

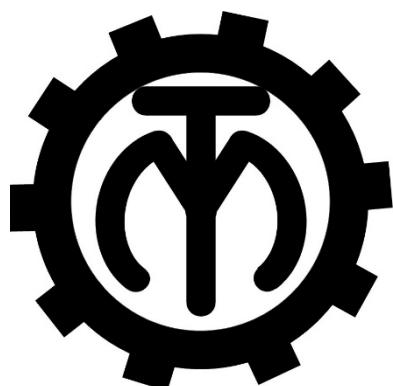
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технология машиностроения»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство
зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление
недвижимостью» дневной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2025

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С86

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технология машиностроения» «28» октября 2025 г.,
протокол № 3

Составители: ст. преподаватель В. А. Кемова
канд. техн. наук, доц. И. М. Кузменко

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. С. Федосенко

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью» дневной и заочной форм обучения содержат материалы для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям и контрольным работам, перечень рекомендуемой литературы.

Учебное издание

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Ответственный за выпуск	В. М. Шеменков
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2025

Содержание

Введение.....	4
1 Метод сил и его применение к расчету плоских рам.....	5
2 Расчет неразрезных балок.....	11
3 Метод перемещений и его применение к расчету плоских рам.....	16
4 Расчет статически неопределеных ферм.....	20
5 Устойчивость стержневых систем.....	23
6 Колебания системы с одной степенью свободы.....	26
Список литературы.....	28
Приложение А	29
Приложение Б	30
Приложение В	30
Приложение Г	31

Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой по курсу «Строительная механика» для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» и 6-05-0732-02 «Экспертиза и управление недвижимостью».

Целью изучения дисциплины «Строительная механика» является получение студентами знаний, необходимых для проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции инженерных сооружений. Задачей учебной дисциплины является умение определять внутренние усилия в элементах статически определимых и неопределенных систем от действия статических и динамических нагрузок, раскрывать статическую неопределенность методом сил и методом перемещений, строить линии влияния для простейших сооружений, расчитывать стержневые системы на действие динамических нагрузок и устойчивость.

По каждой теме приводятся один или несколько примеров с их подробным решением, примеры для самостоятельного решения, вопросы для самопроверки. В краткой форме изложены основные теоретические положения по выполнению типовых задач, приведены примеры решения, а также список литературы, которую рекомендуется изучить студенту перед началом выполнения индивидуальных заданий.

1 Метод сил и его применение к расчету плоских рам

Пример 1 – Построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил для заданной статически неопределенной рамы методом сил (рисунок 1.1, a).

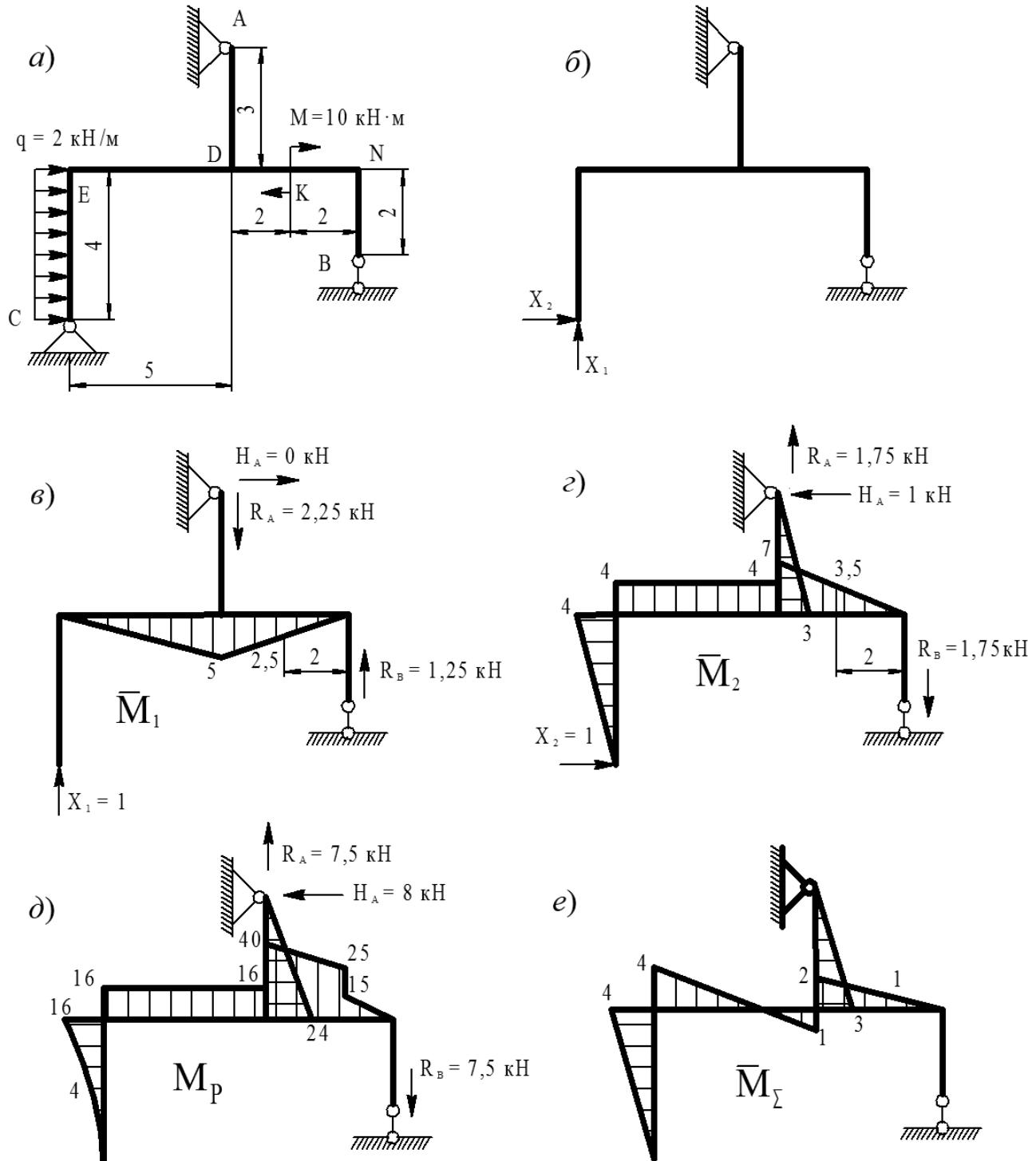
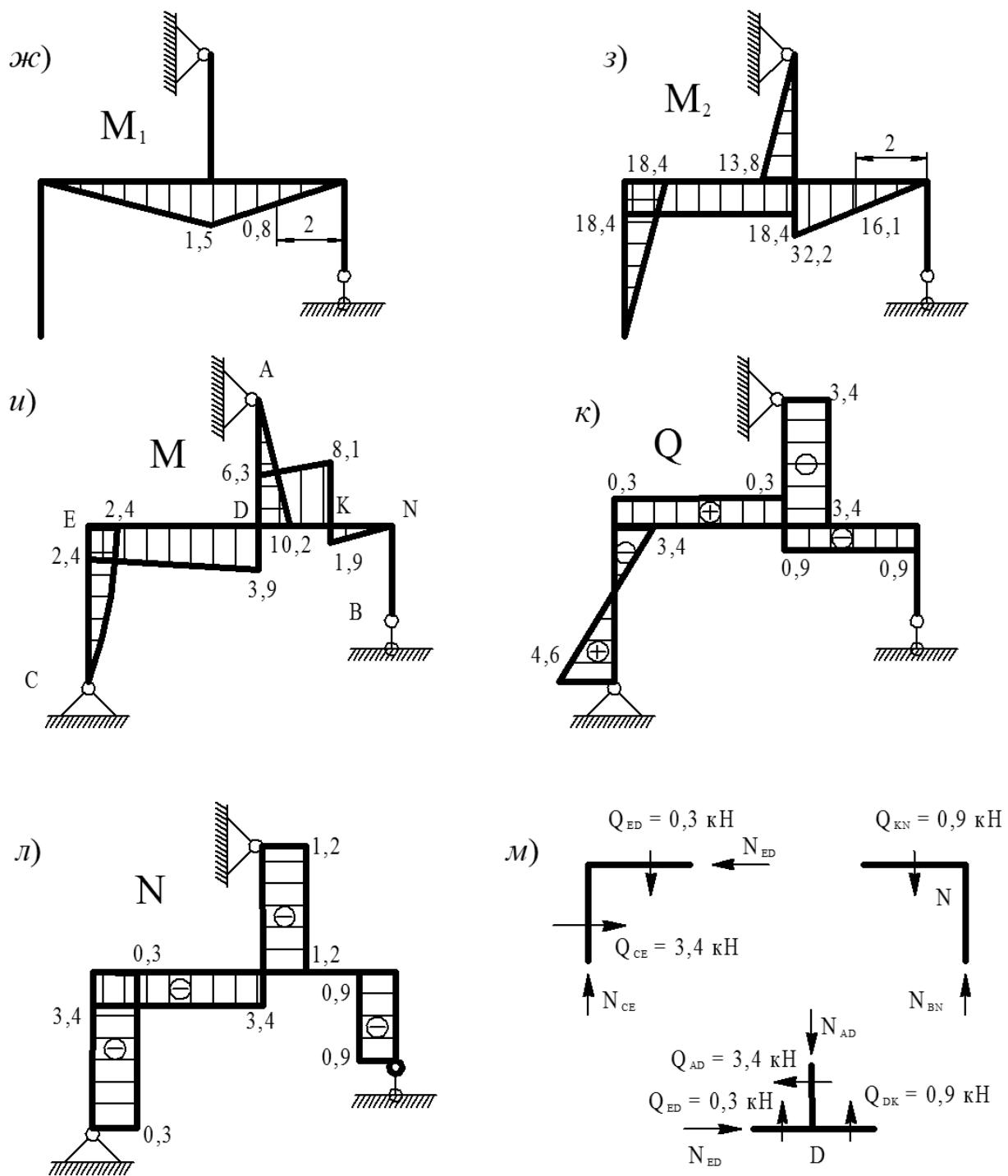


