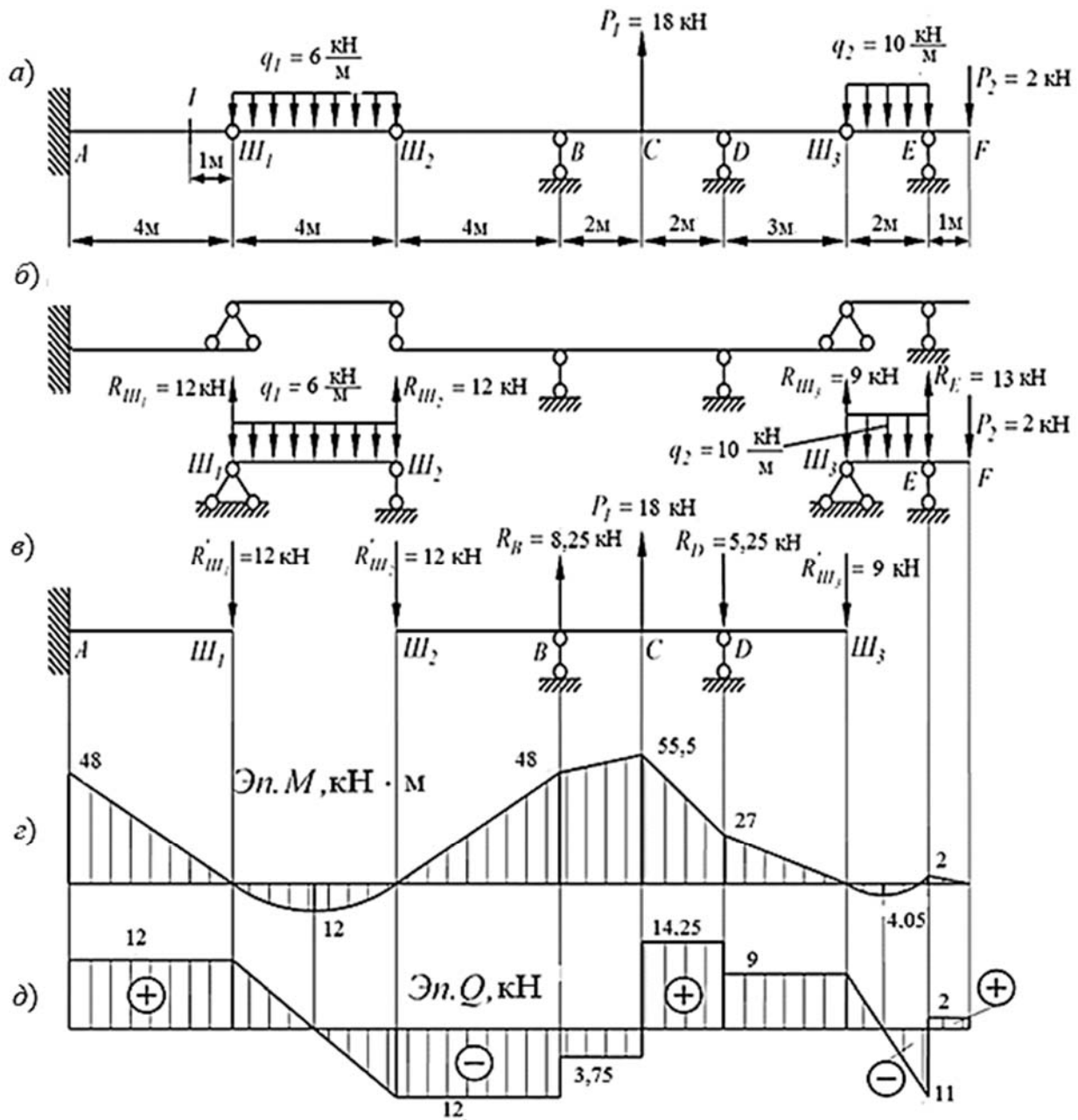


Рисунок 2.4 – Расчет многопролетной статически определимой балки (пример)

### Решение

Проводим геометрический анализ многопролетной балки. Она состоит из четырех элементов. Балка  $AIII_1$  имеет заделку и потому будет основной. Балка  $BD$  прикреплена к основанию двумя опорами и потому также будет являться основной по отношению к балкам  $III_1III_2$  и  $III_3E$ . Балка  $III_1III_2$  присоединена к основным балкам  $AIII_1$  и  $BD$  обоими концами при помощи шарниров, а балка  $III_3E$  – одной опорной связью к основанию, ввиду чего они являются

вспомогательными элементами. Схема взаимодействия элементов представлена на рисунке 2.4, б.

Расчет начинаем с рассмотрения вспомогательных элементов  $III_1III_2$  и  $III_3E$ , а затем – основных  $AIII_1$  и  $BD$ .

**Балка  $III_1III_2$ .** Так как балка полностью загружена распределенной нагрузкой, то реакции равны между собой и определяются как

$$R_{III_1} = R_{III_2} = \frac{q_1 \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ кН.}$$

При таком виде нагружения значения изгибающего момента по концам балки равны нулю, а его максимальное значение приходится на середину пролета и вычисляется следующим образом:

$$M_{III_1III_2}^{\max} = \frac{q_1 \cdot 4^2}{8} = \frac{6 \cdot 4^2}{8} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Балка  $III_3E$ .** Определяем опорные реакции:

$$\sum M_{III_3} = q_2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot R_E + 3 \cdot P_2 = 0;$$

$$R_E = \frac{q_2 \cdot 2 \cdot 1 + P_2 \cdot 3}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2} = 13 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 2 \cdot R_{III_3} - q_2 \cdot 2 \cdot 1 + P_2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{III_3} = \frac{q_2 \cdot 2 \cdot 1 - P_2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2} = 9 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = R_{III_3} - q_2 \cdot 2 + R_E - P_2 = 9 - 10 \cdot 2 + 13 - 2 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов:

$$M_{III_3E}^{III_3} = 0; \quad M_{III_3E}^E = R_{III_3} \cdot 2 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EF}^F = 0; \quad M_{EF}^E = -P_2 \cdot 1 = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Балка  $AIII_1$ .** Так как балка закреплена консольно, то ординаты эпюры изгибающих моментов могут быть получены без определения опорных реакций.

$$M_{AIII_1}^{III_1} = 0; \quad M_{AIII_1}^A = -R'_{III_1} \cdot 4 = -12 \cdot 4 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Значение изгибающего момента в сечении  $I$

$$M_1 = -R'_{III_1} \cdot 1 = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

**Балка BD.** Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = -R'_{III_2} \cdot 4 - P_1 \cdot 2 + 4 \cdot R_D + R'_{III_3} \cdot 7 = 0;$$

$$R_D = \frac{R'_{III_2} \cdot 4 + P_1 \cdot 2 - R'_{III_3} \cdot 7}{4} = \frac{12 \cdot 4 + 18 \cdot 2 - 9 \cdot 7}{4} = 5,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = -R'_{III_2} \cdot 8 + 4 \cdot R_B + P_1 \cdot 2 + R'_{III_3} \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = \frac{R'_{III_2} \cdot 8 - P_1 \cdot 2 - R'_{III_3} \cdot 3}{4} = \frac{12 \cdot 8 - 18 \cdot 2 - 9 \cdot 3}{4} = 8,25 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = -R'_{III_2} + R_B + P_1 - R_D - R'_{III_3} = -12 + 8,25 + 18 - 5,25 - 9 = 0.$$

