МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электропривод и АПУ»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств» очной и заочной форм обучения

Могилев 2026

УДК 681.58
ББК 32.965
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Электропривод и АПУ» «29» августа 2025 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель Г. В. Лабкович

Рецензент канд. техн. наук С. В. Болотов

Методические рекомендации к практическим занятиям разработаны в соответствии с рабочей программой «Теория автоматического управления». Рекомендованы для студентов специальности 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств» очной и заочной форм обучения.

Учебное издание

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ответственный за выпуск	А. С. Коваль
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Методические рекомендации разработаны для студентов специальности 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств», выполняющим практические и курсовые работы по теории автоматического управления.

Целью практических занятий является закрепление теоретического материала по дифференциальным уравнениям, передаточным функциям, временным и частотным характеристикам звеньев автоматических систем, их устойчивости, влиянию параметров и структуры систем на показатели качества процессов управления в переходном и установившемся режимах функционирования, исследованию систем с запаздыванием.

Практические занятия целесообразно выполнять на персональных компьютерах с использованием системы MATLAB и ее пакетов расширения, позволяющих автоматизировать процесс анализа систем управления, представленных в виде структурных динамических схем.

В результате студент овладевает знаниями об общих принципах и видах систем автоматического управления (САУ) технологическими системами (ТС), основами их построения и возможностей, приобретает умения разрабатывать математические модели отдельных подсистем, а также выбирать САУ с учётом её требований, овладеет методами оценки устойчивости и эффективности, научится устранять или уменьшать ошибки погрешностей САУ.

Отчёт по практической работе должен содержать:

– титульный лист;
– цель работы;
– описание задачи и исходные данные к ней;
– ход выполнения работы с подробным описанием действий;
– графики исследованных зависимостей;
– выводы по работе;
– список использованных источников.

1 Практическое занятие № 1. Методы решения дифференциальных уравнений

Цель работы: получение линейных дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; изучение математического описания основных типов линейных звеньев.

1.1 Краткие теоретические сведения

Построение любой системы управления начинается с изучения объекта управления и составления его математического описания, которое может быть получено экспериментальным, аналитическим или комбинированным путем.

В самом общем виде порядок исследования САУ в обоих случаях включает: математическое описание системы, исследование её установившихся режимов, исследование переходных процессов. Математическое описание начинается с разбиения системы на звенья и описания этих звеньев. Последнее может осуществляться либо аналитически (уравнениями), либо графически (характеристиками). По уравнениям или характеристикам звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом, на основании чего и исследуется система.

Для удобства описания систему следует разбивать на возможно более простые (мелкие) звенья. Но вместе с тем необходимо, чтобы эти звенья обладали направленностью действия.

Звеном направленного действия называется звено, передающее воздействие только в одном направлении – с входа на выход, так, что изменение его состояния не влияет на состояние предшествующих звеньев. При таком разбиении математическое описание звена направленного действия составляется без учёта связи с другими звеньями. В результате такого разбиения составляется структурная схема САУ. Структурная схема состоит из прямоугольников, изображающих звенья, и связей со стрелками, соединяющими входы и выходы звеньев. Стрелками показываются также внешние воздействия, приложенные к отдельным звеньям. Каждому звену придается описывающее его уравнение или характеристика.

На практике звенья описываются дифференциальными уравнениями низкого порядка, обычно не выше второго.

Для математического описания любой САУ составляется математическая модель, которая в дальнейшем может использоваться для синтеза и анализа САУ. Обычно математической моделью является дифференциальное уравнение, которое получают, анализируя физический, механический или иной процесс.

Уравнения объектов автоматического регулирования в зависимости от описываемого ими режима работы подразделяются на уравнения статики и динамики.

Статическая характеристика – зависимость выходной величины звена от входной в установившемся режиме. В уравнении статики все координаты объекта остаются неизменными во времени. Они представляют собой алгебраические или дифференциальные уравнения, содержащие производные по какому-либо параметру, кроме времени.

Звено системы может являться техническим устройством любой физической природы, конструкции и назначения. Входная $x(t)$ и выходная $y(t)$ величины соответствуют физическим величинам, выражающим воздействие предыдущего звена на данное звено и воздействие данного звена на последующее.

Уравнения динамики описывают неустановившийся, или переходный, режим в объекте.

Выходная координата объекта при этом является функцией времени, и в общем виде уравнение динамики будет дифференциальным уравнением, содержащим производные по времени.

Вид уравнений статики и динамики определяется характером самого объекта управления и числом независимых координат, однозначно определяющих состояние объекта в каждый момент времени, а также числом степеней свободы.

В зависимости от числа степеней свободы все объекты можно разделить на два класса:

1) объекты с сосредоточенными параметрами, которые обладают конечным числом степеней свободы и описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями;

2) объекты с распределенными параметрами, которые имеют бесконечное число степеней свободы и описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Линейные объекты управления подчиняются принципу суперпозиции, который заключается в том, что реакция объекта на сумму входных сигналов равна сумме реакций на каждый из сигналов в отдельности.

Для линейного стационарного объекта с сосредоточенными параметрами уравнение состояния в общем случае может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n dy(t) = \\ & = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m dx(t) + \\ & \qquad + c_0 \frac{d^k f(t)}{dt^k} + c_1 \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – входной сигнал;

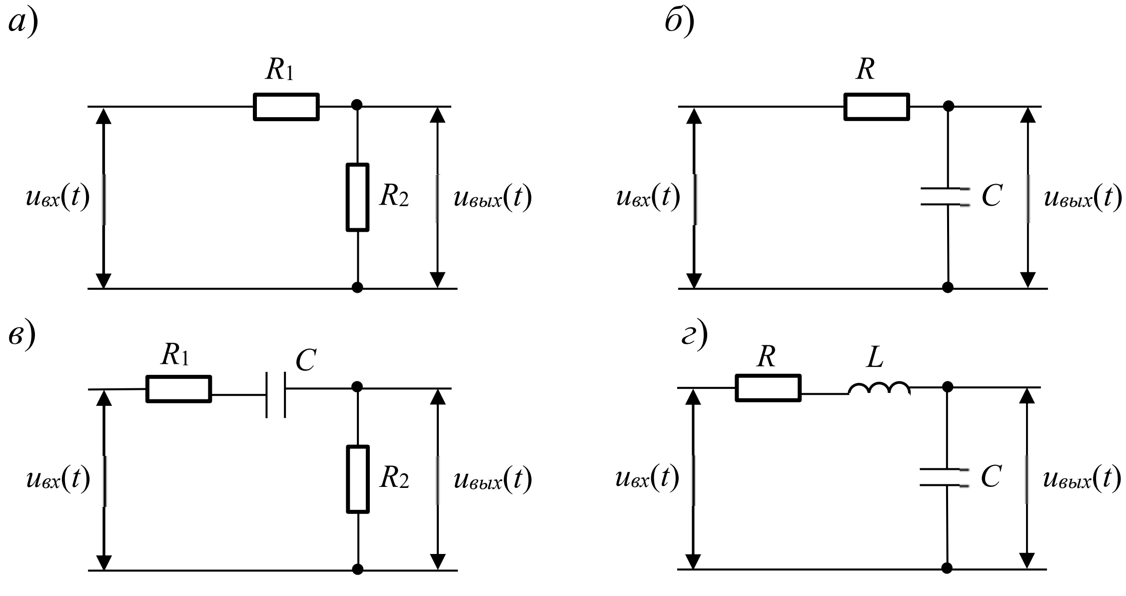
$y(t)$ – выходной сигнал;

$f(t)$ – возмущающее воздействие;

a_n, b_m, c_k – постоянные;

$m < n$, $k < n$.

Пример – Составить дифференциальное уравнение для электрической схемы (рисунок 1.1, *а*), в которой за входное воздействие принято напряжение $U_{вх}$, а за выходной сигнал – напряжение $U_{вых}$.