Рисунок 1.1 – К расчету статически неопределенной рамы методом сил



Окончание рисунка 1.1

Решение

Определяем степень статической неопределенности системы:

$$n = C_0 + 2 \cdot III - 3 \cdot I\!D = 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Выбираем основную систему (рисунок 1.1, б) и составляем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0; \\ X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов канонических уравнений строим эпюры изгибающих моментов M_p (грузовую эпюру), \overline{M}_1 , \overline{M}_2 (от единичных сил) (рисунок 1.1, в–д). Определяем коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 5) \right) = \frac{75}{E \cdot I};$$

$$\delta_{22} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0) + \right.$$

$$+ \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4) + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 7 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7) +$$

$$\left. + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3) \right) = \frac{175,6}{E \cdot I};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 0 \cdot 5) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 7 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0) \right) = -\frac{96,7}{E \cdot I};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_1 \cdot M_P \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 16 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 16 - 16 \cdot 5 + 0 \cdot 16) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 40 \cdot 5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 25 - 5 \cdot 25 - 2,5 \cdot 40) \right) +$$

$$+ \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 15 \cdot 2,5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 2,5) = -\frac{475}{E \cdot I};$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{2P} = & \sum_0^L \frac{\overline{M}_2 \cdot M_P \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 16 + 4 \cdot 0 + 16 \cdot 0) - \right. \\
& - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 16 + 2 \cdot 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16 + 16 \cdot 4) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + \\
& + 2 \cdot 3 \cdot 24 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 3) + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 7 \cdot 40 + 2 \cdot 3,5 \cdot 25 + 40 \cdot 3,5 + 25 \cdot 7) + \\
& \left. + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 3,5 \cdot 15 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3,5 + 0 \cdot 15) \right) = \frac{841}{E \cdot I}.
\end{aligned}$$

Для проверки коэффициентов канонических уравнений строим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов (рисунок 1.1, e). Проверяем коэффициенты канонических уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum \delta_{ij} = & \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \sum_0^L \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + \right. \\
& + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4) + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 - 4 \cdot 1) + \\
& + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3) \left. \right) = \frac{57,2}{E \cdot I}; \\
\sum \Delta_{iP} = & \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \sum_0^L \frac{\overline{M}_\Sigma \cdot M_P \cdot dx}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 16 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 4) - \right. \\
& - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 16 - 2 \cdot 16 \cdot 1 - 1 \cdot 16 + 4 \cdot 16) + \\
& + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 24 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 24 \cdot 0) + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 15 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 1 \cdot 0) + \\
& \left. + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 40 \cdot 2 + 2 \cdot 25 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 25 \cdot 2) \right) = \frac{366}{E \cdot I}.
\end{aligned}$$

Преобразуем и решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} X_1 \cdot 75 - X_2 \cdot 96,7 = 475; \\ -X_1 \cdot 96,7 + X_2 \cdot 175,6 = -841; \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0,3 \text{ кН}; \\ X_2 = -4,6 \text{ кН}. \end{cases}$$

Умножаем каждую единичную эпюру на соответствующее значение силы X_i ($M_1 = \overline{M}_1 \cdot X_1$, $M_2 = \overline{M}_2 \cdot X_2$) (рисунок 1.1, ж, з). Строим итоговую эпюру изгибающих моментов $M = M_1 + M_2 + M_p$ (рисунок 1.1, и). Строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 1.1, к):

$$Q_{CE} = \frac{0 - (-2,4)}{4} \pm \frac{2 \cdot 4}{2} = 0,6 \pm 4 \text{ кН};$$

$$Q_{CE}^C = 0,6 + 4 = 4,6 \text{ кН}; \quad Q_{CE}^E = 0,6 - 4 = -3,4 \text{ кН};$$

$$Q_{ED} = \frac{3,9 - 2,4}{5} = 0,3 \text{ кН}; \quad Q_{AD} = \frac{-10,2 - 0}{3} = -3,4 \text{ кН};$$

$$Q_{DK} = \frac{-8,1 - (-6,3)}{2} = -0,9 \text{ кН}; \quad Q_{KN} = \frac{0 - 1,9}{2} = -0,9 \text{ кН.}$$

Способом вырезания узлов (рисунок 1.1, м) из эпюры поперечных сил строим эпюру продольных сил N (рисунок 1.1, л):

– узел E :

$$\sum X = 0; \quad Q_{CE} - N_{ED} = 0; \quad N_{ED} = 3,4 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad -Q_{KN} + N_{EN} = 0; \quad N_{CE} = 0,3 \text{ кН};$$

– узел N :

$$\sum Y = 0; \quad N_{CE} - Q_{ED} = 0; \quad N_{EN} = 0,9 \text{ кН};$$

– узел D :

$$\sum X = 0; \quad N_{ED} - Q_{AD} = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_{ED} + Q_{DK} - N_{AD} = 0; \quad N_{AD} = 1,2 \text{ кН.}$$

Знаки на эпюре N проставлены согласно правилу знаков.

Выполняем статическую проверку:

$$\sum X = 2 \cdot 4 - 4,6 - 3,4 = 0; \quad \sum Y = 0,3 + 0,9 - 1,2 = 0.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил для заданной статически неопределенной рамы методом сил (рисунок 1.2, а, б).

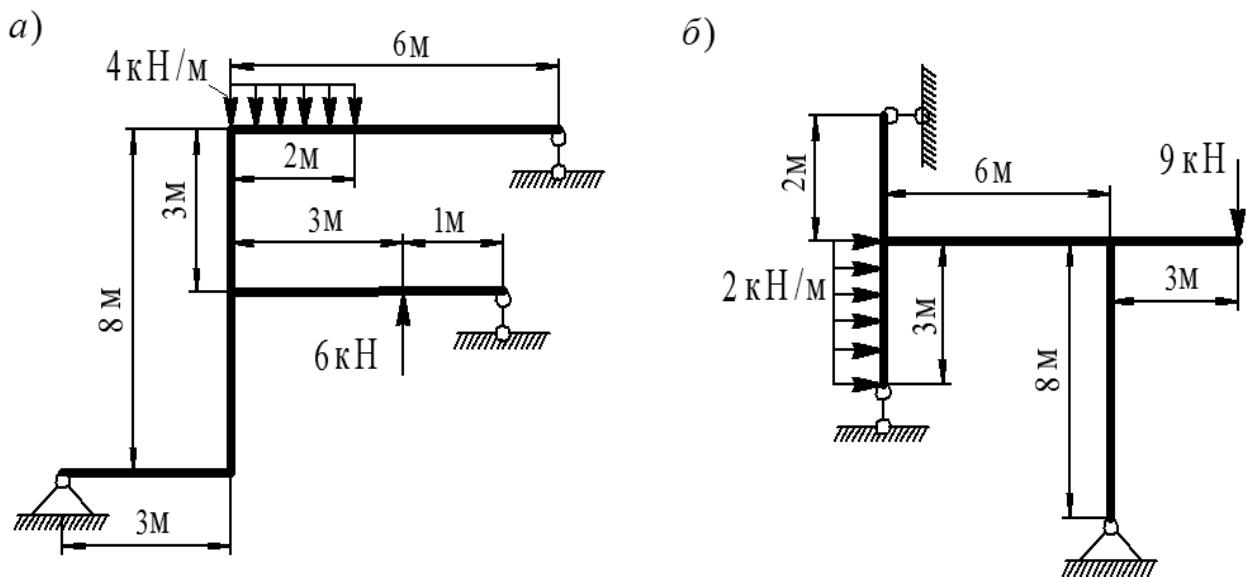


Рисунок 1.2 – К расчету статически неопределенных рам методом сил

Контрольные вопросы

- 1 Что называется статически неопределенной системой?
- 2 Свойства статически неопределенных систем и методы их расчета. Сущность метода сил.
- 3 Что такое основная и эквивалентная системы?
- 4 Алгоритм расчета статически неопределенных рам методом сил.
- 5 Физический смысл канонических уравнений метода сил и кинематической проверки.
- 6 Какие существуют способы проверки коэффициентов канонических уравнений?
- 7 Какие системы называются симметричными?
- 8 Какое преимущество дает использование симметрии рамы?
- 9 В чем состоит способ группировки неизвестных?

2 Расчет неразрезных балок

Пример 1 – Для балки, представленной на рисунке 2.1, *a*, построить эпюры изгибающего момента M и поперечной силы Q от постоянной нагрузки с помощью уравнений трех моментов и эпюры изгибающих моментов M от последовательного загружения каждого пролета временной нагрузкой $q = 2 \text{ кН/м}$ при помощи метода фокусных отношений.