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$ :

$$M_{III_2B}^{III_2} = 0; \quad M_{III_2B}^B = -R'_{III_2} \cdot 4 = -12 \cdot 4 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BC}^C = -R'_{III_2} \cdot 6 + R_B \cdot 2 = -12 \cdot 6 + 8,25 \cdot 2 = -55,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_3D}^{III_3} = 0; \quad M_{III_3D}^D = -R'_{III_3} \cdot 3 = -9 \cdot 3 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_3C}^C = -R'_{III_3} \cdot 5 - R_D \cdot 2 = -9 \cdot 5 - 5,25 \cdot 2 = -55,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру поперечных сил  $Q$  по участкам:

$$Q_{AIII_1} = \frac{M_{AIII_1}^{III_1} - M_{AIII_1}^A}{4} = \frac{0 - (-48)}{4} = 12 \text{ кН}; \quad Q_{III_2B} = \frac{-48 - 0}{4} = -12 \text{ кН};$$

$$Q_{III_1III_2} = \pm \frac{6 \cdot 4}{2} + 0 = \pm 12 \text{ кН}; \quad Q_{III_1III_2}^{III_1} = 12 \text{ кН}; \quad Q_{III_1III_2}^{III_2} = -12 \text{ кН};$$

$$Q_{BC} = \frac{-55,5 - (-48)}{2} = -3,75 \text{ кН}; \quad Q_{CD} = \frac{-27 - (-55,5)}{2} = 14,25 \text{ кН};$$

$$Q_{DIII_3} = \frac{0 - (-27)}{3} = 9 \text{ кН}; \quad Q_{EF} = \frac{0 - (-2)}{1} = 2 \text{ кН};$$

$$Q_{III_3E} = \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{-2 - 0}{2} = \pm 10 - 1 \text{ кН}; \quad Q_{III_3E}^{III_3} = 10 - 1 = 9 \text{ кН};$$

$$Q_{III_3E}^E = -10 - 1 = -11 \text{ кН}.$$

Так как эюра  $Q$  на участке  $III_3E$  пересекла нейтральную ось, то на эюре моментов будет экстремум. Балка с реакциями и эюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  представлены на рисунке 2.4, в–д.

### Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 2.5 представлены задачи для самостоятельной подготовки.

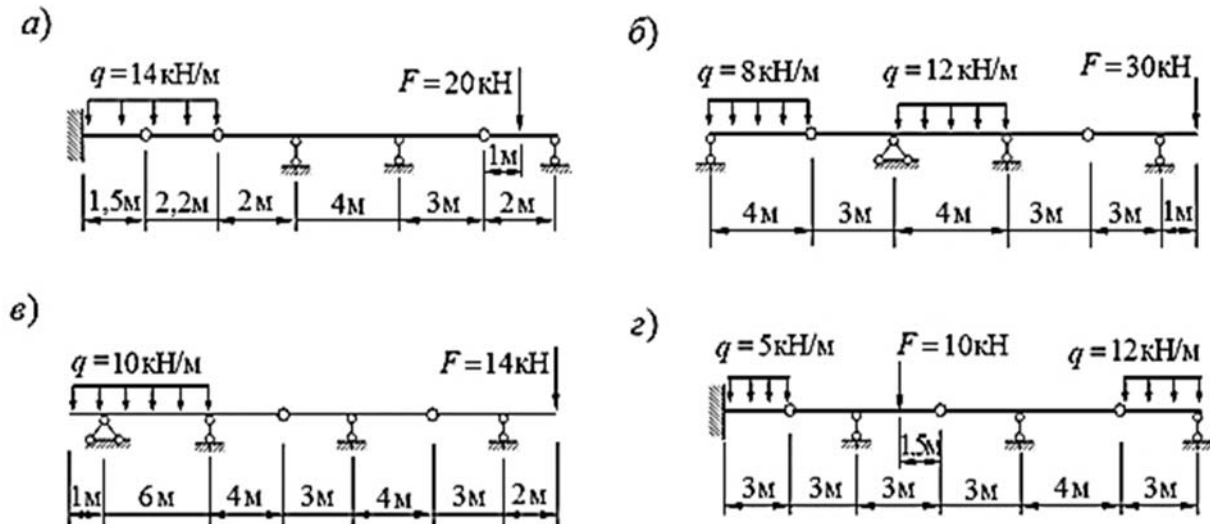


Рисунок 2.5 – К расчету статически определимой многопролетной балки

## 3 Определение усилий от подвижной нагрузки

Подвижной нагрузкой называется нагрузка, движущаяся по сооружению с некоторой скоростью. К примеру, такой нагрузкой являются транспорт, поезд, движущийся по мосту, кран, движущийся по подкрановой балке, и др. Ее можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению. При этом усилия (а также напряжения и деформации) зависят от положения подвижной нагрузки. Для определения расчетных значений усилий необходимо из всех возможных положений нагрузки выбрать такое, при котором рассчитываемый элемент будет находиться в самых неблагоприятных условиях. Такое положение нагрузки называется наименее выгодным или опасным.

Линия влияния (ЛВ) – это график изменения усилия (опорной реакции, реакции в связи, изгибающего момента, перерезывающего и продольного усилий) в определенном месте (сечении) конструкции от единичной безразмерной силы  $F = 1$ , которая движется по конструкции без ускорения, сохраняя при этом постоянное направление.

Понятия ЛВ и эюры нельзя путать, потому что эюра показывает значение внутреннего усилия для всех точек (сечений) от постоянной нагрузки, а ЛВ – значение внутреннего усилия от подвижной единичной силы  $F = 1$  толь-

ко для одного сечения.

Линии влияния, главным образом, применяют в балочных системах, а также в арках, фермах и других стержневых системах, в которых сосредоточенная сила может перемещаться вдоль пролета, сохраняя свое направление. При помощи линий влияния легко рассчитать балку на подвижную нагрузку, возникающую, например, при движении поезда или потока автомашин на мостовом пролете.

Необходимо установить правило знаков при расчете внутренних усилий по линиям влияния. Если сосредоточенные силы и распределенная нагрузка направлены сверху вниз, то знак ординат линии влияния и площади определяет знак усилия. Если положительная ветвь линии влияния отложена ниже оси стержня и сосредоточенный момент приходится на нее, то когда поворот оси балки по кратчайшему углу к ЛВ совпадает с направлением сосредоточенного момента, имеем положительное внутреннее усилие.

Усилие определяется по формуле

$$\Delta S = \sum P_i \cdot \Delta h_i = \sum P_i \cdot \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_i = \Delta x \cdot \sum P_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i, \quad (3.1)$$

где  $\Delta h_i$  – величина изменения координаты под  $F_i$ ;

$\alpha_i$  – угол наклона ЛВ под силой  $F_i$ .

## 4 Расчет трехшарнирных арок и рам

К рамам относятся стержневые системы, состоящие как минимум из двух прямолинейных стержней, соединенных между собой в узлах. Принято считать, что в процессе нагружения системы и в процессе деформации ее элементов первоначально заданные углы между стержнями остаются постоянными.

Трехшарнирная система образуется двумя дисками, соединенными друг с другом шарниром и с землей – двумя шарнирами. В трехшарнирных арках диски представляют собой криволинейные стержни (рисунок 4.1, а); в трехшарнирных рамах – ломаные прямолинейные стержни (рисунок 4.1, б).

Трехшарнирные арки и рамы относятся к статически определимым распорным системам, т. к. от действия вертикальных нагрузок в них возникают распоры – горизонтальные опорные реакции  $H_A$  и  $H_B$ . Эти системы могут иметь опорные шарниры на одном или на разных уровнях.