а – безынерционное звено; *б* – инерционное звено; *в* – реальное дифференцирующее звено; *г* – колебательное звено

Рисунок 1.1 – Электрическая схема динамического звена

По второму закону Кирхгоффа для схемы (см. рисунок 1.1, *а*) получается следующая система уравнений:

$$u_{вх}(t) = i(t) \cdot R_1 + i(t) \cdot R_2;$$

$$u_{вых}(t) = i(t) \cdot R_2, \tag{1.2}$$

где $i(t)$ – мгновенное значение входного тока в схеме.

$$\frac{U_{вых}(t)}{U_{вх}(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$U_{вых}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{вх}(t). \tag{1.3}$$

Обозначим коэффициент усиления

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{1.4}$$

Получаем $y\,(t) = K \cdot x(t)$ – уравнение, описывающее связь входного и выходного сигналов делителя напряжения.

Делитель напряжения является пропорциональным звеном.

Задание

Составить дифференциальное уравнения для заданных схем (см. рисунок 1.1) и записать вид звена. Варианты заданий представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	Безынерционное звено		Инерционное звено		Реальное дифференцирующее звено			Колебательное звено		
	R_1, кОм	R_2, кОм	R, кОм	C, мкФ	R_1, кОм	R_2, кОм	C, мкФ	R, кОм	L, Гн	C, мкФ
1	1	2	1	0,02	11	24	0,6	0,1	0,1	20
2	2	1	2	0,02	12	23	0,7	0,3	0,3	10
3	3	3	3	0,02	13	22	0,8	0,4	0,4	5
4	4	4	4	0,02	14	21	0,9	0,3	0,2	5
5	5	5	5	0,02	15	20	1	0,8	0,6	1
6	6	6	6	0,02	16	19	1,1	0,6	0,6	1
7	7	1	7	0,02	17	18	1,2	0,6	0,9	0,8
8	8	2	8	0,02	18	17	1,3	0,3	0,2	8
9	9	3	9	0,02	19	16	1,4	0,4	0,2	6
10	1	4	1	0,02	20	15	1,5	0,5	0,3	3
11	2	5	2	0,02	21	14	1,6	0,2	0,8	6
12	3	6	3	0,02	22	13	1,7	0,2	0,4	8
13	4	7	4	0,02	23	12	1,8	0,3	0,3	10
14	5	8	5	0,02	24	11	1,9	0,5	0,2	4
15	6	9	6	0,02	25	10	2	0,8	0,1	2
16	6	9	9	0,02	11	24	0,6	0,5	0,3	3
17	5	5	4	0,02	13	22	0,8	0,3	0,3	10
18	6	6	6	0,02	18	17	1,3	0,1	0,1	20
19	7	1	3	0,02	12	22	0,8	0,2	0,1	2
20	2	2	2	0,02	8	10	0,9	0,4	0,4	5
21	3	3	1	0,02	5	12	1,1	0,5	0,3	3
22	4	4	8	0,02	4	8	0,9	0,7	0,5	2
23	1	2	5	0,02	11	28	1,2	0,8	0,2	2
24	2	3	6	0,02	14	22	1,6	0,6	0,1	3
25	3	4	7	0,02	15	24	0,6	0,7	0,3	8
26	9	5	8	0,02	25	10	0,8	0,5	0,2	10
27	8	6	3	0,02	18	15	0,9	0,4	0,1	2
28	7	8	2	0,02	22	34	1,2	0,1	0,6	4
29	5	6	5	0,02	12	35	0,5	0,6	0,2	5
30	2	3	1	0,02	10	22	0,6	0,9	0,2	8

Контрольные вопросы

1 Какой режим описывает статическая характеристика?
2 Что такое коэффициент передачи звена?
3 Какой режим описывает уравнение динамики?
4 В чем заключается принцип суперпозиции?

2 Практическое занятие № 2. Типовые звенья

Цель работы: получение переходных характеристик динамических звеньев.

2.1 Краткие теоретические сведения

Характеристика звена – это его реакция на определенное входное воздействие.

Переходной $h(t)$ называется функция (характеристика), определяющая изменение выходной величины САУ (отдельного элемента) при подаче на вход единичного входного возмущения $1(t)$ (рисунок 2.1), при нулевых начальных условиях.

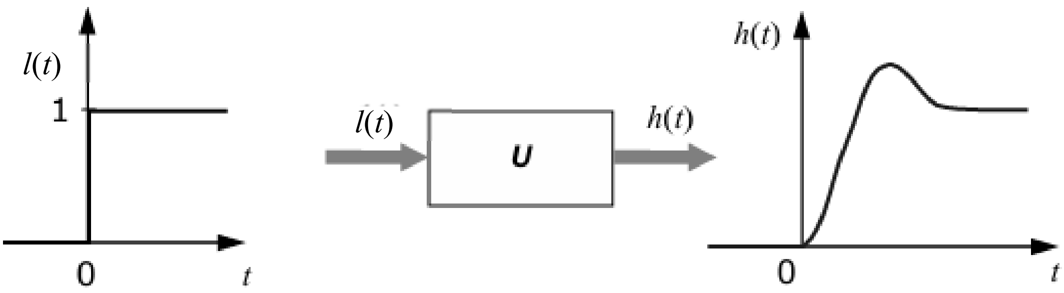


Рисунок 2.1 – Входное воздействие $x(t) = l(t)$ и переходная функция звена $h(t)$

Единичное ступенчатое входное воздействие – воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным.

Переходная функция может быть определена экспериментально или вычислена теоретически.

Если на вход подается единичный скачок $l(t)$, то его изображение по Лапласу $X(p) = L\{l(t)\} = \dfrac{1}{p}$. Зная передаточную функцию звена $W(p)$, находим изображение выходной величины, как

$$Y(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}. \tag{2.1}$$

Переходим от изображения к оригиналу, используя обратное преобразование Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}\left\{W(p) \cdot \frac{1}{p}\right\}. \tag{2.2}$$

Типовое динамическое звено САУ – это математическая модель любого элемента системы управления, отражающая определенные динамические свойства элемента вне зависимости от физической природы протекающих в нем процессов.

Типы звеньев систем автоматического регулирования различаются в зависимости от вида их передаточных функций или дифференциальных уравнений.

Различают следующие основные типовые звенья:

– безынерционное (пропорциональное или усилительное);

– инерционное первого порядка (или апериодическое);

– инерционное второго порядка;

– колебательное;

– консервативное;

– интегрирующее (идеальное и реальное);

– дифференцирующее (идеальное и реальное).

Основные типы звеньев делятся на три группы:

1) позиционные, входной и выходной сигналы которых в статическом режиме связаны между собой взаимно функцией $y(t) = k \cdot x(t)$;

2) дифференцирующие или форсирующие, выходной сигнал которых в установившемся режиме пропорционален производной по времени от входного сигнала, $y(t) = k\dfrac{dx(t)}{dt}$;

3) интегрирующие или астатические, выходной сигнал которых в установившемся режиме пропорционален интегралу по времени от входного сигнала, $y(t) = k\int x(t)dt$.

Для полной характеристики типового звена следует указать его дифференциальное уравнение, операторное уравнение, передаточную функцию, комплексную, действительную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную, логарифмическую фазовую, частотные характеристики и переходную функцию.

Задание

Для каждого из четырех звеньев, схемы которых приведены на рисунке 1.1, параметры – в таблице 1.1, выполнить следующее:

– по принципиальной схеме звена вывести дифференциальное уравнение;

– получить передаточную функцию звена $W(p)$, привести ее к типовой форме, определить параметры звена, входящие в передаточную функцию;

– используя обратное преобразование Лапласа, получить выражение для переходной характеристики звена и построить эту характеристику по характерным точкам.

Контрольные вопросы

1 Что такое переходная характеристика?

2 Как связаны время окончания переходного процесса и постоянная времени?

3 Как графически определяется постоянная времени?

3 Практическое занятие № 3. Передаточные функции

Цель работы: получение передаточных функций динамических звеньев и определение их параметров.

3.1 Краткие теоретические сведения

В теории автоматического управления широко используется специальный метод прикладного анализа – операционное исчисление, в основе которого лежит функциональное преобразование Лапласа.