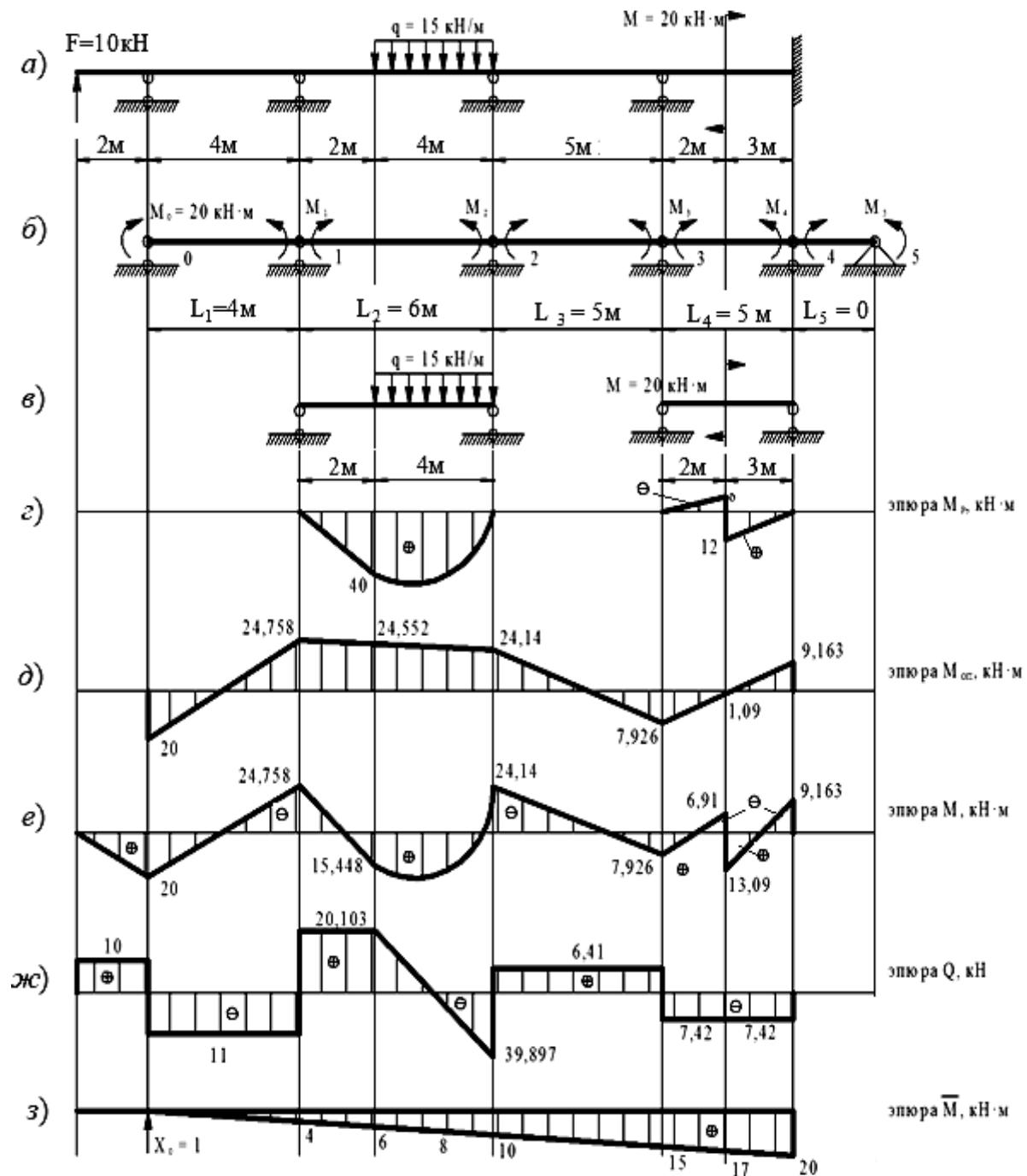


Рисунок 2.1 – К расчету статически неопределенных балок

Решение

Изображаем основную систему на рисунке 2.1, б. При этом консоль заменяем моментом $M_0 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$, заделку – шарнирными опорами с пролетом длиной нуль ($L_5 = 0$).

Составляем систему уравнений трех моментов:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \cdot L_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (L_1 + L_2) + M_2 \cdot L_2 = -6 \cdot \left(\frac{\omega_1 \cdot a_1}{L_1} + \frac{\omega_2 \cdot b_2}{L_2} \right); \\ M_1 \cdot L_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (L_2 + L_3) + M_3 \cdot L_3 = -6 \cdot \left(\frac{\omega_2 \cdot a_2}{L_2} + \frac{\omega_3 \cdot b_3}{L_3} \right); \\ M_2 \cdot L_3 + 2 \cdot M_3 \cdot (L_3 + L_4) + M_4 \cdot L_4 = -6 \cdot \left(\frac{\omega_3 \cdot a_3}{L_3} + \frac{\omega_4 \cdot b_4}{L_4} \right); \\ M_3 \cdot L_4 + 2 \cdot M_4 \cdot (L_4 + L_5) + M_5 \cdot L_5 = -6 \cdot \left(\frac{\omega_4 \cdot a_4}{L_4} + \frac{\omega_5 \cdot b_5}{L_5} \right). \end{array} \right.$$

Строим эпюры изгибающих моментов для однопролетных шарнирно опертых балок от действующих на них внешних сил M_P (рисунок 2.1, в, г).

$$\omega_2 \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{15 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 560 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$\omega_2 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{15 \cdot 4^3}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \right) = 640 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$\omega_4 \cdot b_4 = -\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 6,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$\omega_4 \cdot a_4 = -\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 + 2 \right) = 43,33 \text{ кН}\cdot\text{м}^3.$$

Подставляем полученные значения в систему уравнений трех моментов:

$$\left\{ \begin{array}{l} 20 \cdot 4 + 2 \cdot M_1 \cdot (4 + 6) + M_2 \cdot 6 = -6 \cdot \left(\frac{0}{4} + \frac{560}{6} \right); \\ M_1 \cdot 6 + 2 \cdot M_2 \cdot (6 + 5) + M_3 \cdot 5 = -6 \cdot \left(\frac{640}{6} + \frac{0}{5} \right); \\ M_2 \cdot 5 + 2 \cdot M_3 \cdot (5 + 5) + M_4 \cdot 5 = -6 \cdot \left(\frac{0}{5} + \frac{6,67}{5} \right); \\ M_3 \cdot 5 + 2 \cdot M_4 \cdot (5 + 0) + M_5 \cdot 0 = -6 \cdot \left(\frac{43,33}{5} + \frac{0}{0} \right). \end{array} \right.$$

Решаем систему уравнений: $M_1 = -24,758 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_2 = -24,14 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_3 = 7,296 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_4 = -9,163 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Строим эпюру опорных моментов M_{on} (рисунок 2.1, δ) и к ней прибавляем эпюру M_P (рисунок 2.1, ε), получая окончательную эпюру изгибающих моментов M для неразрезной балки (рисунок 2.1, e). По полученной эпюре M строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 2.1, \varkappa).

Для проверки правильности расчетов в основной системе метода сил для заданной балки строим единичную эпюру \bar{M} (рисунок 2.1, ζ). Перемножая эпюры \bar{M} и M , определяем перемещение опоры, которое должно равняться нулю:

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 4 \cdot 24,758 + 4 \cdot 20) + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 4 \cdot 24,758 + 2 \cdot 6 \cdot 15,448 + \right. \\ & + 15,448 \cdot 4 - 24,758 \cdot 6) + \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 6 \cdot 15,448 - 2 \cdot 10 \cdot 24,14 + 15,448 \cdot 10 - 24,14 \cdot 6) + \\ & + \frac{15 \cdot 4^3}{12} \cdot 8 + \frac{5}{6} \cdot (-2 \cdot 10 \cdot 24,14 + 2 \cdot 15 \cdot 7,926 - 15 \cdot 24,14 + 10 \cdot 7,926) + \\ & + \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 15 \cdot 7,926 - 2 \cdot 17 \cdot 6,91 - 15 \cdot 6,91 + 17 \cdot 7,926) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 17 \cdot 13,09 - \\ & \left. - 2 \cdot 20 \cdot 9,163 - 17 \cdot 9,163 + 20 \cdot 13,09) \right) \approx 0. \end{aligned}$$

Построим эпюры изгибающего момента M (рисунок 2.2, $a-e$) от последовательного загружения каждого пролета временной нагрузкой $q = 2$ кН/м для балки, изображенной на рисунке 2.2, a , при помощи метода фокусных отношений.

Определяем левые фокусные отношения:

$$\begin{aligned} k_1^{\text{I}} = & -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty; \quad k_2^{\text{I}} = 2 + \frac{L_1}{L_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_1^{\text{I}}} \right) = 2 + \frac{4}{6} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 3,33; \\ k_3^{\text{I}} = & 2 + \frac{L_2}{L_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_2^{\text{I}}} \right) = 2 + \frac{6}{5} \cdot \left(2 - \frac{1}{3,33} \right) = 4,04; \\ k_4^{\text{I}} = & 2 + \frac{L_3}{L_4} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_3^{\text{I}}} \right) = 2 + \frac{5}{5} \cdot \left(2 - \frac{1}{4,04} \right) = 3,75. \end{aligned}$$

Определяем правые фокусные отношения:

$$\begin{aligned} k_5^{\text{II}} = & -\frac{M_4}{M_5} = -\frac{M_4}{0} = \infty; \quad k_4^{\text{II}} = 2 + \frac{L_5}{L_4} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_5^{\text{II}}} \right) = 2 + \frac{0}{5} \cdot \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2; \\ k_3^{\text{II}} = & 2 + \frac{L_4}{L_3} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_4^{\text{II}}} \right) = 2 + \frac{5}{5} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3,5; \\ k_2^{\text{II}} = & 2 + \frac{L_3}{L_2} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_3^{\text{II}}} \right) = 2 + \frac{5}{6} \cdot \left(2 - \frac{1}{3,5} \right) = 3,43; \end{aligned}$$

$$k_1^{\text{II}} = 2 + \frac{L_2}{L_1} \cdot \left(2 - \frac{1}{k_2^{\text{II}}}\right) = 2 + \frac{6}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{3,43}\right) = 4,56.$$