Для определения вертикальных реакций в системах с опорными шарнирами на одном уровне составляют два уравнения статического равновесия моментов относительно опорных шарниров  $A$  и  $B$ :

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

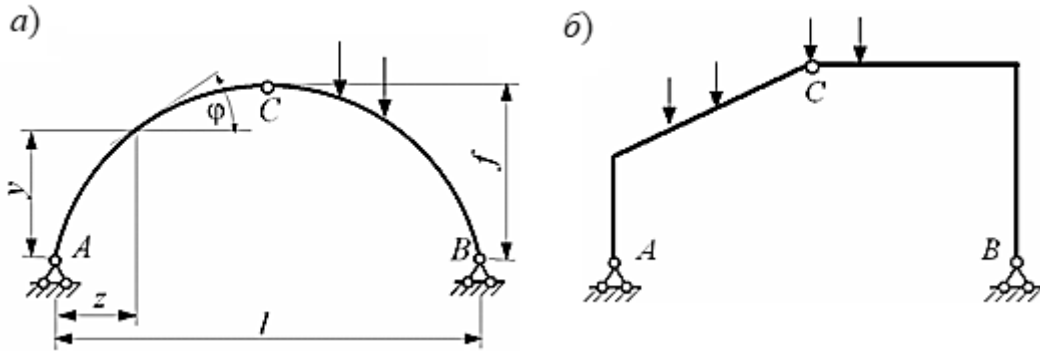


Рисунок 4.1 – Трехшарнирные системы

Для определения горизонтальных реакций составляют два уравнения статического равновесия моментов слева и справа относительно соединительного шарнира  $C$ :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad \sum M_C^{\text{пр}} = 0.$$

Проверкой правильности определения реакций служат уравнения равновесия сил на оси  $x$  и  $y$

$$\sum x = 0; \quad \sum y = 0.$$

В рамах действуют все три внутренних силовых фактора: изгибающий момент  $M$ , поперечная  $Q$  и продольная  $N$  силы. Границами участков являются сечения, в которых приложены нагрузки, а также узлы рамы.

Вначале строят эпюру изгибающих моментов  $M$  на растянутых волокнах, без указания знаков. При необходимости принимается стандартное правило знаков: если растянуты нижние волокна – момент считается положительным (рисунок 4.2, а).

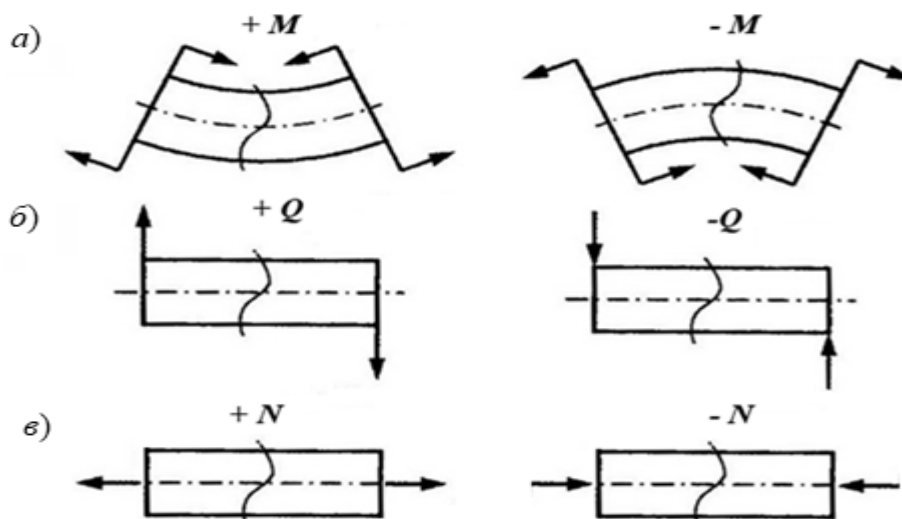


Рисунок 4.2 – Правило знаков внутренних силовых факторов

Скачок на эпюре изгибающих моментов  $M$  возможен только в месте приложения сосредоточенных моментов на их величину. В шарнире изгибающий момент равен нулю.

Эпюра поперечных сил  $Q$  строится по формуле Журавского

$$Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \pm \frac{ql}{2}, \quad (4.1)$$

где  $M_{np}$ ,  $M_{лев}$  – ординаты эпюры изгибающего момента на правой и левой границах участка соответственно;

$l$  – длина рассматриваемого участка;

$q$  – величина интенсивности распределенной нагрузки на участке.

Если распределенная нагрузка действует сверху вниз, то для определения ординаты на левой границе участка берется слагаемое со знаком плюс, а для правой – минус. Скачок на эпюре поперечных сил  $Q$  возможен только в месте приложения сосредоточенных сил (реакций) на их величину. Общее правило знаков для поперечной силы гласит, что если равнодействующая всех поперечных сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, вращает по часовой стрелке, то она считается положительной (рисунок 4.2, б).

Эпюра продольных сил  $N$  строится методом вырезания узлов из эпюры поперечных сил  $Q$  с учетом действия узловой нагрузки и правила знаков для поперечных сил  $Q$ . Для проверки правильности построения эпюры используется правило знаков: продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение (рисунок 4.2, в). Скачок на эпюре  $N$  возможен только в месте приложения сосредоточенных продольных сил (реакций) на их величину.

Составные рамы можно разделить на основную – статически определимую геометрически неизменяемую раму и вспомогательную (приставную) – прикрепленную к основной при помощи шарнира. Для расчета таких систем заданную раму расчлениают на отдельные рамы по шарниру, вместо которого прикладывают два неизвестных усилия (горизонтальное и вертикальное). Расчет начинают вести со вспомогательной рамы.

### ***Расчет трехшарнирной рамы***

***Пример 1*** – Построить эпюры распределения внутренних силовых факторов для заданной рамы (рисунок 4.3, а).

*Решение*

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 3,5 + 5 \cdot 1,5 - 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{210 - 7,5 + 6}{4} = 52,125 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 1 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{40 - 10}{4} = 12,875 \text{ кН};$$

$$\sum M_K^{слева} = 0: -R_A \cdot 2 + 5 \cdot 3,5 - 6 + H_A \cdot 4 = 0;$$

$$H_A = \frac{52,125 \cdot 2 - 5 \cdot 3,5 + 6}{4} = 3,5625 \text{ кН};$$

$$\sum M_K^{справа} = 0: R_B \cdot 2 - H_B \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0;$$

$$H_B = \frac{52,125 \cdot 2 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5}{4} = 3,5625 \text{ кН}.$$

Проводим проверки правильности нахождения реакций:

$$\sum y = 0: R_A + R_B - F - q \cdot 3 = 0;$$

$$12,875 + 52,125 - 5 - 20 \cdot 3 = 0;$$

$$\sum x = 0: H_A - H_B = 0;$$

$$3,5625 - 3,5625 = 0.$$

Если при определении реакций получен минус, то меняем их направление на противоположное. Показываем значения реакций на схеме (рисунок 4.3, б).

Находим ординаты эпюры изгибающих моментов по участкам и строим эпюру  $M$  (рисунок 4.3, в):

– участок  $AE$ :

$$0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м};$$

$$M_{AE} = H_A \cdot z_1 = 3,5625 \cdot z_1 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=1} = 3,5625 \text{ кН} \cdot \text{м};$$



– участок  $EC$ :

$$0 \leq z_2 \leq 3 \text{ м};$$

$$M_{EC} = H_A \cdot (1 + z_2) - 6 = 3,5625 \cdot (1 + z_2) - 6 \Big|_{z=0} = -2,4375 \Big|_{z=3} = 8,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $GC$ :

$$0 \leq z_3 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$M_{GC} = 5 \cdot z_3 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=1,5} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $CK$ :

$$0 \leq z_4 \leq 2,0 \text{ м};$$

$$M_{CK} = 5 \cdot (1,5 + z_4) + H_A \cdot 4 - R_A z_4 - 6 =$$

$$= 5 \cdot (1,5 + z_4) + 3,5625 \cdot 4 - 12,875 z_4 - 6 \Big|_{z=0} = 15,75 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_{z=2} = 0;$$

– участок  $LD$ :

$$0 \leq z_5 \leq 1,0 \text{ м};$$

$$M_{LD} = q z_5 \cdot \frac{z_5}{2} = 20 \frac{z_5^2}{2} \Big|_0 = 0 \Big|_1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– участок  $DK$ :

$$0 \leq z_6 \leq 2,0 \text{ м};$$

$$M_{DK} = -R_B z_6 + H_B \cdot 4 + q \frac{(1 + z_6)^2}{2} =$$

$$= -52,125 z_6 + 3,5625 \cdot 4 + 20 \frac{(1 + z_6)^2}{2} \Big|_0 = -24,25 \text{ кН} \cdot \text{м} \Big|_2 = 0.$$

Проверяем равновесие моментов в узлах  $C$  и  $D$  (рисунок 4.3,  $з$ ): сумма изгибающих моментов в узле должна быть равна нулю. Условия равновесия в узлах выполняются, следовательно, эпюра  $M$  построена правильно.