Использование операционного преобразования Лапласа значительно упрощает решение дифференциальных уравнений. При этом каждой временной функции $x(t)$ или $y(t)$ соответствует функция $X(p)$ или $Y(p)$ (комплексной переменной $p = c + j\omega$, где p – оператор преобразования Лапласа).

Преобразование Лапласа выполняется в соответствии с формулой

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \tag{3.1}$$

где $f(t)$ – оригинал функции;

$F(p)$ – изображение функции по Лапласу.

Переход от оригинала к изображению называется прямым преобразованием Лапласа и имеет символическую запись:

$$F(p) = L\{f(t)\}. \tag{3.2}$$

Переход от изображения к оригиналу называется обратным преобразованием Лапласа и имеет символическую запись:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}. \tag{3.3}$$

На практике прямое и обратное преобразования осуществляются по таблицам изображений типовых функций.

Рассмотрим отдельное звено САУ, на вход которого поступает воздействие $x(t)$, а на выходе формируется сигнал $y(t)$.

Если для сигналов $x(t)$, $y(t)$ существует преобразование Лапласа

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt;$$

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \tag{3.4}$$

то передаточная функция звена определяется как отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых начальных условиях:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}. \qquad (3.5)$$

Применение преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению звена (1.1), приводит к формальной замене оператора дифференцирования комплексной переменной p в соответствующей степени:

$$\frac{d}{dt}\ \text{на}\ p,\ \frac{d^2}{dt^2}\ \text{на}\ p^2,\ \frac{d^n}{dt^n}\ \text{на}\ p^n,$$

Преобразование Лапласа, будучи применено к дифференциальному уравнению, преобразует его в алгебраическое:

$$Y(p)\cdot(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)=X(p)\cdot(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+$$

$$+b_{m-1}p+b_m)+F(p)\cdot(c_0p^k+c_1p^{k-1}), \qquad (3.6)$$

где

$$Y(p)=L[y(t)];$$

$$X(p)=L[x(t)];$$

$$F(p)=L[f(t)].$$

Тогда

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}. \qquad (3.7)$$

Передаточная функция зависит только от внутренней структуры и параметров объекта и является полной характеристикой САУ.

При нахождении изображений сложных функций удобно пользоваться свойствами преобразования Лапласа. Основные свойства приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Основные свойства Лапласа

Свойство	Оригинал	Изображение
Линейность	$a\cdot x(t)+b\cdot y(t)$	$a\cdot X(p)+b\cdot Y(p)$
Дифференцирование	$\frac{dx(t)}{dt}$	$p\cdot X(p)$
Интегрирование	$\int x(t)dt$	$\frac{1}{p}\cdot X(p)$
Подобие	$x\cdot(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{p}{\alpha}$ при $\alpha>0$
Запаздывание (теорема о смещении аргумента)	$x\cdot(t-\alpha)$	$e^{-\alpha p}\cdot X(p)$

Пример 1 – Решить операторным методом Лапласа дифференциальное уравнение (при нулевом начальном условии). Определить передаточную функцию объекта.

$$6,25\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=9x(t)-1,2\frac{dx(t)}{dt}-5\frac{du(t)}{dt}.$$

Применим к данному дифференциальному уравнению преобразование Лапласа:

$$L(6,25\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+y(t))=L(9x(t)-1,2\frac{dx(t)}{dt}-5\frac{du(t)}{dt}).$$

Применим свойства линейности:

$$6,25L\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)+4L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)+L(y(t))=9L(x(t)-1,2L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)-5L\left(\frac{du(t)}{dt}\right).$$

Применим основное свойство преобразования Лапласа (при нулевых начальных условиях):

$$6,25p^2Y(p)+4pY(p)+Y(p)=9pX(p)-1,2pX(p)-5pU(p).$$

Данное уравнение можно преобразовать, вынеся $Y(p)$ и $X(p)$ за скобки:

$$Y(p)(6,25p^2+4p+1)=X(p)(9p-1,2p)-5pU(p).$$

Разделив обе части уравнения на коэффициент при $Y(p)$, получаем:

$$Y(p)=\frac{9p-1,2p}{6,25p^2+4p+1}X(p)-\frac{5p}{6,25p^2+4p+1}U(p).$$

Обозначим передаточные функции объекта, как $W_x(p)$ и $W_u(p)$:

$$W_x(p)=\frac{9p-1,2p}{6,25p^2+4p+1};W_u(p)=-\frac{5p}{6,25p^2+4p+1}.$$

Получим уравнение $Y(p)=W_x(p)\cdot X(p)-W_u(p)\cdot U(p).$

Пример 2 – Найти оригинал функции $f(t)$, зная ее изображение:

$$F(p)=\frac{3}{p(p+4)}.$$

По таблице преобразований Лапласа можно найти оригинал функции $f(t)=\frac{1}{\alpha}[e^{\alpha t}-1]$ для изображения $F(p)=\frac{1}{p(p-\alpha)}$, которое отличается от заданного по условию.

Поэтому заданное выражение изображения необходимо преобразовать к табличному виду, учитывая пятое свойство преобразования Лапласа:

$$F(p) = \frac{3}{p(p+4)} = 3 \cdot \frac{1}{p(p-(-4))}.$$

В результате для искомого оригинала получим

$$f(t) = 3 \cdot \frac{1}{-4}[e^{-4t} - 1] = \frac{3}{4}[1 - e^{-4t}].$$

Задания

1 По заданному дифференциальному уравнению определить передаточные функции.

2 Определить передаточную функцию схемы.

Варианты заданий выдаются преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Дать определение передаточной функции.

2 Дать понятие о прямом и обратном преобразовании Лапласа, назвать его свойства.

3 Перечислить основные типовые динамические звенья и привести их дифференциальные и передаточные функции.

4 Практическое занятие № 4. Частотные характеристики

Цель работы: рассчитать и построить частотные характеристики типовых динамических звеньев.

4.1 Краткие теоретические сведения

Частотные характеристики описывают поведение звена (системы) при гармонических воздействиях на входе.

Пусть на вход звена в момент времени $t = 0$ подано гармоническое воздействие вида

$$x(t) = A_x \sin(\omega t), \tag{4.1}$$

где A_x – амплитуда;

ω – угловая частота этого воздействия.

По окончании переходного процесса на выходе звена в установившемся режиме выходная величина звена имеет вид

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \Delta\varphi), \tag{4.2}$$

где A_y – амплитуда выходных установившихся колебаний;

$\Delta\varphi$ – разность фаз между выходным и входным гармоническим сигналами.

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) – зависимость отношения амплитуд выходного и входного гармонических сигналов от частоты в установившемся режиме:

$$A(\omega) = \frac{A_y(\omega)}{A_x(\omega)}. \tag{4.3}$$

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) $\varphi(\omega)$ – зависимость разности фаз (фазового сдвига) между выходным и входным сигналами от частоты в установившемся режиме:

$$\varphi(\omega) = \Delta\varphi. \tag{4.4}$$

Если в выражение передаточной функции звена $W(p)$ подставить $p = j\omega$, то полученная частотная передаточная функция $W(j\omega)$ представляет собой комплексную амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ).

АФЧХ представляет собой отношение изображений по Фурье выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях и равных нулю воздействиях на остальных входах:

$$W(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}. \tag{4.5}$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ представляет собой комплексное число, которое можно записать как в полярной, так и декартовой системах координат:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = Re(\omega) + Im(\omega), \tag{4.6}$$

где $A(\omega)$ – модуль или амплитуда частотной передаточной функции;

$\varphi(\omega)$ – аргумент или фаза частотной передаточной функции;

$Re(\omega)$ – вещественная составляющая частотной передаточной функции;

$Im(\omega)$ – мнимая составляющая частотной передаточной функции.