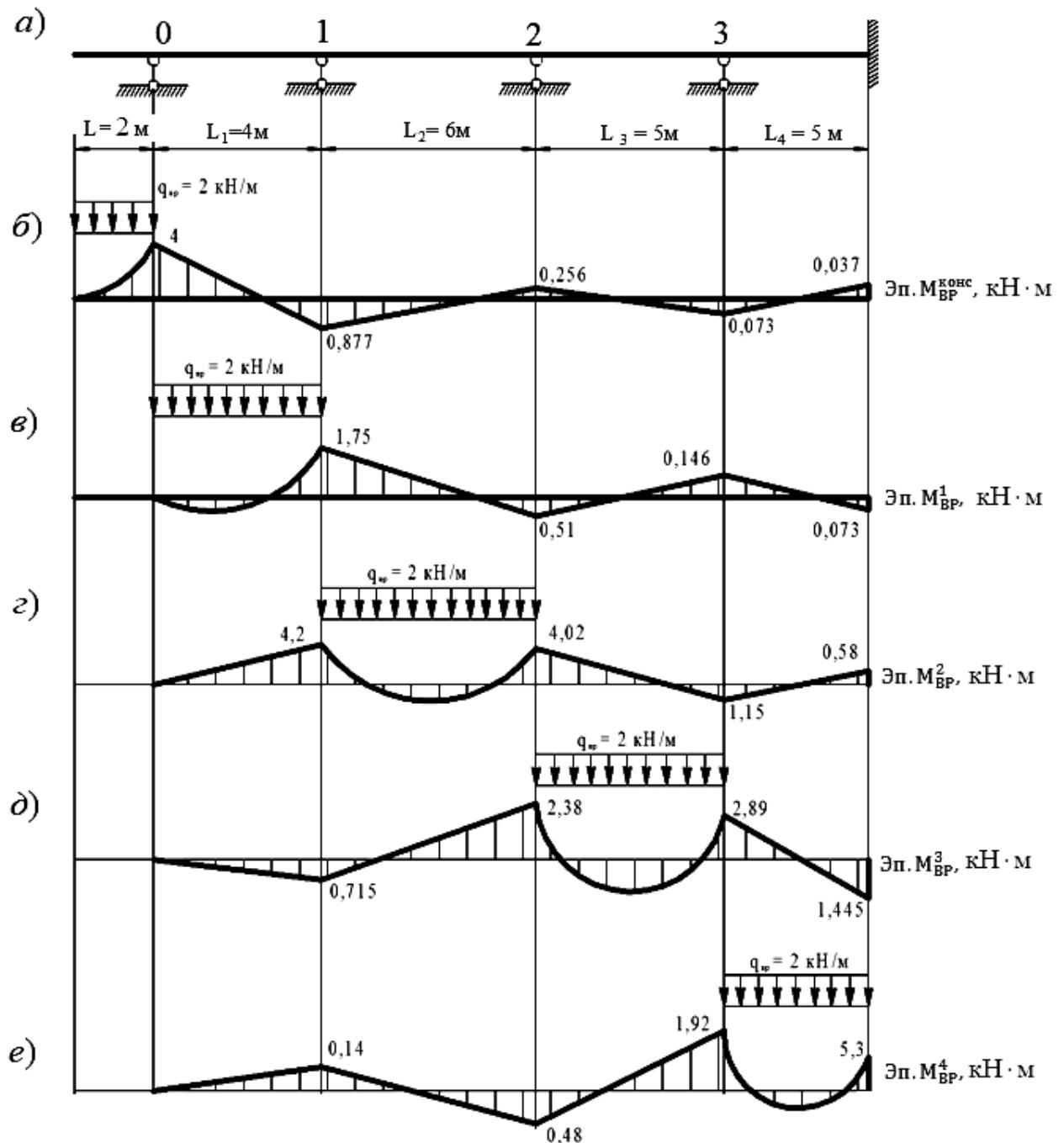


Рисунок 2.2 – К построению эпюор от последовательного загружения каждого пролета

Рассмотрим положение временной нагрузки на консоли (см. рисунок 2.2, б). Определяем опорные изгибающие моменты:

$$M_0 = -\frac{q \cdot 2^2}{2} = -\frac{2 \cdot 2^2}{2} = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = -\frac{M_0}{k_1^{\text{II}}} = -\frac{-4}{4,56} = 0,877 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{k_2^{\text{II}}} = -\frac{0,877}{3,43} = -0,256 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = -\frac{M_2}{k_3^{\text{II}}} = -\frac{-0,256}{3,5} = 0,073 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{k_4^{\text{II}}} = -\frac{0,073}{2} = -0,037 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим положение временной нагрузки на пролете L_1 (см. рисунок 2.2, в). Фиктивные опорные реакции и величины опорных изгибающих моментов по концам загруженного пролета L_1 можно найти по формулам:

$$6 \cdot A_1^{\phi} = 6 \cdot B_1^{\phi} = \frac{q \cdot L_1^3}{4} = \frac{2 \cdot 4^3}{4} = 32;$$

$$M_0 = -\frac{6 \cdot A_1^{\phi} \cdot k_1^{\text{II}} - 6 \cdot B_1^{\phi}}{L_1 \cdot (k_1^{\text{II}} \cdot k_1^{\text{II}} - 1)} = -\frac{32 \cdot 4,56 - 32}{4 \cdot (\infty \cdot 4,56 - 1)} = 0;$$

$$M_1 = -\frac{6 \cdot B_1^{\phi} \cdot k_1^{\text{II}} - 6 \cdot A_1^{\phi}}{L_1 \cdot (k_1^{\text{II}} \cdot k_1^{\text{II}} - 1)} = -\frac{32 \cdot \infty - 32}{4 \cdot (\infty \cdot 4,56 - 1)} = -1,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Находим значения остальных опорных изгибающих моментов:

$$M_2 = -\frac{M_1}{k_2^{\text{II}}} = -\frac{-1,75}{3,43} = 0,51 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = -\frac{M_2}{k_3^{\text{II}}} = -\frac{0,51}{3,5} = -0,146 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{k_4^{\text{II}}} = -\frac{-0,146}{2} = 0,073 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим положение временной нагрузки на пролете L_2 (см. рисунок 2.2, г):

$$6 \cdot A_2^{\phi} = 6 \cdot B_2^{\phi} = \frac{q \cdot L_2^3}{4} = \frac{2 \cdot 6^3}{4} = 108;$$

$$M_1 = -\frac{6 \cdot A_2^{\phi} \cdot k_2^{\text{II}} - 6 \cdot B_2^{\phi}}{L_2 \cdot (k_2^{\text{II}} \cdot k_2^{\text{II}} - 1)} = -\frac{108 \cdot 3,43 - 108}{6 \cdot (3,33 \cdot 3,43 - 1)} = -4,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -\frac{6 \cdot B_2^{\phi} \cdot k_2^{\text{II}} - 6 \cdot A_2^{\phi}}{L_2 \cdot (k_2^{\text{II}} \cdot k_2^{\text{II}} - 1)} = -\frac{108 \cdot 3,33 - 108}{6 \cdot (3,33 \cdot 3,43 - 1)} = -4,02 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определяем опорные изгибающие моменты:

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1^{\text{II}}} = -\frac{-4,2}{\infty} = 0; \quad M_3 = -\frac{M_2}{k_3^{\text{II}}} = -\frac{-4,02}{3,5} = 1,15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{k_4^{\text{II}}} = -\frac{1,15}{2} = -0,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Дальнейшее решение аналогично.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Построить эпюры изгибающего момента M и поперечной силы Q от постоянной нагрузки с помощью уравнений трех моментов для балок, представленных на рисунке 2.3.

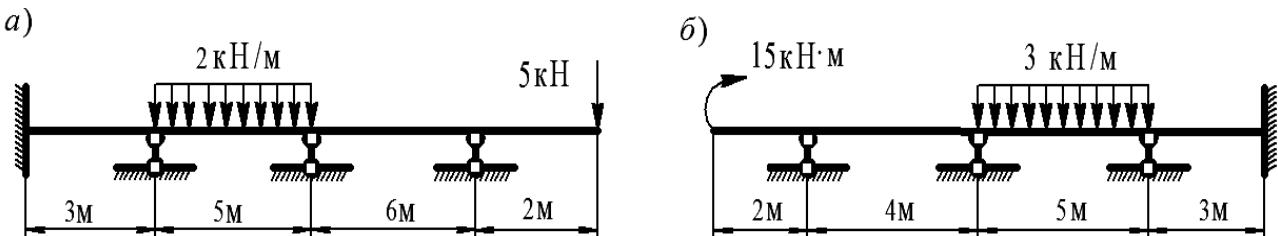


Рисунок 2.3 – К расчету статически неопределенных балок

Контрольные вопросы

- 1 Что такое неразрезная балка?
- 2 Как определяется степень статической неопределенности балки?
- 3 В чем состоит смысл уравнений трех моментов?
- 4 В каких случаях возможно применение метода моментных фокусов?
- 5 В каких случаях и каким образом строится объемлющая эпюра изгибающих моментов?

3 Метод перемещений и его применение к расчету плоских рам

Пример 1 – Построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил для заданной статически неопределенной рамы методом перемещений, считая жесткость постоянной ($E \cdot I = \text{const}$) (рисунок 3.1, а).

Решение

Число неизвестных углов поворота $n_y = 2$. При введении шарниров во все жесткие узлы и заделки линейная подвижность системы n_l будет равна нулю. Степень кинематической неопределенности

$$n = n_y + n_l = 2 + 0 = 2.$$

Основную систему получаем из заданной путем постановки подвижных заделок в жесткие узлы E и F (рисунок 3.1, б). Система канонических уравнений для заданной рамы имеет вид

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

При помощи таблицы готовых решений (таблица А.1) строим единичные эпюры моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 , задавая поочередно единичные перемещения введенным в основную систему связям (рисунок 3.1, σ , τ), а также грузовую эпюру изгибающих моментов M_P от действия внешней (заданной) нагрузки (рисунок 3.1, δ). На рисунке 3.1, $e-l$ представлено определение коэффициентов уравнений.

$$r_{11} = E \cdot I + \frac{4 \cdot E \cdot I}{3} = 2,33 \cdot E \cdot I; \quad r_{22} = 2 \cdot E \cdot I + 1,5 \cdot E \cdot I + E \cdot I = 4,5 \cdot E \cdot I;$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{E \cdot I}{2}; \quad R_{1P} = 4,4 + 13,33 = 17,73 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad R_{2P} = -13,33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подставляя их в систему и решая ее, находим неизвестные усилия, действующие во введенных связях:

$$\begin{cases} 2,33 \cdot E \cdot I \cdot Z_1 + 0,5 \cdot E \cdot I \cdot Z_2 + 17,73 = 0; \\ 0,5 \cdot E \cdot I \cdot Z_1 + 4,5 \cdot E \cdot I \cdot Z_2 - 13,33 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Z_1 = -8,436/E \cdot I; \\ Z_2 = 3,9/E \cdot I. \end{cases}$$

На рисунке 3.1, n, o показаны «исправленные» эпюры изгибающих моментов. Суммируя алгебраически ординаты грузовой M_P и «исправленных» эпюр M_1 и M_2 (см. рисунок 3.1, m, n), строим окончательную эпюру изгибающих моментов M (см. рисунок 3.1, o). По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 3.1, n).

$$Q_{AD} = \frac{5,93 - (-14,53)}{1} = 20,451 \text{ кН};$$

$$Q_{DE} = \frac{6,83 - 5,93}{2} = 1,83 \text{ кН}; \quad Q_{BF} = \frac{0 - 5,85}{2} = -2,93 \text{ кН};$$

$$Q_{FC} = \frac{-3,9 - 7,8}{2} = -5,85 \text{ кН}; \quad Q_{EF} = \pm \frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{13,65 - 6,83}{4} = \pm 20 + 1,7 \text{ кН};$$

$$Q_{EF}^E = -20 + 1,7 = -18,3 \text{ кН}; \quad Q_{EF}^F = 20 + 1,7 = 21,3 \text{ кН}.$$