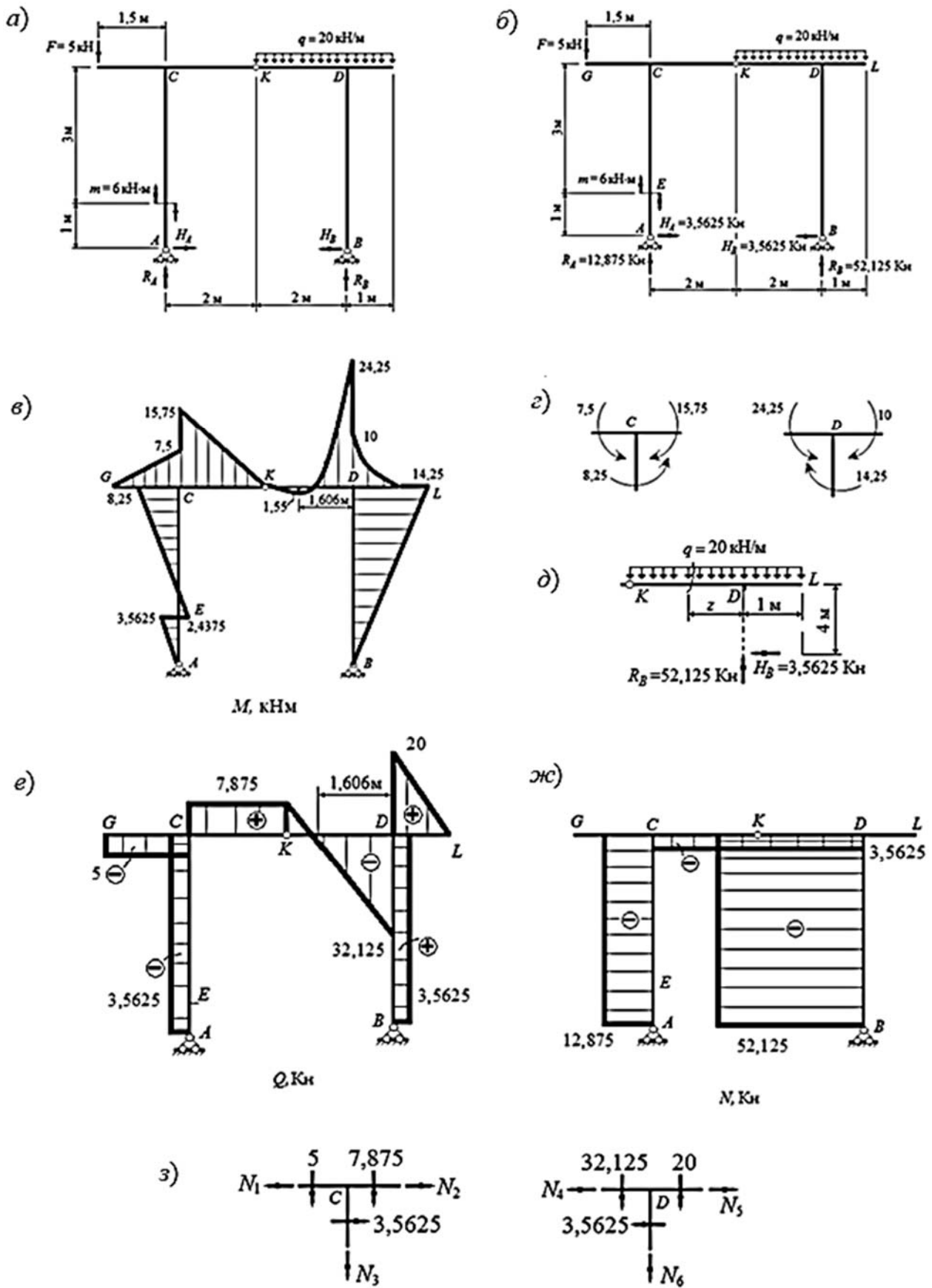


Рисунок 4.3 – Расчет трехшарнирной рамы (пример 1)

Расчет ординат эпюры  $Q$  можно также выполнить, используя формулу Журавского (2.1). Знаки ординат эпюры  $M$  определяются с учетом правила знаков, применяемого для балок: растянуто верхнее (горизонтальные стержни) и левое (вертикальные стержни) волокно – знак минус:

$$Q_{AE} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{-3,5625 - 0}{1} = -3,5625 \text{ кН};$$

$$Q_{EC} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{-8,25 - 2,4375}{3} = -3,5625 \text{ кН};$$

$$Q_{GC} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{-7,5 - 0}{1,5} = -5 \text{ кН};$$

$$Q_{CK} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{0 - (-15,75)}{2} = 7,875 \text{ кН};$$

$$Q_{KD} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{-24,25 - 0}{2} \pm \frac{20 \cdot 2}{2} = -12,125 \pm 20 \text{ кН};$$

$$Q_K = -12,125 + 20 = 7,875 \text{ кН}; \quad Q_D = -12,125 - 20 = -32,125 \text{ кН};$$

$$Q_{DL} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{0 - (-10)}{1} \pm \frac{20 \cdot 1}{2} = 10 \pm 10 \text{ кН};$$

$$Q_D = 10 + 10 = 20 \text{ кН}; \quad Q_L = 10 - 10 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_{LB} = \frac{M_{справа} - M_{слева}}{l} = \frac{0 - (-14,25)}{4} = 3,5625 \text{ кН}.$$

Строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рисунок 4.3, *е*).

На участке  $KD$  наблюдаем изменение знака эпюры  $Q$ , т. е. в сечении, где  $Q = 0$ , изгибающий момент принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение. Проведем исследование на экстремум  $M$  на данном участке:

а) определим координату сечения, где  $Q$  равно нулю. Запишем, а затем приравняем нулю уравнение поперечной силы на участке  $KD$  в сечении с координатой  $z$  (рисунок 4.3, *д*);

б) определим экстремальное значение момента в сечении с координатой  $z = 1,606$  м (в уравнении изгибающего момента знаки проставляются так, как они приняты для балки: плюс, если по отношению к сечению с координатой  $z = 1,606$  м сжато верхнее волокно, минус – если сжато нижнее волокно).

$$Q_{KD} = -52,125 + 20(1+z) = 0; \quad z = 1,606 \text{ м};$$

$$M_{\text{экстр}} = 52,125 \cdot 1,606 - 3,5625 \cdot 4 - 20 \frac{(1+1,606)^2}{2} = 1,55 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим продольные силы  $N$  методом вырезания узлов  $C$  и  $D$  (рисунок 4.3, з, ж). Поскольку со стороны консоли не действует никаких продольных сил, усилия  $N_1$  и  $N_5$  равны нулю:

– узел  $C$ :

$$\sum y = 0: N_3 + 5 + 7,875 = 0;$$

$$N_3 = -12,875 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0: -N_1 + 3,5625 + N_2 = 0;$$

$$N_1 = 0; \quad N_2 = -3,5625 \text{ кН};$$

– узел  $D$ :

$$\sum y = 0: -N_6 - 32,125 - 20 = 0;$$

$$N_6 = -52,125 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0: -N_4 + N_5 - 3,5625 = 0;$$

$$N_4 = 0; \quad N_5 = 3,5625 \text{ кН}.$$

**Пример 2** – Построить эпюры распределения внутренних силовых факторов для заданной рамы (рисунок 4.4, а).

*Решение*

Данная рама является трехшарнирной системой с двумя опорными шарнирами  $A$  и  $B$  и ключевым шарниром  $III$ . Причем опорные шарниры расположены не на одном уровне. Таким образом, опорные реакции можно найти из совместного рассмотрения системы уравнений статики:

$$\sum M_A = P_3 \cdot 3 + M + q \cdot 2 \cdot 3 - V_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = 0;$$

$$15 \cdot 3 + 6 + 10 \cdot 2 \cdot 3 - V_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = 111 - V_B \cdot 4 - H_B \cdot 3 = 0;$$

$$\sum M_B = M - q \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = 0;$$

$$6 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = -14 - V_A \cdot 4 + H_A \cdot 3 = 0;$$

$$\sum M_{III}^{лев.} = M - P \cdot 2 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = 0;$$

$$6 - 15 \cdot 2 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = -24 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 5 = 0;$$

$$\sum M_{III}^{праб.} = q \cdot 2 \cdot 1 - V_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 0;$$

$$10 \cdot 2 \cdot 1 - V_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 20 - V_B \cdot 2 + H_B \cdot 2 = 0;$$

$$\begin{cases} -4 \cdot V_A + 3 \cdot H_A = 14; & V_A = 0,14 \text{ кН}; \\ -2 \cdot V_A + 5 \cdot H_A = 24; & H_A = 4,86 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot V_B + 3 \cdot H_B = 111; & \rightarrow V_B = 20,14 \text{ кН}; \\ -2 \cdot V_B + 2 \cdot H_B = -20; & H_B = 10,14 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверка (рисунок 4.4, б):

$$\sum x = 0: -H_A + P - H_B = -4,86 + 15 - 10,14 = 0;$$

$$\sum y = 0: -V_A - q \cdot 2 + V_B = -0,14 - 10 \cdot 2 + 20,14 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рисунок 4.4, в):

$$M_{AC}^A = 0; \quad M_{AC}^C = H_A \cdot 3 = 4,86 \cdot 3 = 14,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DC}^D = H_A \cdot 5 - P \cdot 2 = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{AC}^A = 0; \quad M_{AC}^C = H_A \cdot 3 = 4,86 \cdot 3 = 14,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DC}^D = H_A \cdot 5 - P \cdot 2 = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DIII}^D = H_A \cdot 5 - V_A \cdot 2 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{AC}^A = 0; \quad M_{AC}^C = H_A \cdot 3 = 4,86 \cdot 3 = 14,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DC}^D = H_A \cdot 5 - P \cdot 2 = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 = -5,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DIII}^D = H_A \cdot 5 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 15 \cdot 2 + 6 = 0,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{DIII}^{III} = H_A \cdot 5 - V_A \cdot 2 - P \cdot 2 + M = 4,86 \cdot 5 - 0,14 \cdot 2 - 15 \cdot 2 + 6 = 0;$$

$$M_{BE}^B = 0; \quad M_{BE}^E = -H_B \cdot 2 = -10,14 \cdot 2 = -20,28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EIII}^E = -H_B \cdot 2 = -10,14 \cdot 2 = -20,28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EIII}^{III} = -H_B \cdot 2 + V_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -10,14 \cdot 2 + 20,14 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

Согласно заданной схеме, узел  $D$  уравнивается внешним моментом  $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Строим эпюру поперечных сил  $Q$ , используя формулу Журавского (рисунок 4.4,  $z$ ):

$$Q_{AC} = \frac{14,58 - 0}{3} = 4,86 \text{ кН}; \quad Q_{CD} = \frac{-5,7 - 14,58}{2} = -10,14 \text{ кН};$$

$$Q_{DIII} = \frac{0 - 0,3}{2} = -0,14 \text{ кН}; \quad Q_{BE} = \frac{20,28 - 0}{2} = 10,14 \text{ кН};$$

$$Q_{III E} = \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{-20,28 - 0}{2} = \pm 10 - 10,14 \text{ кН};$$

$$Q_{III E}^{III} = 10 - 10,14 = -0,14 \text{ кН}; \quad Q_{III E}^E = -10 - 10,14 = -20,14 \text{ кН}.$$

Способом вырезания узлов (рисунок 4.4,  $д$ ) из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил (рисунок 4.4,  $е$ ):

– узел  $D$ :

$$\sum x = 0: 10,14 + N_{DE} = 0; \quad N_{DE} = -10,14 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0: 0,14 - N_{DA} = 0; \quad N_{DA} = 0,14 \text{ кН};$$

– узел  $E$ :

$$\sum x = 0: -10,14 + N_{ED} = 0; \quad N_{ED} = 10,14 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0: -20,14 - N_{EB} = 0; \quad N_{EB} = -20,14 \text{ кН}.$$

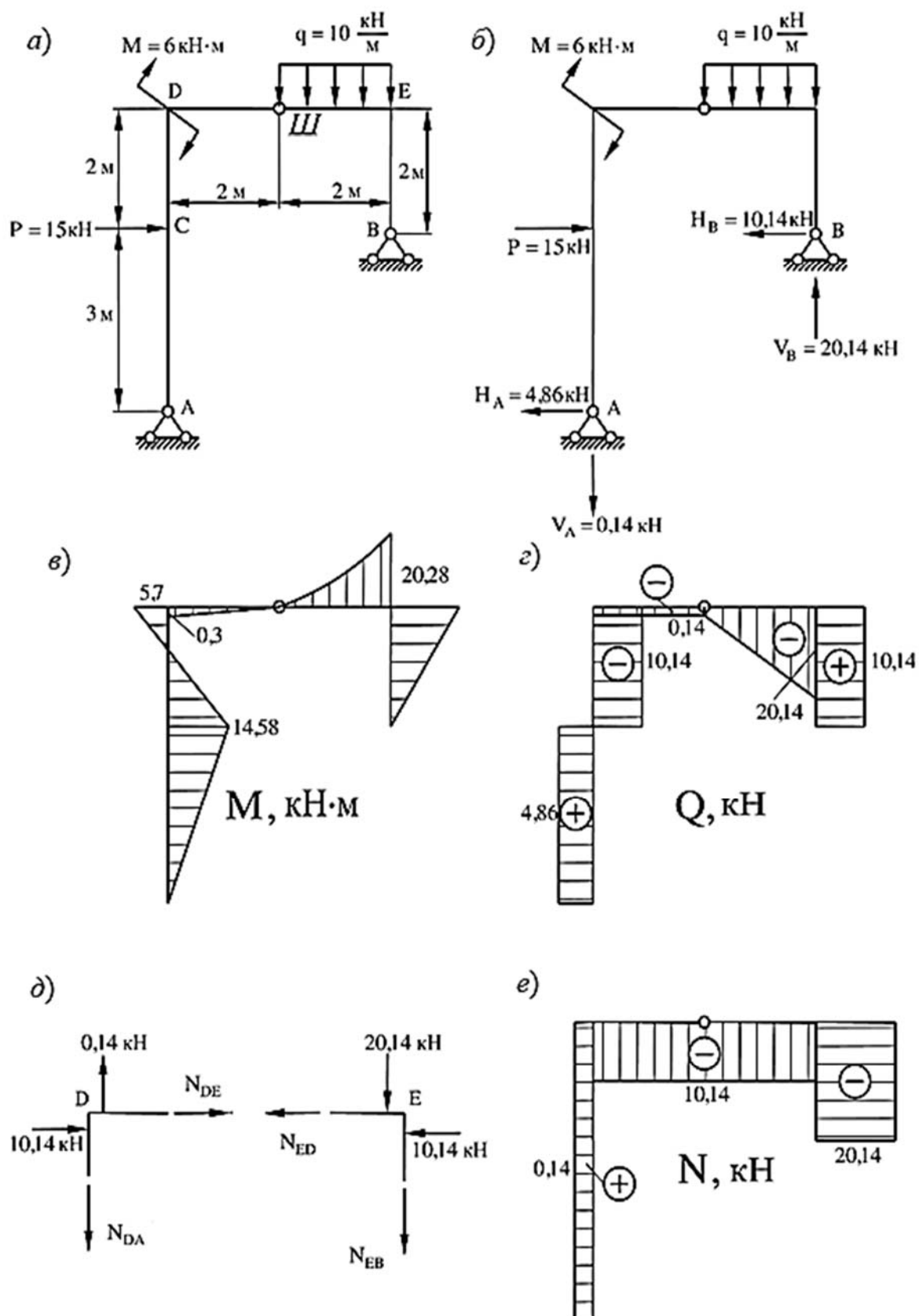


Рисунок 4.4 – Расчет трехшарнирной рамы (пример 2)

### Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 4.5 приведены схемы нагрузки трехшарнирных рам для самостоятельной подготовки.