Связь между перечисленными характеристиками следующая:

$$A(\omega) = \sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}. \tag{4.7}$$

Пример – Построить частотные характеристики системы с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{3}{0,5p+1}.$$

Алгоритм:

– заменяем оператор Лапласа p на $j\omega$;

– учитываем, что $j^2=-1$;

– избавляемся от мнимых членов в знаменателе, умножая числитель и знаменатель передаточной функции на комплексно-сопряжённое знаменателю;

– выделяем действительную и мнимую части;

– приводим подобные члены.

В результате выполнения данного алгоритма получаем:

$$W(j\omega)=\frac{3}{0,5j\omega+1}=\frac{3}{0,5j\omega+1}\cdot\frac{1-0,5j\omega}{1-0,5j\omega}=\frac{3-1,5j\omega}{0,25\omega^2+1}=\frac{3}{0,25\omega^2+1}-j\frac{1,5\omega}{0,25\omega^2+1};$$

$$A(\omega)=\sqrt{\left(\frac{3}{0,25\omega^2+1}\right)^2+\left(\frac{1,5\omega}{0,25\omega^2+1}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{0,25\omega^2+1}};$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}=\operatorname{arctg}\frac{-\dfrac{1,5\omega}{0,25\omega^2+1}}{\dfrac{3}{0,25\omega^2+1}}=-\operatorname{arctg}(0,5\omega);$$

$$W(j\omega)=\frac{3}{\sqrt{0,25\omega^2+1}}e^{-j\operatorname{arctg}(0,5\omega)}.$$

Для построения АЧХ, ФЧХ, АФЧХ составляется таблица, в которой используются обязательные частоты (можно и больше):

1) крайние частоты 0 и $+\infty$;

2) частоты пересечения характеристик с осями (определяются путем приравнивания числителей дробей мнимой и действительной частей к нулю и решения полученного уравнения):

– приравнивая $Re(\omega)=0$, получаем $\omega=3$;

– приравнивая $Im(\omega)=0$, $\omega=0$;

3) частоты разрыва характеристики (находят, приравнивая знаменатель нулю и решая уравнение) и близкие к ним (чуть больше – чуть меньше) частоты.

Задания

1 Построить частотные характеристики передаточной функции.

2 Определить параметры звена.

Передаточные функции для каждого варианта задаются преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Назовите виды частотных характеристик звеньев и их физический смысл.

2 Расскажите методику получения частотных характеристик по передаточной функции.

3 Как по АЧХ и ФЧХ звена можно определить его параметры?

5 Практическое занятие № 5. Логарифмические частотные характеристики

Цель работы: рассчитать и построить логарифмические частотные характеристики динамических звеньев

5.1 Краткие теоретические сведения

При исследовании САУ часто используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) $L(\omega)$, показывающие усиление мощности сигнала при прохождении через звено (систему). При их построении по оси абсцисс откладывается $\lg\omega$ и соответствующие им значения частоты ω, а по оси ординат – $L(\omega)$ (рисунок 5.1) . Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а $\lg A^2 = 2\lg A$, то усиление мощности, выраженное в отношении амплитуд в децибелах, $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$.

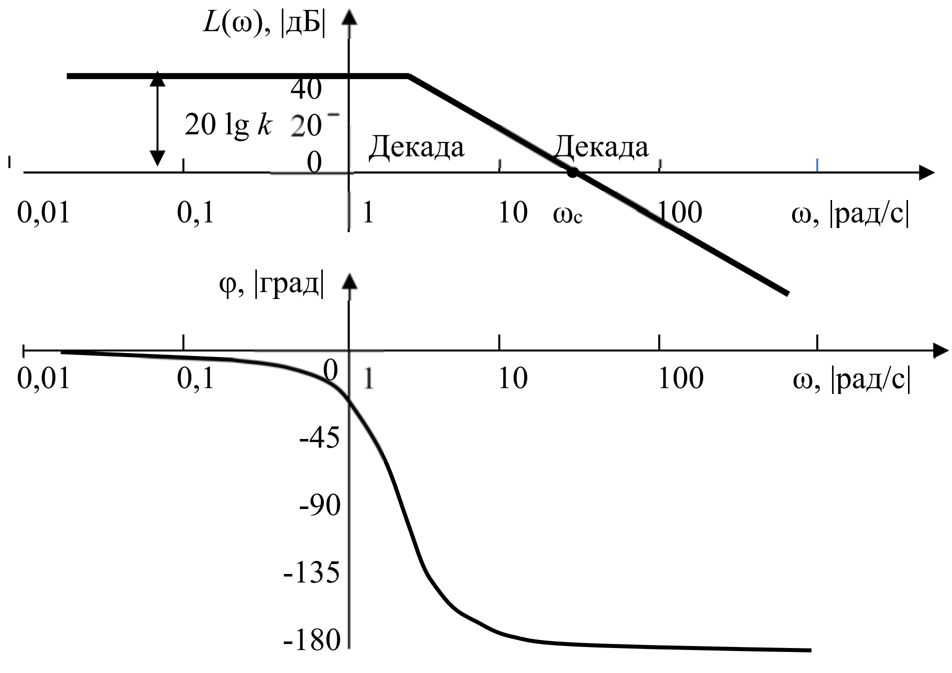


Рисунок 5.1 – Логарифмические частотные характеристики

В качестве единицы измерения частоты используют логарифмическую единицу – декаду. Частоты ω_1 и ω_2 отличаются на одну декаду, т. е. значение частоты увеличивается в 10 раз.

При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) используется та же ось частот, т. е. по оси абсцисс частота ω откладывается в логарифмическом масштабе, а по оси ординат откладываются значения углов в градусах или в радианах в равномерном масштабе.

Частота, при которой ЛАЧХ пересекает ось абсцисс, называется частотой среза ω_c, а частота, при которой ЛФЧХ пересекает уровень $-\pi$, носит название частоты переворота $\omega_{-\pi}$.

Применение ЛАЧХ обусловлено возможностью их построения почти без расчетов в виде асимптот к действительным значениям ЛАЧХ, которые меняют свой наклон при частотах, называемых сопрягающими. Кроме того, построение общей ЛАЧХ цепи последовательно соединенных звеньев можно провести сложением ЛАЧХ отдельных звеньев на графике.

Пример – Построить логарифмическую частотную характеристику системы с передаточной функцией.

$$W(p)=\frac{3}{0,5p+1};$$

$$A(\omega)=\frac{3}{\sqrt{0,25\omega^2+1}}.$$

Выражение для логарифмической амплитуды:

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}=20\lg k-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}=L_1(\omega)+L_2(\omega);$$

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\frac{3}{\sqrt{0,25\omega^2+1}}=20\lg 3-20\lg\sqrt{0,25\omega^2+1}.$$

Если $k > 1$, то $L_1(\omega) = 20\lg k > 0$ и график представляет собой прямую, параллельную оси частот на расстояние от нее $20\lg k = 9,54$.

График $L_2(\omega)=-20\lg\sqrt{0,25\omega^2+1}$ строится с выделением двух диапазонов значений частоты:

1) область низких частот

$$0 < \omega < \omega_1;$$

2) область высоких частот

$$\omega_1 < \omega \le \infty,$$

где ω_1 – частота сопряжения низкочастотной и высокочастотной областей, $\omega_1 = 1/T$.

График $L(\omega)$ (рисунок 5.2) получится графическим суммированием графиков $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$.

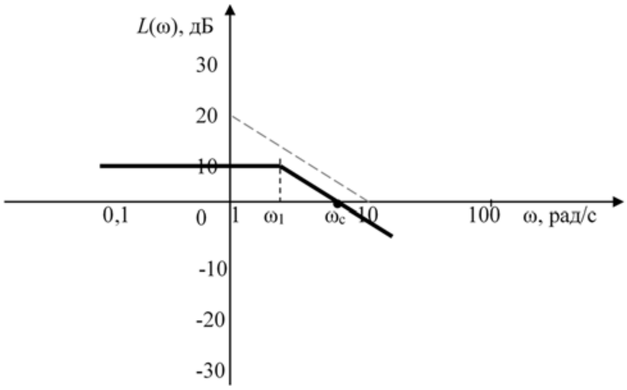


Рисунок 5.2 – Асимптотическая ЛАЧХ системы

При очень малых частотах, когда $0 < \omega \ll \omega_1$, можно считать $\omega^2 T^2 \ll 1$, $\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \approx 1$ и, соответственно, $L'_2(\omega) = -20\lg 1 = 0$, т. е. в диапазоне низких частот график $L_2(\omega) \equiv L'_2(\omega)$ совпадает с осью частот.