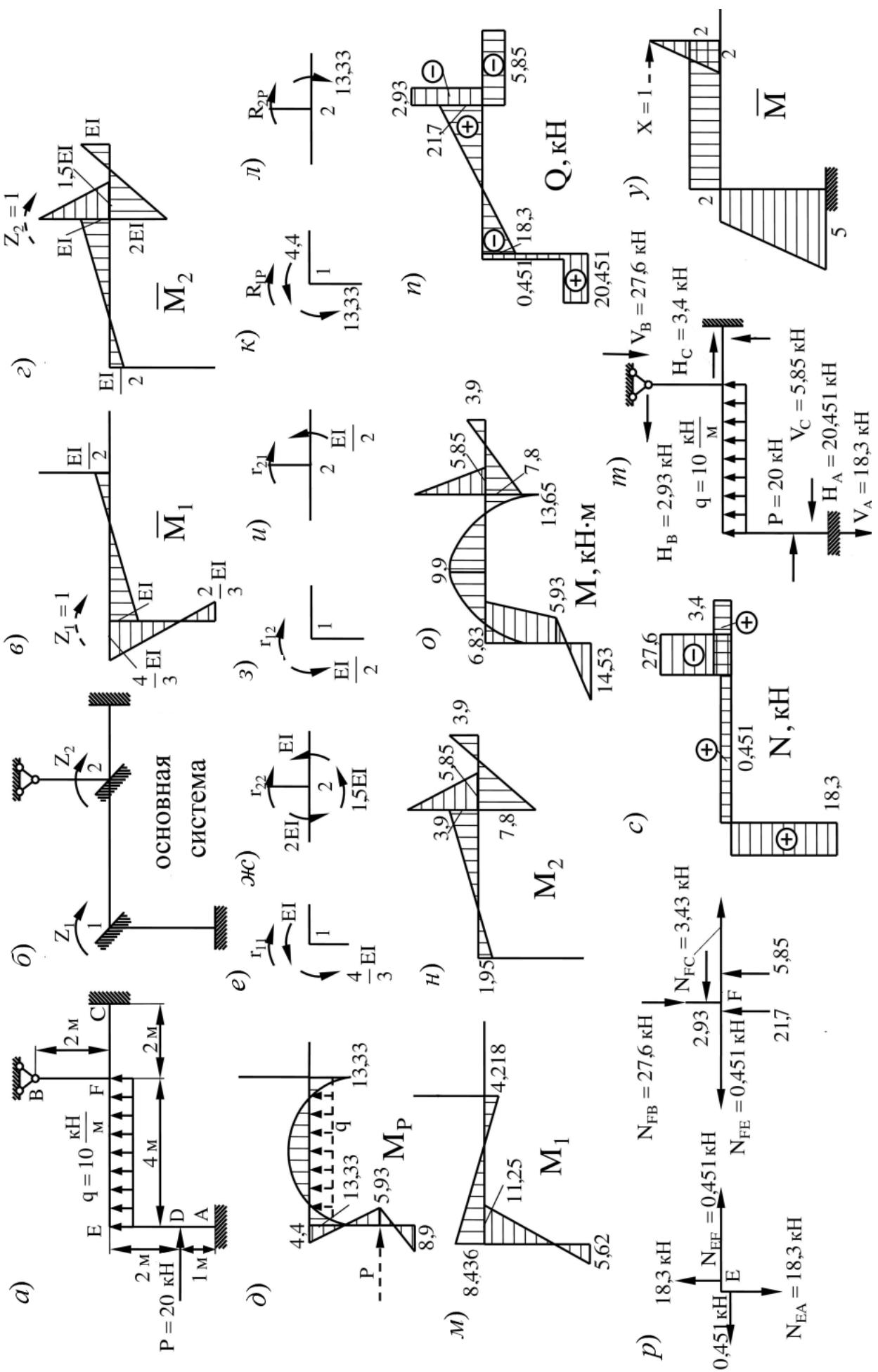


Рисунок 3.1 – К расчету статически неопределенных рам методом перемещений

Вырезая узлы E и F (рисунок 3.1, p), строим эпюру продольных сил N (рисунок 3.1, c):

– узел E :

$$\sum X = 0: -0,451 + N_{EF} = 0; N_{EF} = 0,451 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: 18,3 - N_{EA} = 0; N_{EA} = 18,3 \text{ кН};$$

– узел F :

$$\sum X = 0: -N_{FE} - 2,93 + N_{FC} = 0; N_{FC} = 0,451 + 2,93 = 3,4 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: 21,7 + 5,85 + N_{FB} = 0; N_{FB} = -27,6 \text{ кН}.$$

Проводим статическую проверку равновесия рамы (рисунок 3.1, m).

$$\sum X = 0: -H_A + P - H_B + H_C = -20,451 - 20 - 2,93 + 3,4 = 0;$$

$$\sum Y = 0: -V_A + q \cdot 4 - V_B + V_C = -18,3 + 10 \cdot 4 - 27,6 + 5,85 = 0.$$

Для кинематической проверки строим единичную эпюру моментов в основной системе метода сил (рисунок 3.1, y) и перемножаем ее с окончательной эпюрой M по правилу Верещагина.

$$\delta = \frac{\overline{M'} \cdot M}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 5,85 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 6,83 \cdot 2 + 2 \cdot 13,65 \cdot 2 + 2 \cdot 6,83 + 2 \cdot 13,65) + \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 - \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 6,83 \cdot 2 + 2 \cdot 5,93 \cdot 4 + 6,83 \cdot 4 + 5,93 \cdot 2) + \frac{1}{6} \cdot (-2 \cdot 5,93 \cdot 4 + 2 \cdot 14,53 \cdot 5 - 5,93 \cdot 5 + 14,53 \cdot 4) \right) = 0.$$

Проверка полностью выполняется, следовательно, эпюры построены верно.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил для заданной статически неопределенной рамы методом перемещений, считая жесткость постоянной величиной ($EI = \text{const}$) (рисунок 3.2, a, δ).

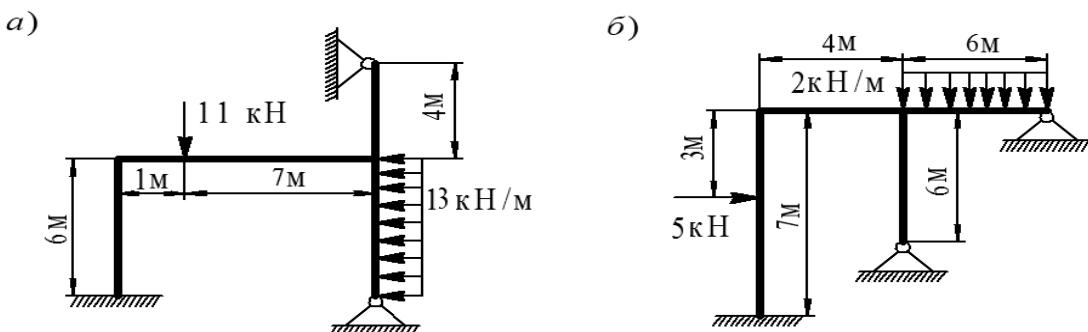


Рисунок 3.2 – К расчету статически неопределенных рам методом перемещений

Контрольные вопросы

- 1 Какие гипотезы принимаются при расчете рам методом перемещений?
- 2 Степень кинематической неопределенности метода перемещений. Выбор основной системы.
- 3 Какие величины являются неизвестными метода перемещений?
- 4 Физический смысл канонических уравнений.
- 5 Определение коэффициентов канонических уравнений и их проверка.
- 6 Алгоритм расчета статически неопределеных рам методом перемещений.
- 7 Каков физический смысл кинематической проверки?

4 Расчет статически неопределенных ферм

Пример 1 – Для статически неопределенной фермы с заданными размерами и нагрузкой требуется определить усилия во всех стержнях (рисунок 4.1). Принять площади поперечных сечений стержней: нижнего пояса – F ; верхнего пояса – $1,5F$; решетки – $1,2F$.

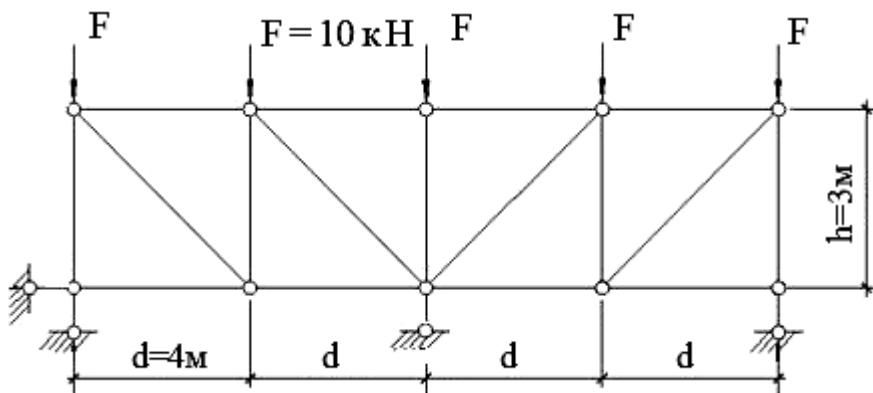


Рисунок 4.1 – К расчету статически неопределенной фермы

Решение

Степень статической неопределенности фермы найдем по формуле

$$n = C + C_{оп} - 2 \cdot Y = 17 + 4 - 2 \cdot 10 = 1,$$

где C – число стержней фермы;

$C_{оп}$ – число опорных стержней;

Y – число узлов фермы.

Ферма один раз статически неопределенна. Основную систему получим путем отбрасывания среднего опорного стержня, реакцию которого принимаем за лишенное неизвестное X_1 .

Загружаем основную систему по отдельности силой $X_1 = 1$ и внешней нагрузкой (рисунок 4.2). Находим, соответственно, продольные усилия в

стержнях $\overline{N_1}$ и N_F . Весь расчет удобно выполнять в виде рисунка 4.3. Вследствие симметрии на рисунке отражены данные, относящиеся только к левой половине фермы. За величину A_0 удобно принять A , т. е. $A_0 = A$.