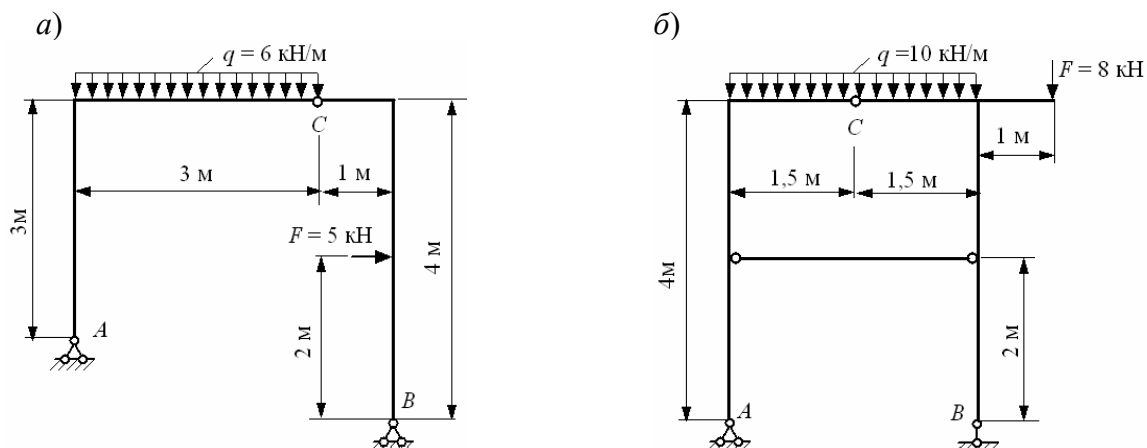


Рисунок 4.5 – К расчету трехшарнирных рам

## 5 Расчет плоских ферм

**Пример 1** – Для шпренгельной фермы (рисунок 5.1) необходимо во всех стержнях второй панели справа аналитически определить усилия от действия заданной нагрузки; построить для этих стержней линии влияния и определить по ним усилия в стержнях.

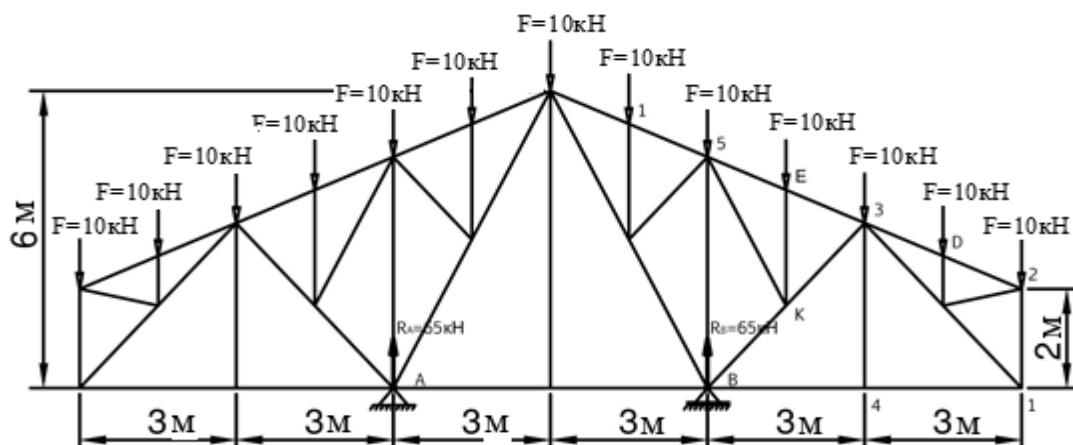


Рисунок 5.1 – К расчету плоской фермы

*Решение*

Определяем реакции в опорах фермы:

$$\sum M_A = -F \cdot (1,5 + 3 + 4,5 + 6) + F \cdot (1,5 + 3 + 4,5 + 6 + 7,5 + 9 + 10,5 + 12) - R_B \cdot 6 = 0;$$



$$R_B = R_A = 65 \text{ кН.}$$

Рассмотрим равновесие правой отсеченной части основной фермы относительно сечения I–I (рисунок 5.3, а) и определим усилия в стержнях первого типа.

Прежде чем определять усилия в стержнях заданной панели, необходимо установить, к какому типу относится каждый из исследуемых стержней. Для этого рассмотрим отдельно основную ферму и шпренгель.

Основная ферма представлена на рисунке 5.2. Определим усилия во всех стержнях ее второй панели, считая справа.