При больших частотах, когда $\omega_1 \ll \omega \leq \infty$, можно считать $\omega^2 T^2 \gg 1$, $\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \approx \omega T$ и, соответственно, $L''_2(\omega) = -20\lg\omega T$.

Таким образом, в области высоких частот при логарифмическом масштабе изменения частоты график $L_2(\omega) \equiv L''_2(\omega)$ будет приближаться к прямой линии, наклон которой определится по двум значениям частоты, отстоящим на декаду.

Низкочастотная и высокочастотная асимптоты графика $L_2(\omega)$ пересекаются в точке с координатами $(\omega_1, 0)$. Сложением графиков $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ получается искомая ЛАЧХ звена $L(\omega)$ в виде ломаной линии, называемой асимптотической ЛАХ.

Задание

Построить ЛАЧХ колебательного звена. Данные по вариантам задаются преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Дать определение частоте среза.

2 Методика получения ЛАЧХ и ЛФЧХ.

6 Практическое занятие № 6. Преобразование структурных схем

Цель работы: научиться определять эквивалентные передаточные функции соединений линейных звеньев.

6.1 Краткие теоретические сведения

Структурная схема модели системы – это графическое изображение математической модели системы как совокупности элементарных динамических звеньев и связей между ними.

Принято представлять соединение звеньев в виде одного звена, передаточная функция которого носит название эквивалентной передаточной функции. Выделяют три основных вида соединений линейных звеньев – последовательное (рисунок 6.1), параллельное (рисунок 6.2) и встречно-параллельное, или соединение звеньев с обратной связью (рисунок 6.3).

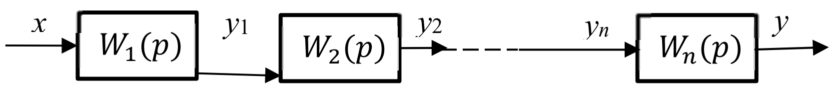


Рисунок 6.1 – Последовательное соединение звеньев передаточных функций

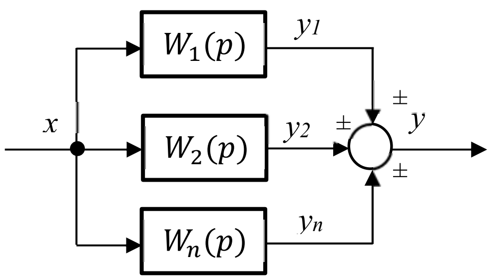


Рисунок 6.2 – Параллельное соединение звеньев передаточных функций

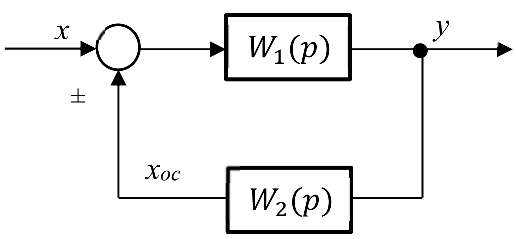


Рисунок 6.3 – Встречно-параллельное соединение звеньев передаточных функций

Последовательное соединение звеньев:

$$W_{посл}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \ldots \cdot W_n(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p).$$

Параллельное соединении звеньев:

$$W_{пар}(p)=W_1(p)+W_2(p)+\ldots+W_n(p)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}W_i(p).$$

Соединение с обратной связью (встречно-параллельное соединение):

$$W_{обр}(p)=\frac{W_1(p)}{1\pm W_1(p)\cdot W_1(p)}.$$

Основная задача структурного анализа – упрощение сложных структурных схем. Получение передаточной функции сложной структурной схемы возможно двумя путями. Первый состоит в преобразовании по определённым правилам отдельных участков структурной схемы. Подобные преобразования называются эквивалентными преобразованиями. Второй путь – применение готовой формулы (формула Мейсона) для структурной схемы любой сложности.

Формула Мейсона позволяет сразу получить передаточную функцию любого сколь угодно сложного участка схемы или всей системы в целом.

$$W(p)=\frac{1}{\Delta(p)}\cdot\sum W_{npi}(p)\cdot\Delta_i(p)\,, \qquad (6.1)$$

где $W_{npi}(p)$ – передаточные функции отдельных прямых путей от входного воздействия до выходной величины.

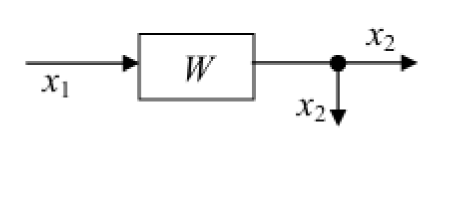
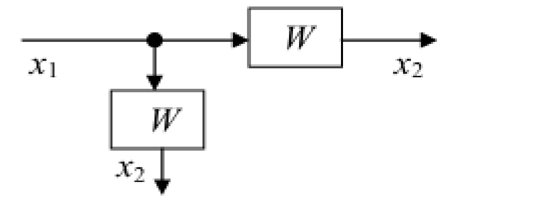
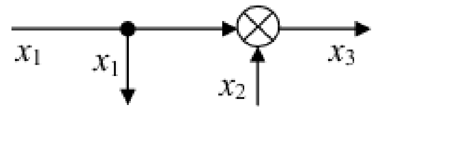
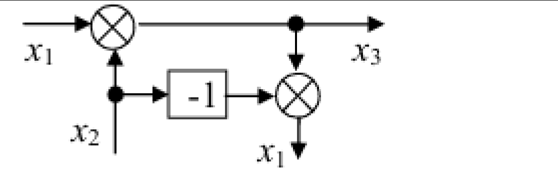
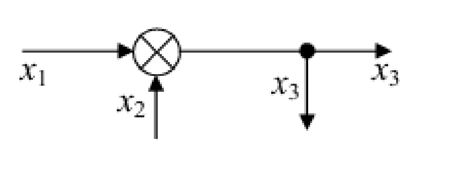
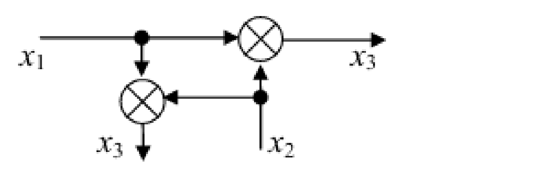
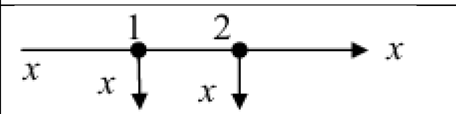
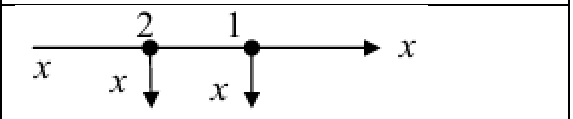
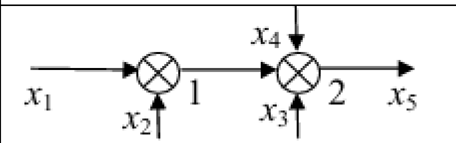
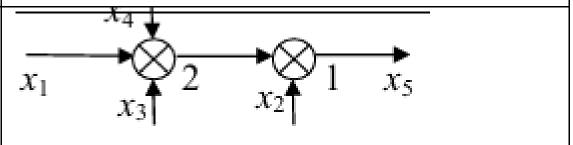
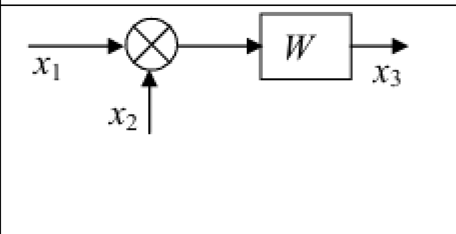
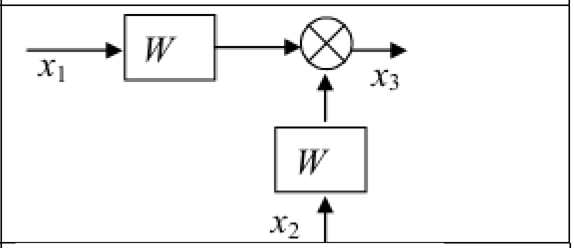
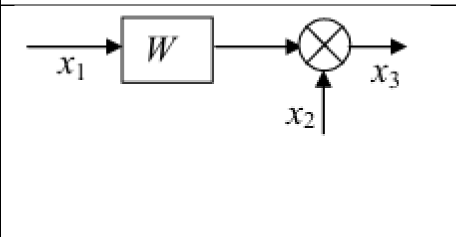
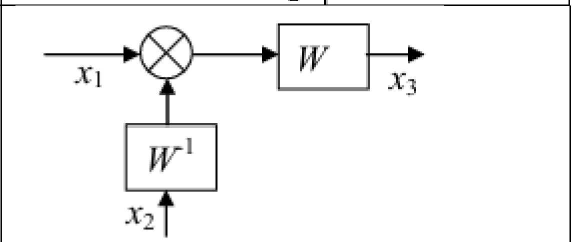
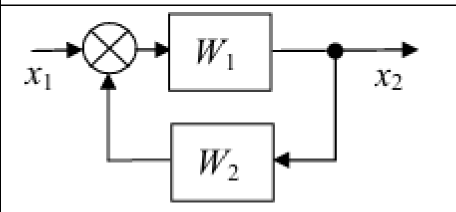
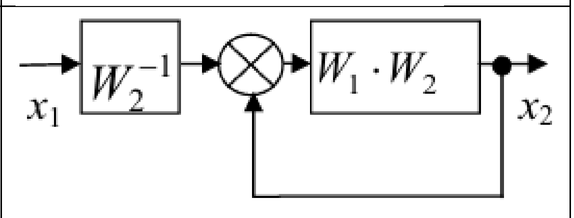
$$\Delta(p)=1-\sum_i W_i(p)+\sum_{i\neq j}W_i(p)\cdot W_j(p)-\sum_{i\neq j\neq k}W_i(p)\cdot W_j(p)\cdot W_k(p), \qquad (6.2)$$