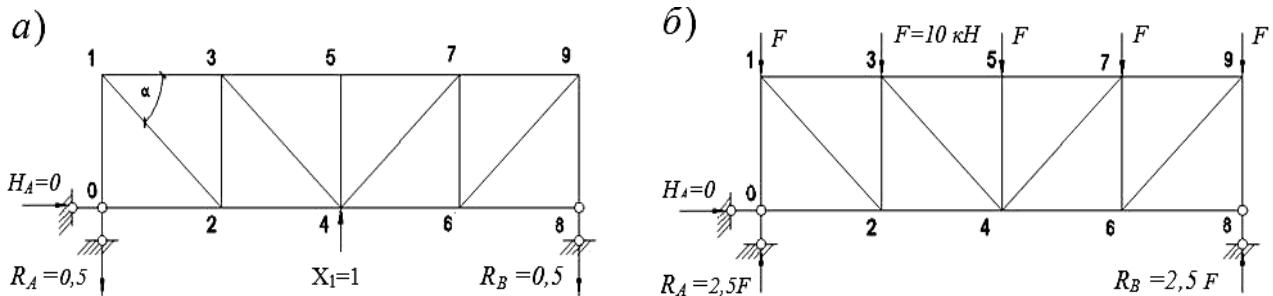


Рисунок 4.2 – К расчету статически неопределенной фермы

Таким образом, согласно рисунку 4.3, имеем $\frac{1}{2} \cdot \delta_{11} = \frac{14,70}{EA}$

и $\frac{1}{2} \cdot \Delta_{1F} = -\frac{349,186}{EA}$. Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\left(\frac{-349,186}{14,70}\right) = 23,75 \text{ кН.}$$

Кинематическая проверка (см. последний столбец рисунка 4.3):

$$\sum N \overline{N_1} l \frac{A_0}{A} = 56,804 - 56,868 = -0,064.$$

Погрешность составляет всего

$$\delta = \frac{-0,064}{56,804} \cdot 100 \% = 0,1 \%.$$

Обе проверки показывают, что расчёт выполнен верно.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить усилия в стержнях статически неопределенной фермы (рисунок 4.4).

№ стержня	$l, \text{м}$	$\frac{A_0}{A}$	\bar{N}_1	$\overline{N_1^2} \cdot l \cdot \frac{A_0}{A}, \text{кН}$	$N_f, \text{кН}$	$\overline{N_1} \cdot N_f \cdot l \cdot \frac{A_0}{A}, \text{кНм}$	$\bar{N}_1 \cdot X_1, \text{кН}$	$N = N_f + \overline{N_1} \cdot X_1, \text{кН}$	Проверка $\frac{N \cdot N_1 \cdot l \cdot \frac{A_0}{A}}{kNm}$
0-1	3,0	1/1,2	0,5	0,625	-25,0	-31,25	11,875	-13,125	-16,406
1-3	4,0	1/1,5	0,67	1,197	-20,0	-35,73	15,91	-4,09	-7,307
0-2	4,0	1,0	0	0	0	0	0	0	0
2-3	3,0	1/1,2	0,5	0,625	-15,0	-18,75	11,875	-3,125	-3,906
3-5	4,0	1/1,5	1,33	4,717	-26,67	-94,59	31,588	4,918	17,442
2-4	4,0	1	-0,67	1,796	20,0	-53,6	-15,91	4,09	-10,961
1-2	5,0	1/1,2	-0,83	2,87	25,0	-86,458	-19,712	5,288	-18,288
3-4	5,0	1/1,2	-0,83	2,87	8,33	-28,808	-19,712	-11,382	39,362
4-5	3,0	1/1,2	0	0	-10,0	0	0	-10,0	0
					$\Sigma=14,70$	$\Sigma=349,186$			$\Sigma=0,064$

Рисунок 4.3 – Определение коэффициентов уравнений

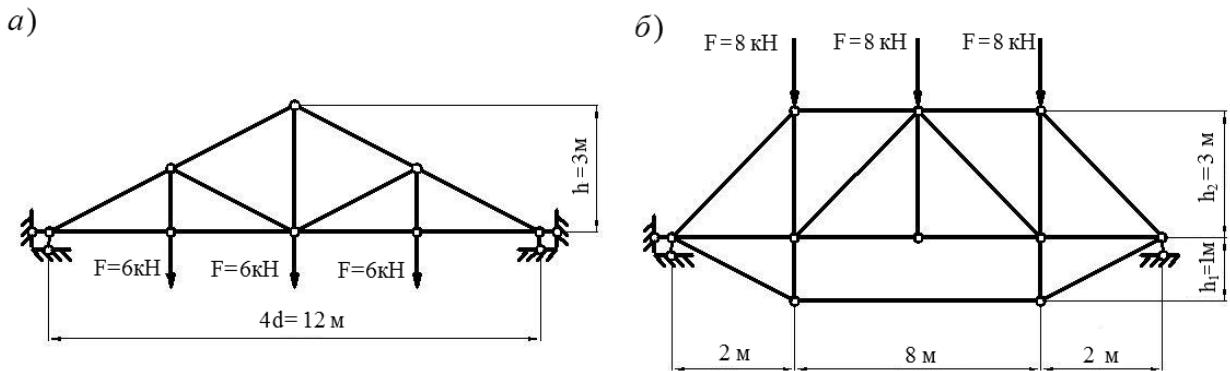


Рисунок 4.4 – К расчету статически неопределеных ферм

Контрольные вопросы

- 1 Как определяется степень статической неопределенности фермы?
- 2 Каким образом ферма может быть статически неопределенной?
- 3 Как проверить правильность определения усилий в стержнях фермы?

5 Устойчивость стержневых систем

Пример 1 – Определить величину силы F_{kp} , при которой одноэтажная рама достигает критического состояния, если вдоль оси одной из ее стоек действует сосредоточенная сила F (рисунок 5.1, а).

Решение

Определяем степень статической неопределенности рамы:

$$n = n_{yel} + n_{lin} = 2 + 0 = 2;$$

$$n_{lin} = 3 \cdot \mathcal{D} - 2 \cdot III - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Выбираем основную систему (рисунок 5.1, б). Рассчитываем критический параметр для каждой стойки (критические силы для каждой стойки различны):

$$v_2 = L \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = v;$$

$$v_1 = L \sqrt{\frac{2F}{4E \cdot I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} L \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v = 0,707 v.$$

$$(2,4\varphi_5(0,707v) + 1) \cdot (0,8\varphi_1(v) + 5) - (0,5)^2 = 0.$$

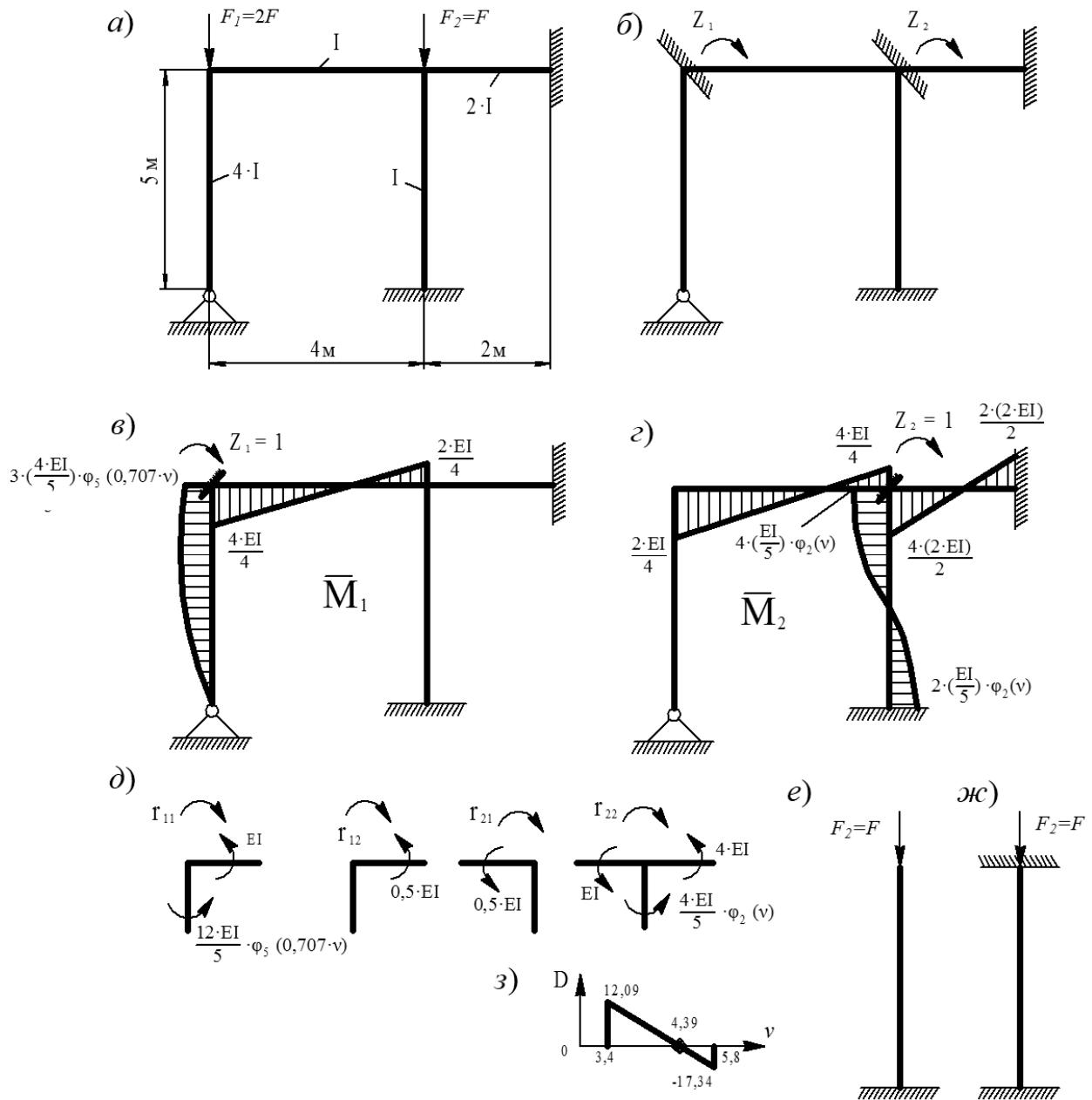


Рисунок 5.1 – К расчету статически неопределенной рамы на устойчивость

Строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил (рисунок 5.1, *в*, *г*). Определяем главные и боковые коэффициенты (рисунок 5.1, *д*):

$$r_{11} - \frac{12}{5} E \cdot I \varphi_5(0,707v) - E \cdot I = 0, \quad r_{11} = 2,4 E \cdot I \varphi_5(0,707v) + E \cdot I;$$

$$r_{12} - 0,5 E \cdot I = 0; \quad r_{12} = r_{21} = 0,5 E \cdot I; \quad r_{22} - \frac{4}{5} E \cdot I \varphi_1(v) - E \cdot I - 4 E \cdot I = 0;$$

$$r_{22} = \frac{4}{5} E \cdot I \varphi_1(v) + E \cdot I + 4 E \cdot I = 0,8 E \cdot I \varphi_1(v) + 5 E \cdot I.$$

Составляем уравнение устойчивости системы:

$$D = \begin{vmatrix} 2,4\varphi_5(0,707v) + 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,8\varphi_1(v) + 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Необходимо найти такое значение v , при котором определитель будет равен нулю. Для начала найдем интервал, в котором это значение находится. С этой целью изучим два случая, рассматривая стержень, вдоль которого действует сила F_2 , поскольку $v_2 = v$:

1) рассмотрим состояние рамы, при котором изгибные жесткости всех стержней (кроме рассматриваемого) равны нулю (рисунок 5.1, *е*). В соответствии с приложением Б, для рассматриваемого случая $\mu = 2$. Тогда

$$v = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{2} = 1,57;$$

2) рассмотрим состояние рамы, при котором изгибные жесткости всех стержней (кроме рассматриваемого) равны бесконечности (рисунок 5.1, *ж*). В соответствии с приложением Б, для этого случая $\mu = 0,5$. Тогда

$$v = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{0,5} = 6,28.$$

То есть параметр $1,57 \leq v \leq 6,28$.