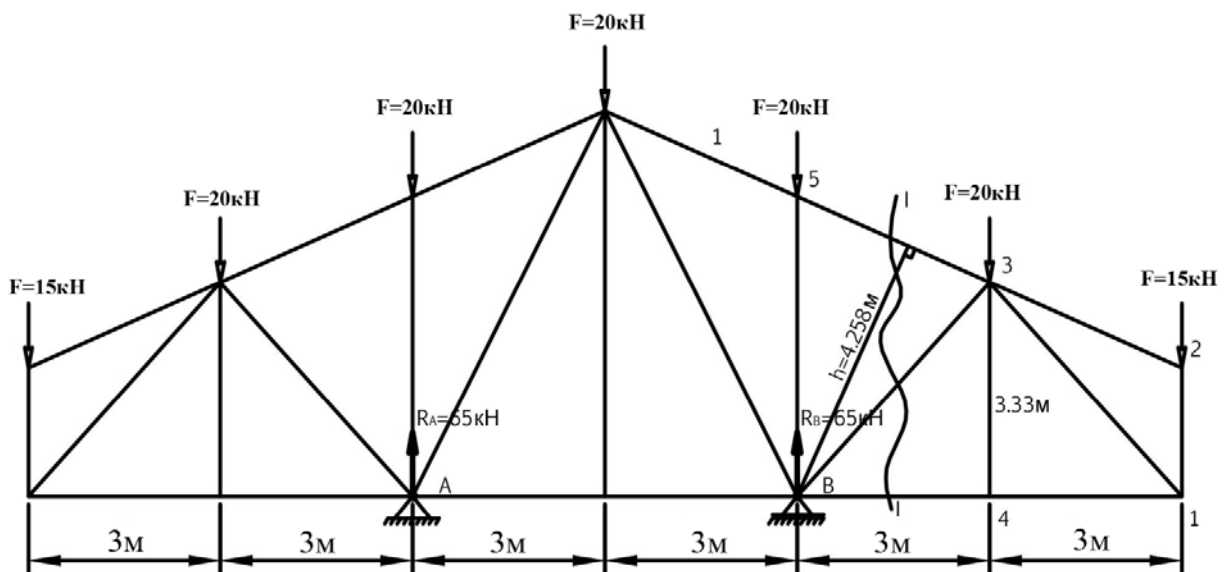


Рисунок 5.2 – Основная ферма

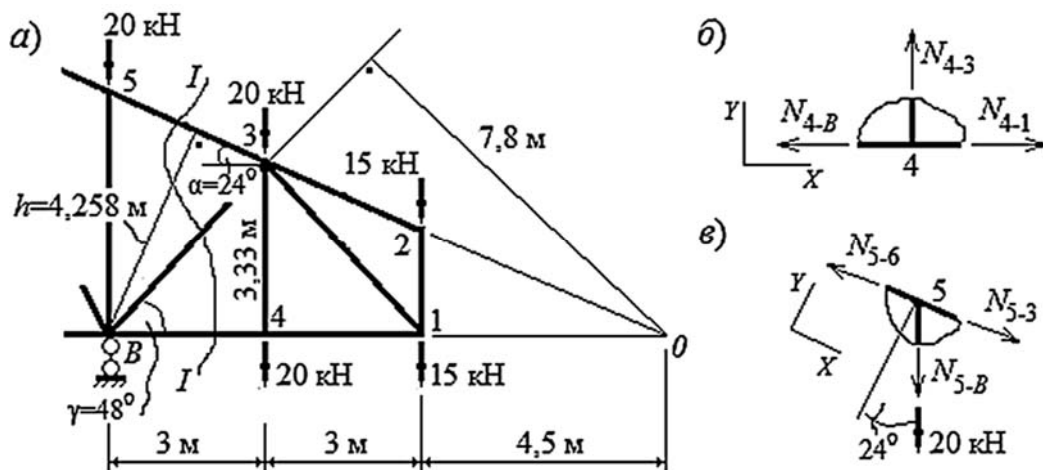


Рисунок 5.3 – К определению усилий в стержнях плоской фермы от действия заданной нагрузки

Определим методом моментной точки усилия в стержнях 3–5, 3–В, В–4:

$$\sum M_B = 20 \cdot 3 + 15 \cdot 6 - N_{3-5} \cdot 4,258 = 0; \quad N_{3-5} = 35,228 \text{ кН;}$$

$$\sum M_O = -20 \cdot 7,5 - 15 \cdot 4,5 - N_{3-B} \cdot 7,8 = 0; \quad N_{3-B} = -27,88 \text{ кН};$$

$$\sum M_3 = 15 \cdot 3 - N_{B-4} \cdot 3,33 = 0; \quad N_{B-4} = 13,51 \text{ кН}.$$

Усилия в стержнях 3–B и B–4 могут быть определены и методом проекций при значениях углов  $\alpha = 24^\circ$ ,  $\gamma = 48^\circ$ :

$$\sum Y = -20 - 15 + 35,228 \cdot \sin \alpha - N_{3-B} \cdot \sin \gamma = 0; \quad N_{3-B} = -27,88 \text{ кН};$$

$$\sum X = -N_{3-5} \cdot \cos \alpha - N_{3-B} \cdot \cos \gamma + N_{B-4} = 0; \quad N_{B-4} = 13,51 \text{ кН}.$$

Найдем усилия в стержнях 4–3, 5–B методом вырезания узлов (рисунки 5.3, б, в):

$$\sum Y = N_{4-3} = 0; \quad \sum Y = 20 \cdot \cos 24^\circ + N_{5-B} \cdot \cos 24^\circ = 0; \quad N_{5-B} = -20 \text{ кН}.$$

Рассмотрим шпренгель (рисунок 5.4) и определим усилия в стержнях второго типа K–E, K–5, 3–E:

$$\sum M_5 = -5 \cdot 3 - N_{K-E} \cdot 1,5 = 0; \quad N_{K-E} = -10 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = 5 \cdot 1,5 + N_{K-5} \cdot 1,04 = 0; \quad N_{K-5} = -7,21 \text{ кН};$$

$$\sum M_K = -5 \cdot 1,5 - N_{3-E} \cdot 2,13 = 0; \quad N_{3-E} = -3,52 \text{ кН}.$$

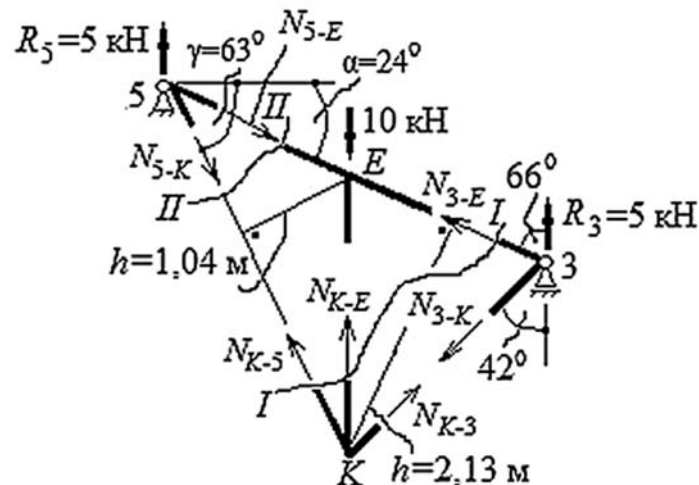


Рисунок 5.4 – К определению усилий в стержнях плоской фермы от действия заданной нагрузки

Усилие в стержне 5–E определяется методом проекций ( $\alpha = 24^\circ$ ,  $\gamma = 63^\circ$ ):

$$\sum Y = -5 - N_{5-E} \cdot \sin \alpha - N_{5-K} \cdot \sin \gamma = 0; \quad N_{5-E} = -3,52 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне 3–K определяется методом вырезания узла (узел 3):

$$\sum Y = 5 + N_{3-E} \cdot \cos 66^\circ - N_{3-K} \cdot \cos 42^\circ = 0; \quad N_{3-K} = 4,80 \text{ кН.}$$

Определяем усилия в стержнях третьей категории 5–3 и 3–B:

$$N_{5-3} = N_{3-5} + N_{5-E} = 35,228 - 3,520 = 31,708 \text{ кН;}$$

$$N_{B-3} = N_{3-B} + N_{K-3} = -27,88 + 4,80 = -23,08 \text{ кН.}$$

**Пример 2 (для самостоятельного решения)** – Определить усилия в выделенных стержнях, а также построить для них линии влияния (рисунок 5.5).

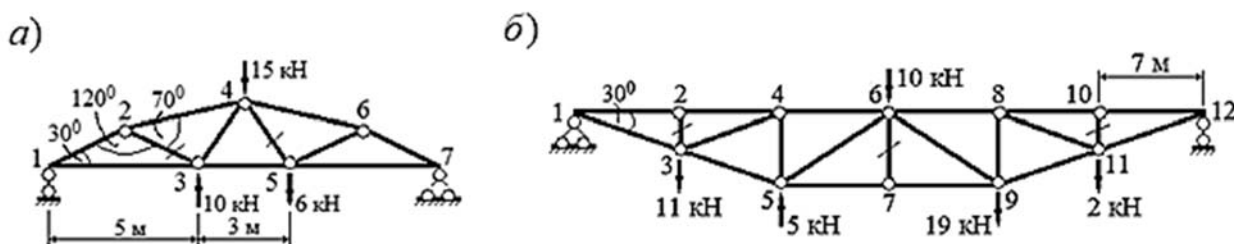


Рисунок 5.5 – К расчету плоской фермы

### Контрольные вопросы

- 1 Что такое ферма? Классификация ферм.
- 2 В чем принципиальное отличие при расчете ферм с жесткими и шарнирными узлами?
- 3 Какого рода деформации испытывают стержни фермы при узловом приложении внешних нагрузок?
- 4 Перечислите основные аналитические методы определения усилий в стержнях фермы и особенности их применения.
- 5 Как строятся линии влияния в зависимости от расположения ездового пояса фермы?
- 6 Дайте определение шпренгельной ферме и поясните назначение шпренгелей.
- 7 В чем состоит особенность расчета шпренгельных ферм?
- 8 Дайте определение термину «передаточная прямая».
- 9 Особенности построения линий влияния в стержнях шпренгельных ферм.
- 10 Как определяются усилия по линиям влияния от действия неподвижных нагрузок?