где $W_i(p)$ в первой сумме – передаточные функции замкнутых контуров обратной связи, во второй сумме присутствуют произведения передаточных функций двух непересекающихся (т. е. не имеющих общих точек) контуров, в третьей сумме – произведения передаточных функций трёх не пересекающихся контуров и т. д.

Присутствующая в формуле (6.1) передаточная функция $\Delta_i(p)$ – это то, что остаётся от $\Delta(p)$ после изъятия из рассмотрения i-го прямого пути (при этом разрушаются все контуры обратных связей, имеющие общие точки с этим прямым путём). В выражениях (6.1) и (6.2) все передаточные функции берутся со знаком, совпадающим со знаком соответствующей прямой или обратной связи.

Правила эквивалентных преобразований приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Правила эквивалентных преобразований

Название	Исходная схема	Эквивалентная схема
Перенос узла с выхода на вход звена		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перестановка узлов		
Перестановка сумматоров		
Перенос сумматора с входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Замена звена обратной связи на единичную обратную связь		

Пример – По заданной структурной схеме (рисунок 6.4) определить передаточную функцию

Находим передаточные функции прямых каналов:

$$W_{пр1}(p) = W(p)_1 \cdot W_2(p);$$

$$W_{пр2}(p) = W_1(p) \cdot W_3(p).$$

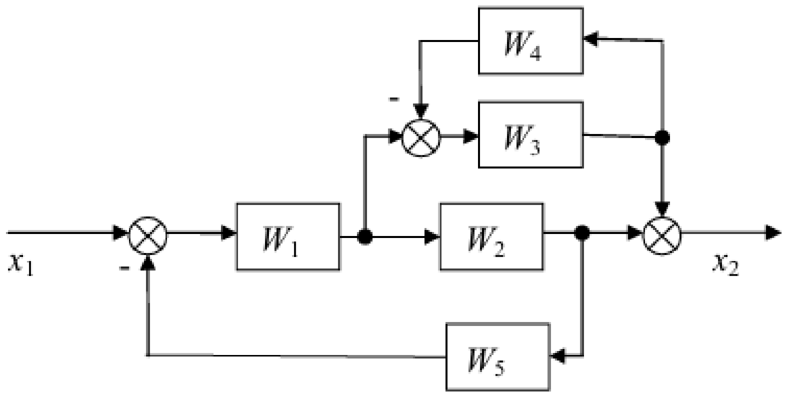


Рисунок 6.4 – Схема САУ для преобразования по правилу Мейсона

Находим передаточные функции каналов обратной связи (контуры). В этой схеме два контура обратной отрицательной связи:

$$W_{ос1}(p) = -W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_5(p);$$

$$W_{ос2}(p) = -W_3(p) \cdot W_4(p).$$

Обратные связи не пересекаются, тогда по формуле (6.2) $\Delta(p)$ будет иметь следующий вид:

$$\Delta(p) = 1 - \left(-W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_5(p) - W_3(p) \cdot W_4(p)\right) +$$
$$+ \left(-W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_5(p)\right) \cdot \left(-W_3(p) \cdot W_4(p)\right).$$

$$\Delta_1(p) = 1 + W_3(p) \cdot W_4(p).$$

При этом разрушается первая обратная связь с передаточной функцией – $W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_5(p)$ и в составе $\Delta_1(p)$ остаётся только передаточная функция второго контура обратной связи с передаточной функцией $-W_3(p) \cdot W_4(p)$. Соответственно получаем $\Delta_2(p) = 1$, поскольку при этом разрушаются обе обратные связи. Подставляя найденные передаточные функции в формулу (6.1), получаем итоговую передаточную функцию

$$W(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot (1 + W_3(p) \cdot W_4(p)) + W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_5(p) + W_3(p) \cdot W_4(p) + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_5(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)}.$$

Задание

По заданной структурной схеме на основании правил структурного преобразования и по формуле Мейсона получить эквивалентные передаточные функции. Данные по вариантам задаются преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Правила структурных преобразований.
2 Правило Мейсона.

7 Практическое занятие № 7. Устойчивость САУ

Цель работы: изучение особенностей использования алгебраических и частотных критериев устойчивости для анализа линейных САУ.

7.1 Краткие теоретические сведения

Любая система автоматического управления должна сохранять свою работоспособность при действии на неё различных возмущений.

Устойчивость системы – это свойство системы возвращаться в первоначальное состояние после прекращения воздействия, выведшего её из этого состояния. Устойчивость линейных систем не зависит от величины возмущения; система устойчивая при малых возмущениях, будет устойчивой и при больших возмущениях.

Необходимым и достаточным условием устойчивости линейных САУ в общем случае является нахождение всех корней характеристического уравнения в левой половине комплексной плоскости.

Необходимым, но недостаточным условием устойчивости линейной системы, является строгая положительность коэффициентов характеристического уравнения (при условии, что коэффициент $a_0 > 0$, чего всегда можно добиться умножением уравнения на –1). Если хотя бы один из коэффициентов характеристического уравнения будет отрицателен или равен нулю, система однозначно будет являться неустойчивой. Однако положительность всех коэффициентов характеристического уравнения еще не гарантирует устойчивости этой системы. Необходимое условие устойчивости является и достаточным условием только для систем 1-го и 2-го порядка. Уже для систем 3-го порядка оно недостаточно.

В инженерной практике используются методы, которые позволяют определить устойчивость системы без вычисления корней. Эти методы называют критерии устойчивости.