Задаемся значениями: $3,4 \leq v \leq 5,8$.

Таблица 5.1 – Решение уравнения устойчивости системы

v	$\varphi_5(0,707 \cdot v)$	$\varphi_1(v)$	D
3,4	0,5304	0,5366	12,09
5,8	-2,9802	-2,7777	-17,34

Величину критического параметра можно найти из рисунка 5.1, з. Критический параметр $v = 4,39$.

Определяем величину критической силы:

$$F_{1kp} = \frac{v_1^2}{L^2} E \cdot I = \frac{(0,707 \cdot 4,39)^2}{5^2} \cdot 4E \cdot I = 1,54E \cdot I;$$

$$F_{2kp} = \frac{v_2^2}{L^2} E \cdot I = \frac{4,39^2}{5^2} E \cdot I = 0,77E \cdot I.$$

В качестве критической силы принимается минимальное значение из найденных: $F_{2kp} = 0,77E \cdot I$.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить величину критической силы F_{kp} (рисунок 5.2, а, б)

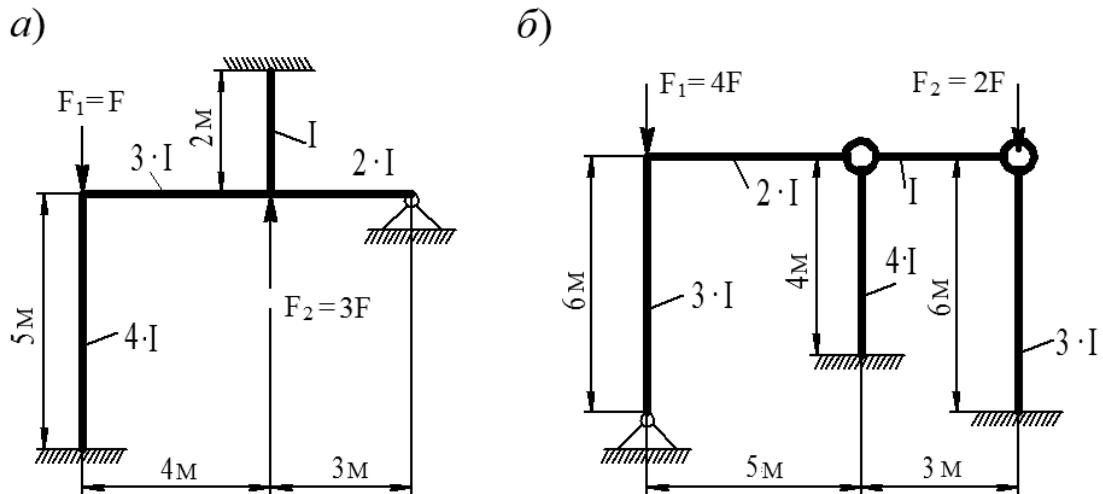


Рисунок 5.2 – К расчету статически неопределенных рам на устойчивость

Контрольные вопросы

- 1 Что такое устойчивость? Что такое критическая сила?
- 2 Какие виды потери устойчивости существуют?
- 3 Чем отличается потеря устойчивости второго рода от потери устойчивости первого рода?
- 4 Какие гипотезы принимаются при расчете рам на устойчивость?
- 5 Что такое критический параметр нагрузки (воздействия)?

6 Колебания системы с одной степенью свободы

Пример 1 – Определить частоту собственных колебаний сосредоточенной массы $m = 2800$ кг, расположенной посередине ригеля рамы (рисунок 6.1, а). Жесткость элементов рамы постоянна и равна $E \cdot I = 81,84$ МН·м², $l = 6$ м. Массой рамы, по сравнению с массой груза, можно пренебречь.

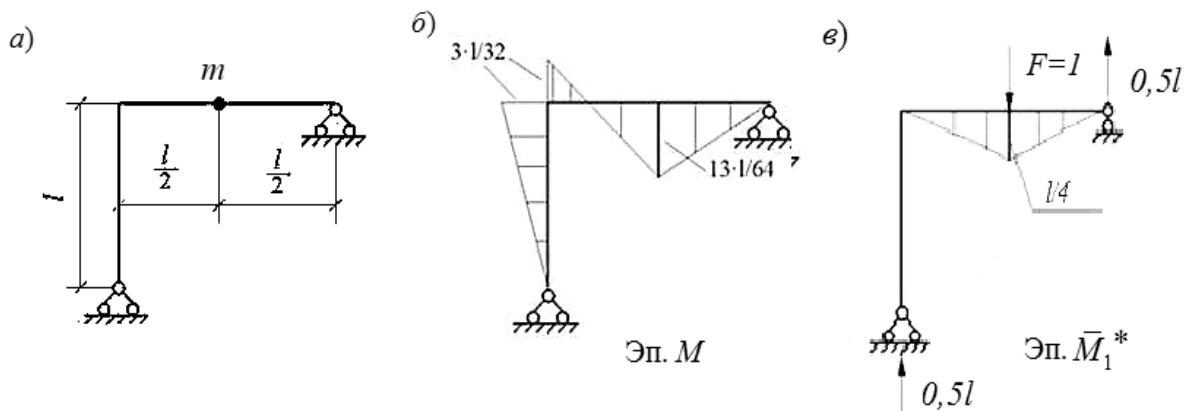


Рисунок 6.1 – К расчету колебаний системы с одной степенью свободы

Решение

Динамическая степень свободы $W_d = 1$. Вначале строим эпюру изгибающих моментов для статически неопределенной рамы (рисунок 6.1, б).

Определяем перемещение (прогиб) в месте установки массы. Для этого надо выбрать новую основную систему метода и загрузить единичной силой $F = 1$ в месте установки массы и построить эпюру изгибающих моментов от этого загружения.

Прогиб, вызванный единичной нагрузкой $F = 1$ кН, определяется из выражения

$$\begin{aligned}\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{E \cdot I} dx &= \frac{3}{32} \cdot \frac{l}{E \cdot I} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{32} + \frac{l}{2 \cdot 6 \cdot E \cdot I} \times \\ &\times \left(2 \cdot \frac{3}{32} \cdot l \cdot \frac{3}{32} \cdot l + 2 \frac{13 \cdot l}{64} \cdot \frac{13 \cdot l}{64} + \frac{3 \cdot l}{32} \cdot \frac{13 \cdot l}{64} + \frac{13 \cdot l}{64} \cdot \frac{3 \cdot l}{32} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{13 \cdot l}{64} = \frac{23 \cdot l^3}{1536 \cdot E \cdot I}.\end{aligned}$$

Находим круговую частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \cdot m}} = \sqrt{\frac{1536 E \cdot I}{23 l^3 m}} = \sqrt{\frac{1536 \cdot 81,84 \cdot 10^6}{23 \cdot 6^3 \cdot 2800}} = 95,1 \frac{1}{\text{с}}.$$

Техническая частота

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{95,1}{2 \cdot 3,14} = 15,13 \text{ Гц}.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Для конструкции требуется определить круговую частоту, период колебания и техническую частоту, если вес груза $G = 40$ кН, жесткость принять постоянной величиной, равной $E \cdot I$ (рисунок 6.2).

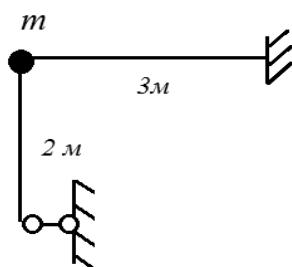


Рисунок 6.2 – К расчету колебаний системы с одной степенью свободы

Контрольные вопросы

- 1 Что такая динамическая степень свободы массы на сооружении?
- 2 Что такое свободные колебания системы? Какие колебания являются вынужденными?
- 3 Что такое явление резонанса?
- 4 Что такое круговая и техническая частота?
- 5 Какие факторы влияют на частоту свободных колебаний?

Список литературы

- 1 **Дарков, А. В.** Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 12-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2020. – 656 с.: ил.
- 2 **Смирнов, В. А.** Строительная механика: учебник / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий ; под ред. В. А. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2018. – 423 с.
- 3 **Гонорова, С. В.** Строительная механика. Пособие по решению задач : учеб.-метод. пособие / С. В. Гонорова ; под общ. ред. И. М. Кузменко. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – 280 с.: ил.
- 4 **Шапошников, Н. Н.** Строительная механика: учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков; под общ. ред. Н. Н. Шапошникова. – 13-е изд., перераб. и доп. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2017. – 692 с.: ил.