## 6 Основные теоремы строительной механики и определение перемещений

**Пример 1** – Для заданной балки определить прогиб и угол поворота в промежуточном шарнире  $B$  (рисунок 6.1,  $a$ ).

*Решение*

Разобьем балку на две части для определения реакций на опорах (рисунок 6.1,  $b$ ). Грузовая эпюра изгибающих моментов  $M_F$  показана на рисунке 6.1,  $в$ .

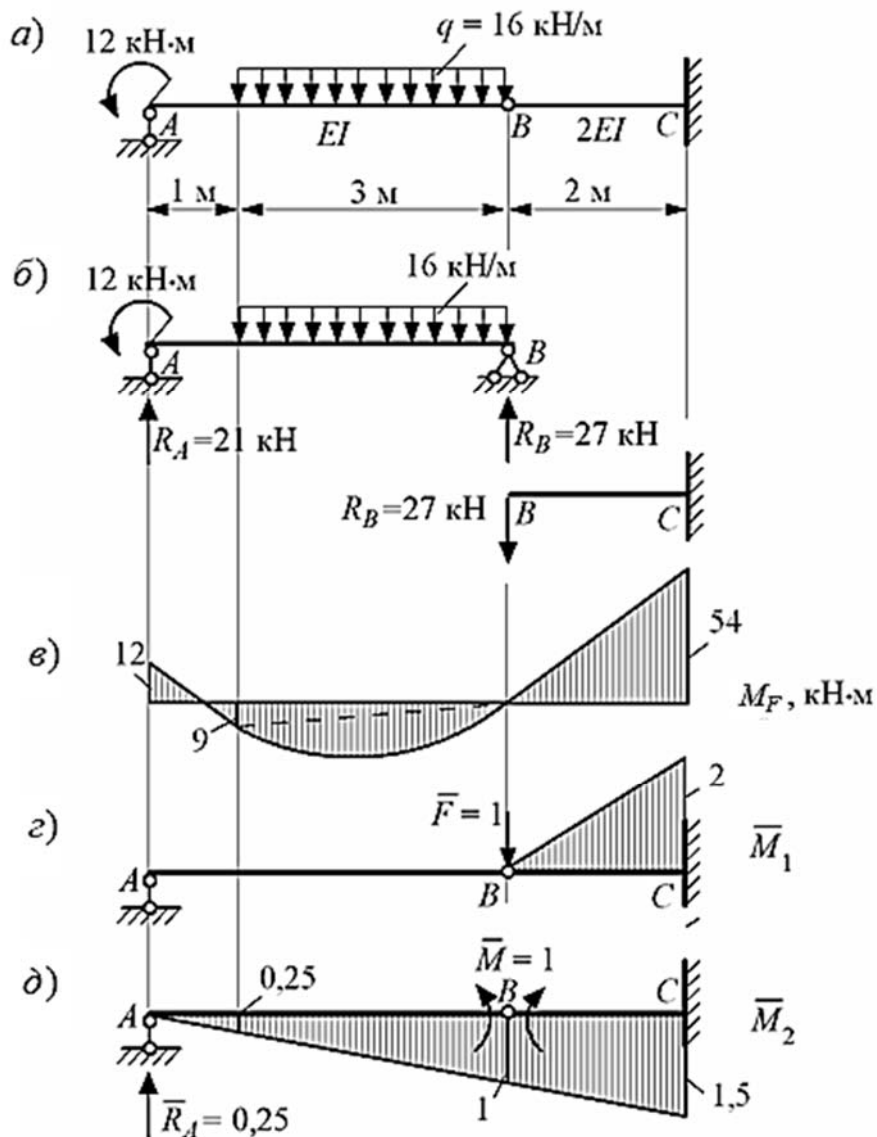


Рисунок 6.1 – К определению прогиба и угла поворота шарнира

Для определения прогиба в шарнире  $B$  составим вспомогательную систему (рисунок 6.1,  $з$ ), для которой построим единичную эпюру  $\bar{M}_1$ .

Определим прогиб по способу Верещагина, перемножив грузовую и единичную эпюры:

$$y_B = \sum \frac{\omega_P y_c}{EI} = \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} 54 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 \right) = \frac{36}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Направление прогиба совпадает с направлением единичной силы.

Для определения угла поворота в шарнире  $B$  составим вспомогательную систему (рисунок 6.1,  $д$ ), для которой построим единичную эпюру  $\bar{M}_2$ . Для перемножения эпюр  $M_F$  и  $\bar{M}_2$  балку разобьем на три участка. Воспользуемся формулой трапеции, представив треугольник как трапецию с нулевой стороной:

$$\begin{aligned} \theta_B = \frac{1}{EI} & \left( \frac{1}{6} (2 \cdot 9 \cdot 0,25 - 12 \cdot 0,25) + \frac{3}{6} (2 \cdot 9 \cdot 0,25 + 9 \cdot 1) + \frac{16 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{0,25 + 1}{2} \right) - \\ & - \frac{1}{2EI} \left( \frac{2}{6} (2 \cdot 54 \cdot 1,5 + 1 \cdot 54) \right) = -\frac{6,5}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Знак минус означает, что направление угла поворота на промежуточном шарнире  $B$  не совпало с направлением единичного момента.

**Пример 2 (для самостоятельного решения)** – Для балки, показанной на рисунке 6.2,  $а$ , определить вертикальное перемещение и угол поворота для точки  $C$ . Для рамы, показанной на рисунке 6.2,  $б$ , определить вертикальное, горизонтальное перемещение и угол поворота для точки  $C$ .

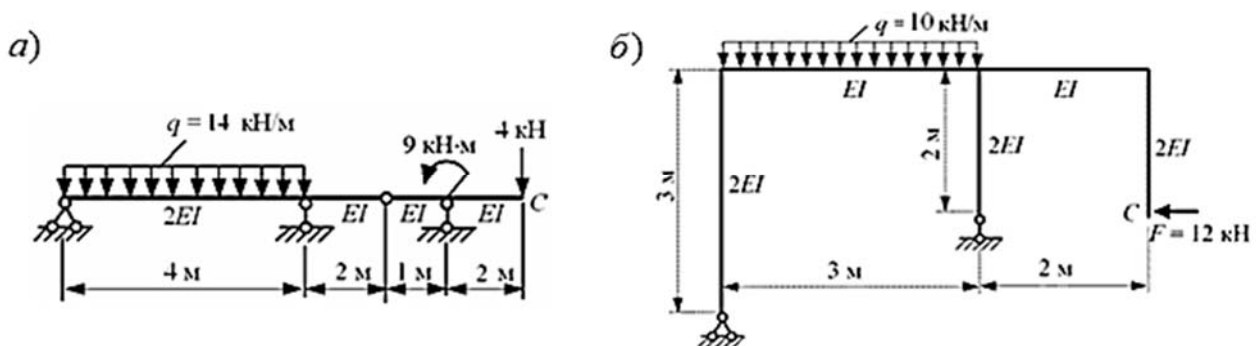


Рисунок 6.2 – К определению прогиба и угла поворота сечений

### **Контрольные вопросы**

- 1 Как определяется действительная работа внешних и внутренних сил?
- 2 Как определяется потенциальная энергия деформаций системы?
- 3 Работа внутренних и внешних сил на обобщенных перемещениях. Теорема взаимности работ. Теорема взаимности перемещений.
- 4 Определение перемещений упругих систем. Интеграл Мора. Формула Симпсона. Способ Верещагина.

### **Список литературы**

- 1 **Дарков, А. В.** Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 12-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2020. – 656 с.: ил.
- 2 **Смирнов, В. А.** Строительная механика: учебник / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий ; под ред. В. А. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2018. – 423 с.
- 3 **Гонорова, С. В.** Строительная механика. Пособие по решению задач : учеб.-метод. пособие / С. В. Гонорова ; под общ. ред. И. М. Кузменко. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – 280 с.: ил.
- 4 **Шапошников, Н. Н.** Строительная механика: учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков; под общ. ред. Н. Н. Шапошникова. – 13-е изд., перераб. и доп. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2017. – 692 с.: ил.