В теории автоматического управления широко используются алгебраические (критерии Гурвица и Рауса) и частотные (Михайлова и Найквиста) критерии устойчивости. Алгебраические критерии позволяют непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения судить об устойчивости системы. Частотные критерии позволяют оценивать устойчивость системы, даже если в наличии имеются экспериментальные частотные характеристики, а уравнение динамики неизвестно.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0. \tag{7.1}$$

Критерий Гурвица. Для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры определителя Гурвица были больше нуля.

Определитель Гурвица составляется из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы. В первой строке записываются все нечетные коэффициенты, начиная с a_1, и далее строка дописывается нулями до полного числа членов, равного n. Во второй строке записываются все четные коэффициенты, начиная с a_0. Третья и четвертые строки – это первые две, сдвинутые на один элемент вправо, пятая и шестая строки – это те же две строки, сдвинутые еще на один элемент вправо и т. д. до полного числа строк, равного n. В результате определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Диагональные миноры определителя Гурвица k-го порядка Δk составляются отчеркиванием в матрице k строк и k столбцов.

Условия устойчивости: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$; $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$.

Уравнение границы устойчивости: $a_n \Delta_{n-1} = 0$.

Алгебраический критерий устойчивости не работает, если передаточная функция системы имеет запаздывание. В этом случае характеристическое выражение замкнутой системы полиномом не является и его корни определить невозможно.

Для определения устойчивости в данном случае используются частотные критерии Михайлова и Найквиста.

Критерий Михайлова. Частотный критерий Михайлова позволяет судить об устойчивости замкнутой на основании годографа функции, полученной по виду характеристического уравнения (7.1).

Произведем в данном характеристическом уравнении замену оператора Лапласа p на произведение $j\omega$:

$$D(j\omega) = a_0 j\omega^n + a_1 j\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1} j\omega + a_n . \tag{7.2}$$

Из уравнения (7.2) получим комплексную функцию

$$D(j\omega) = Re[D(j\omega)] + jIm[D(j\omega)], \tag{7.3}$$

где $Re[D(j\omega)]$ – действительная часть, полученная из членов $D(j\omega)$, содержащих четные степени ω;

$Im[D(j\omega)]$ – мнимая часть, полученная из членов $D(j\omega)$ с нечетными степенями ω.

Изображение функции (7.3) в комплексной плоскости при изменении частоты ω в пределах [0, +∞) носит название годографа Михайлова.

Формулировка критерия Михайлова. Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова, начинаясь при нулевой частоте (ω = 0) на положительной вещественной полуоси, последовательно обходил в положительном направлении (против часовой стрелки) при возрастании частоты ω от 0 до +∞ *n* квадрантов комплексной плоскости, где *n* – степень характеристического уравнения САУ.

Если годограф Михайлова проходит через начало координат, то говорят, что система находится на границе устойчивости.

Годограф Михайлова для различных типов систем представлен на рисунке 7.1.

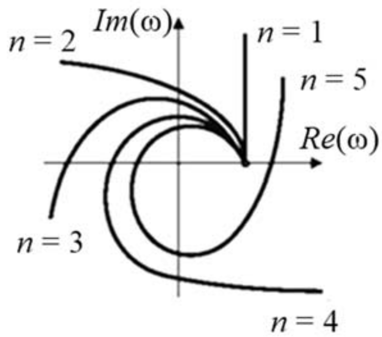


Рисунок 7.1 – Годограф Михайлова для устойчивых систем

Критерий устойчивости Найквиста. Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой САУ по АФХ разомкнутой системы.

Различают формулировки критерия для случаев, когда система в разомкнутом состоянии устойчива и неустойчива.

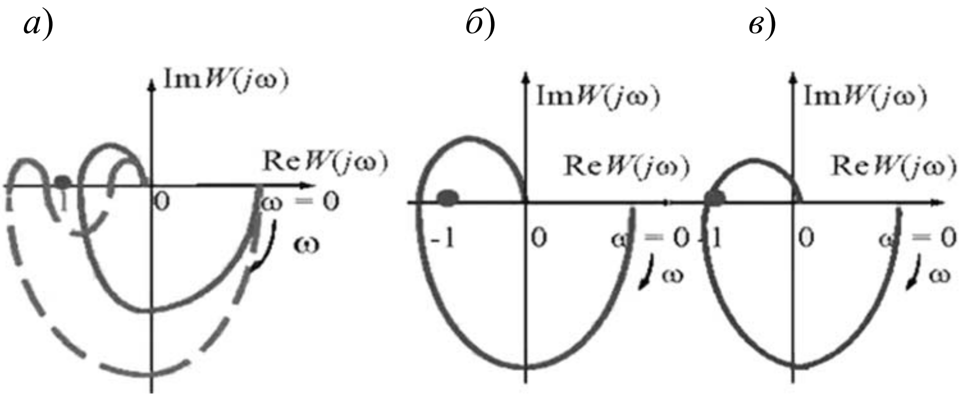
Формулировка критерия. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы не охватывала точку с координатами (–1; *j*0). Если АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку с координатами (–1; *j*0), то система находится на границе устойчивости.

На рисунке 7.2 показаны АФХ системы.

Логарифмический частотный критерий устойчивости. Применительно к логарифмическому критерию условие устойчивости можно сформулировать следующим образом: система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если ордината логарифмической фазово-частотной характеристики (аргумент АФЧХ) на частоте среза $\omega_{ср}$ системы по абсолютной величине меньше, чем 180°, т. е. если $|\varphi(\omega_{ср})| < 180°$.

Частота, на которой $|W(j\omega)| = 1$ называется частотой среза $\omega_{ср}$. Величина $\Delta\varphi = 180° - |\varphi(\omega_{ср})|$, называется запасом устойчивости по фазе. Запас устойчивости по модулю (амплитуде) $\Delta L = 1 - |W(j\omega)|$.

Запас устойчивости по амплитуде ΔL – это величина допустимого увеличения общего коэффициента усиления разомкнутой системы на частоте переворота ω_n, при котором замкнутая система окажется на границе устойчивости (рисунок 7.3).



а – годограф для устойчивой САУ; *б* – годограф для неустойчивой САУ; *в* – годограф для САР, находящейся на границе устойчивости

Рисунок 7.2 – Годографы Найквиста

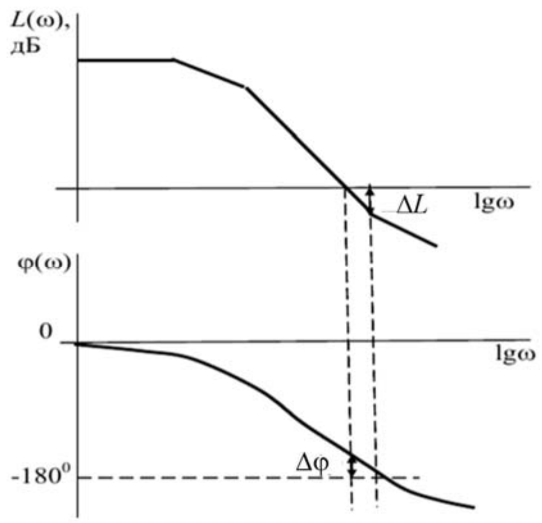


Рисунок 7.3 – Логарифмические характеристики систем

Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ – это величина допустимого увеличения запаздывания по фазе разомкнутой системы на частоте среза $\omega_{ср}$, при котором замкнутая система окажется на границе устойчивости.

Задание

Используя все известные критерии, по передаточной функции разомкнутой системы оценить её устойчивость в замкнутом состоянии. Данные по вариантам задаются преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте основное условие устойчивости линейных систем.

2 Сформулируйте критерий Найквиста (частотный) устойчивости линейной системы.

3 Изложите понятие и смысл запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

8 Практическое занятие № 8. Показатели качества САУ

Цель работы: изучение основных качественных показателей САУ в переходном и установившемся режимах, определение статической и астатической ошибок.

8.1 Краткие теоретические сведения

Показатели качества процесса управления – требования, определяющие поведение системы в установившемся и переходном процессах обработки заданного воздействия, которые условно можно разделить на три группы:

1) показатели качества, характеризующие устойчивость системы. К ним относятся запасы устойчивости по амплитуде ΔL и фазе $\Delta\varphi$;

2) показатели качества, характеризующие точность системы, которые оцениваются ошибкой регулирования;

3) показатели качества, характеризующие качество переходных процессов.