Приложение А (справочное)

Готовые решения метода перемещений

№ п/п	Схема балки	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
1			$M_A = \frac{P \cdot L \cdot v}{2} \cdot (1 - v^2);$ $M_C = \frac{P \cdot L \cdot u^2 \cdot v}{2} \cdot (3 - u);$ $R_A = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2);$ $R_B = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u).$
2			$M_A = \frac{q \cdot L^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L;$ $R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L.$
3			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L};$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^2}$
4			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L^2};$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^3}.$
5			$M_A = P \cdot L \cdot u \cdot v^2;$ $M_B = P \cdot L \cdot u^2 \cdot v;$ $M_C = 2 \cdot P \cdot L \cdot u^2 \cdot v^2;$ $R_A = P \cdot v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u);$ $R_B = P \cdot u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v).$
6			$M_A = M_B = \frac{q \cdot L^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{q \cdot L}{2}.$
7			$M_A = \frac{4 \cdot EI}{L};$ $M_B = \frac{2 \cdot EI}{L};$ $R_A = R_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$
8			$M_A = M_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2};$ $R_A = R_B = \frac{12 \cdot EI}{L^3}.$

Рисунок А.1 – Готовые решения метода перемещений

Приложение Б (справочное)

Коэффициенты приведенных длин прямых стержней

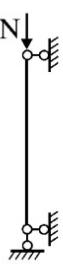
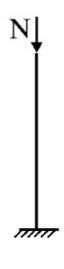
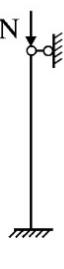
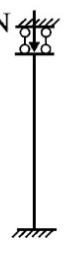
					
$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,7$	$\mu = 1$	$\mu = 2$

Рисунок Б.1 – Коэффициенты приведенных длин прямых стержней

Приложение В (справочное)

Реакции сжатого стержня от единичных перемещений

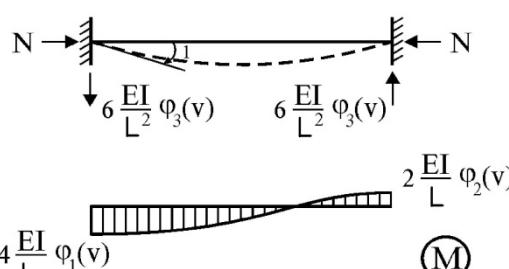
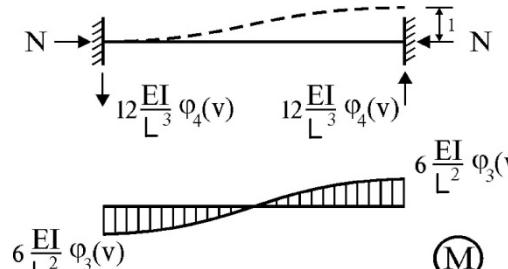
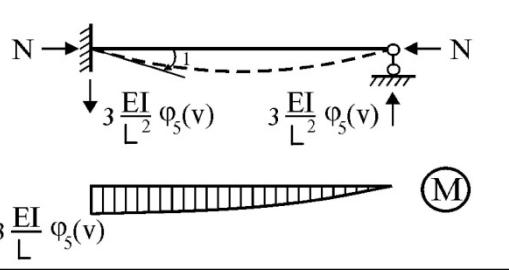
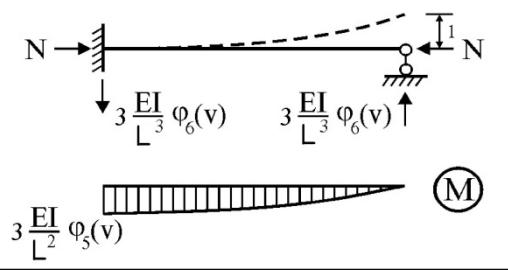
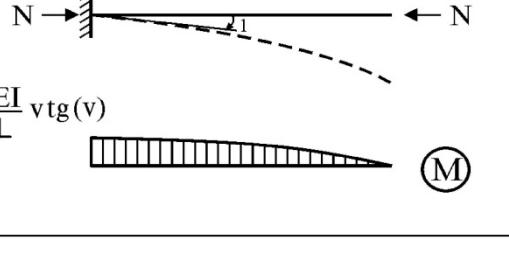
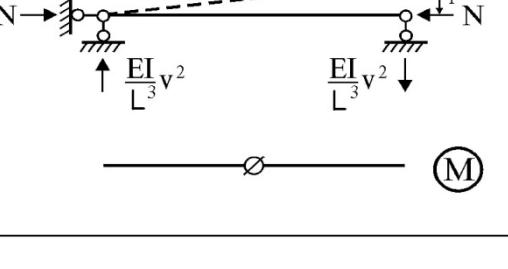
	
	
	

Рисунок В.1 – Реакции сжатого стержня от единичных перемещений

Приложение Г (справочное)

Специальные функции метода перемещений и их значения

$$\varphi_1(v) = \frac{v \cdot (\operatorname{tg} v - v)}{8 \cdot \operatorname{tg} v \cdot (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v \cdot (v - \sin v)}{4 \cdot \sin v \cdot (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})};$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{12 \cdot (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})}; \quad \varphi_4(v) = \frac{v^3}{24 \cdot (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})};$$

$$\varphi_5(v) = \frac{v^2 \cdot \operatorname{tg} v}{3 \cdot (\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_6(v) = \frac{v^3}{3 \cdot (\operatorname{tg} v - v)}.$$

Таблица Г.1 – Величина критического параметра v

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\varphi_5(v)$	$\varphi_6(v)$
0,0	1	1	1	1	1	1
0,1	0,9997	1,0002	0,9998	0,9990	0,9993	0,9960
0,2	0,9987	1,0007	0,9993	0,9960	0,9973	0,9840
0,3	0,9970	1,0015	0,9985	0,9910	0,9940	0,9640
0,4	0,9947	1,0027	0,9973	0,9840	0,9893	0,9360
0,5	0,9916	1,0042	0,9958	0,9750	0,9832	0,8999
0,6	0,9879	1,0061	0,9940	0,9640	0,9757	0,8557
0,7	0,9836	1,0083	0,9918	0,9510	0,9669	0,8035
0,8	0,9785	1,0109	0,9893	0,9360	0,9565	0,7432
0,9	0,9727	1,0138	0,9864	0,9189	0,9447	0,6747
1,0	0,9662	1,0172	0,9832	0,8999	0,9313	0,5980
1,1	0,9590	1,0209	0,9797	0,8788	0,9164	0,5131
1,2	0,9511	1,0251	0,9757	0,8557	0,8998	0,4198
1,3	0,9424	1,0297	0,9715	0,8307	0,8814	0,3181
1,4	0,9329	1,0348	0,9669	0,8035	0,8613	0,2080
1,5	0,9227	1,0403	0,9619	0,7744	0,8393	0,0893
$\pi/2 \approx 1,57$	0,9149	1,0445	0,9581	0,7525	0,8225	0
1,6	0,9116	1,0463	0,9565	0,7432	0,8152	-0,0381
1,7	0,8998	1,0529	0,9508	0,7100	0,7891	-0,1743
1,8	0,8871	1,0600	0,9447	0,6747	0,7606	-0,3194
1,9	0,8735	1,0676	0,9382	0,6374	0,7297	-0,4736
2,0	0,8590	1,0760	0,9313	0,5980	0,6961	-0,6372
2,1	0,8436	1,0849	0,9241	0,5566	0,6597	-0,8103
2,2	0,8273	1,0946	0,9164	0,5131	0,6202	-0,9931
2,3	0,8099	1,1051	0,9083	0,4675	0,5772	-1,1861
2,4	0,7915	1,1164	0,8998	0,4198	0,5304	-1,3896
2,5	0,7720	1,1286	0,8908	0,3700	0,4793	-1,6040
2,6	0,7513	1,1417	0,8814	0,3181	0,4234	-1,8299
2,7	0,7295	1,1559	0,8716	0,2641	0,3621	-2,0679

Окончание таблицы Г.1

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\varphi_5(v)$	$\varphi_6(v)$
2,8	0,7064	1,1712	0,8613	0,2080	0,2944	-2,3189
2,9	0,6819	1,1878	0,8505	0,1497	0,2195	-2,5838
3,0	0,6560	1,2057	0,8393	0,0893	0,1361	-2,8639
3,1	0,6287	1,2251	0,8275	0,0267	0,0424	-3,1609
$\pi \approx 3,14$	0,6168	1,2337	0,8225	0	0	-3,2899
3,2	0,5997	1,2462	0,8152	-0,0381	-0,0635	-3,4769
3,3	0,5691	1,2691	0,8024	-0,1051	-0,1847	-3,8147
3,4	0,5366	1,2940	0,7891	-0,1743	-0,3248	-4,1781
3,5	0,5021	1,3212	0,7751	-0,2457	-0,4894	-4,5727
3,6	0,4655	1,3509	0,7606	-0,3194	-0,6862	-5,0062
3,7	0,4265	1,3834	0,7455	-0,3954	-0,9270	-5,4904
3,8	0,3850	1,4191	0,7297	-0,4736	-1,2303	-6,0436
3,9	0,3407	1,4584	0,7133	-0,5542	-1,6269	-6,6969
4,0	0,2933	1,5019	0,6961	-0,6372	-2,1726	-7,5060
4,1	0,2424	1,5501	0,6783	-0,7225	-2,9802	-8,5836
4,2	0,1878	1,6037	0,6597	-0,8103	-4,3156	-10,196
4,3	0,1287	1,6636	0,6404	-0,9005	-6,9947	-13,158
4,4	0,0648	1,7310	0,6202	-0,9931	-15,327	-21,780
4,4934	0,0000	1,8017	0,6006	-1,0820	$-\infty/+\infty$	$-\infty/+\infty$
4,5	-0,0048	1,8070	0,5991	-1,0884	227,93	221,18
4,6	-0,0809	1,8933	0,5772	-1,1861	14,669	7,6160
4,7	-0,1645	1,9920	0,5543	-1,2865	7,8186	0,4553
$3\pi/2 \approx 4,71$	-0,1755	2,0051	0,5514	-1,2991	7,4038	0
4,8	-0,2572	2,1056	0,5304	-1,3896	5,4023	-2,2777
4,9	-0,3607	2,2375	0,5054	-1,4954	4,1463	-3,8570
5,0	-0,4772	2,3923	0,4793	-1,6040	3,3615	-4,9719
5,1	-0,6099	2,5757	0,4520	-1,7155	2,8130	-5,8570
5,2	-0,7629	2,7960	0,4234	-1,8299	2,3986	-6,6147
5,3	-0,9422	3,0648	0,3935	-1,9474	2,0668	-7,2965
5,4	-1,1563	3,3989	0,3621	-2,0679	1,7884	-7,9316
5,5	-1,4182	3,8236	0,3291	-2,1917	1,5455	-8,5379
5,6	-1,7481	4,3794	0,2944	-2,3189	1,3266	-9,1268
5,7	-2,1803	5,1346	0,2580	-2,4495	1,1235	-9,7065
5,8	-2,7777	6,2139	0,2195	-2,5838	0,9302	-10,283
5,9	-3,6679	7,8727	0,1790	-2,7219	0,7421	-10,861
6,0	-5,1594	10,727	0,1361	-2,8639	0,5551	-11,444
6,1	-8,2336	16,739	0,0907	-3,0102	0,3656	-12,037
6,2	-18,590	37,308	0,0424	-3,1609	0,1700	-12,643
$2\pi = 6,28$	$-\infty$	$+\infty$	0	-3,2899	0	-13,159