Качество переходных процессов обычно оценивается по переходной характеристике (реакции системы на единичный ступенчатый входной сигнал) и зависит от начальных условий и от характера воздействия, оказываемого на систему.

На практике качество процесса управления может быть определено визуально по графику переходной кривой и с помощью методов, дающих конкретные числовые значения.

Показатели качества могут быть прямыми и косвенными. В свою очередь они могут быть статическими и динамическими.

Динамические показатели характеризуют переходной процесс, а статические – установившийся режим.

Качество управления, т. е. реакцию системы на входные воздействия, проверяют отдельно для задающего $x(t)$ и возмущающего $f(t)$ воздействий, при этом одно из них приравнивается к нулю.

При ступенчатом входном воздействии $h(t) = l(t)$ можно наблюдать три вида переходных процессов, показанных на рисунке 8.1, при этом возмущающее воздействие считается отсутствующим: монотонный 1, апериодический 2, колебательный 3.

На рисунке 8.2 представлен наиболее типичный вид переходной функции $h(t)$, по которой можно определить прямые показатели качества:

– t_P – время регулирования (время переходного процесса $t_{п.п}$), Это время, после которого величина $h(t) - h_y \leq \Delta$, где $\Delta = 5\ \%\ h_y$;

– $t_н$ – время нарастания, при котором регулируемая величина первый раз пересечет переходную характеристику $h(t)$ с уровнем установившегося значения $h_у$;

– $\sigma = [(h_{\max} - h_у)\cdot 100\ \%]/h_у$ – перерегулирование в процентах, обычно не превышает 10 %///30 %;

– $\mu = h_{\max 2} - h_у)\cdot 100\ \%/h_{\max 1} - h_у$ – колебательность. Если система устойчива, то коэффициент колебательности будет лежать в пределах от 0 % до 99 %. При коэффициенте колебательности 100 % и более система будет неустойчивой;

– ψ – степень затухания;

– $\Delta_{cm}(\varepsilon)$ – статическая ошибка. Это разница между заданным и установившимся значением регулируемой величины.

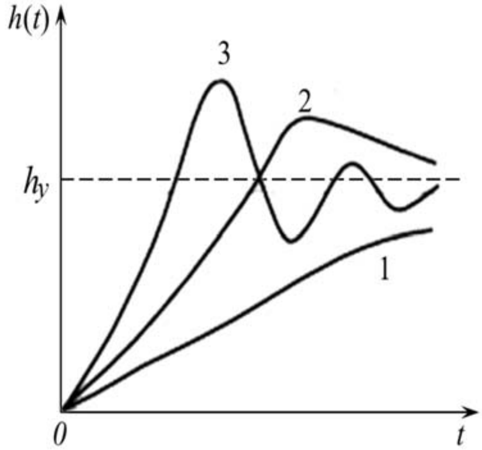


Рисунок 8.1 – Возможные переходные процессы при ступенчатом входном воздействии

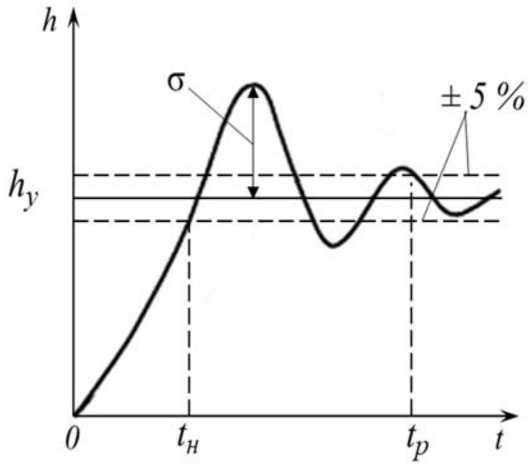


Рисунок 8.2 – Определение прямых показателей качества регулирования по переходной функции по задающему воздействию

К косвенным оценкам качества относятся корневые, частотные и интегральные оценки качества.

По положению корней характеристического уравнения, ближайшим к мнимой оси комплексной плоскости (рисунок 8.3), определяют:

– степень устойчивости η;

– показатель колебательности в системе $\mu = \mathrm{tg}\psi$;

– приближенно время переходного процесса $t_р = 3/\eta$.

Частотные оценки определяются по частотным характеристикам разомкнутой системы, представленным в виде годографа АФЧХ $W_р(j\omega)$ (рисунок 8.4, *а*) или в виде логарифмических амплитудно-частотной $L_р(\omega)$ и фазочастотной $\varphi_р(\omega)$ характеристик (рисунок 8.4, *б*).

Частота среза ω_c, определяемая из условия $|W_р(j\omega_c)| = 1$ или $L_р(\omega_c) = 0$, служит оценкой ширины полосы частот, пропускаемых системой и характеризует быстродействие системы. С увеличением частоты среза уменьшается время регулирования.

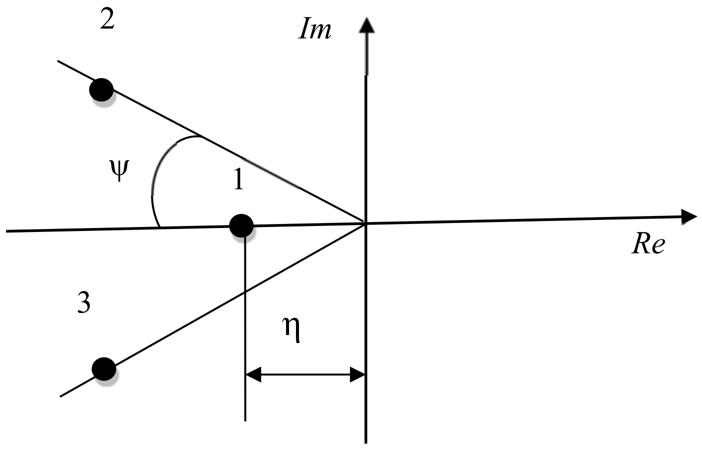
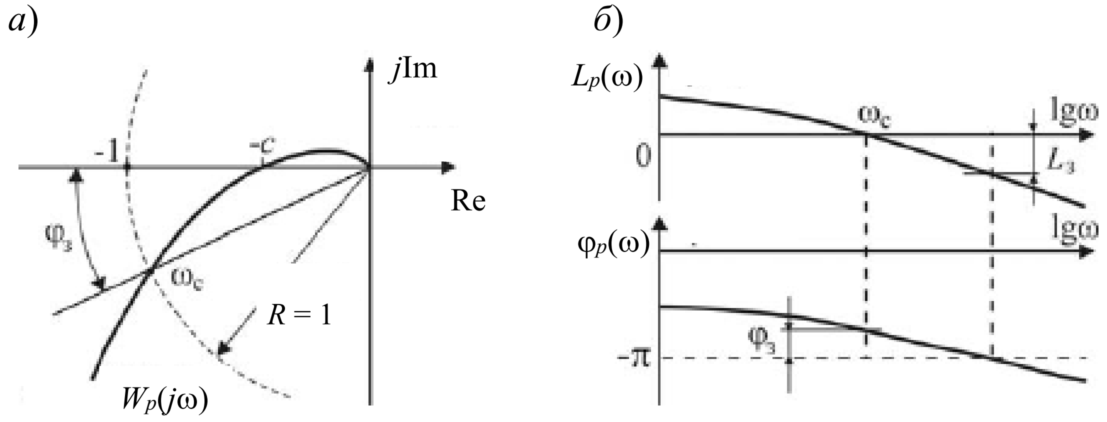


Рисунок 8.3 – Определение степени устойчивости и колебательности



а – с использованием АФЧХ; *б* – с использованием ЛАЧХ

Рисунок 8.4 – Определение частоты среза ω_c и запасов устойчивости

Пример – По переходной функций по задающему воздействию (рисунок 8.5) определить показатели качества регулирования.

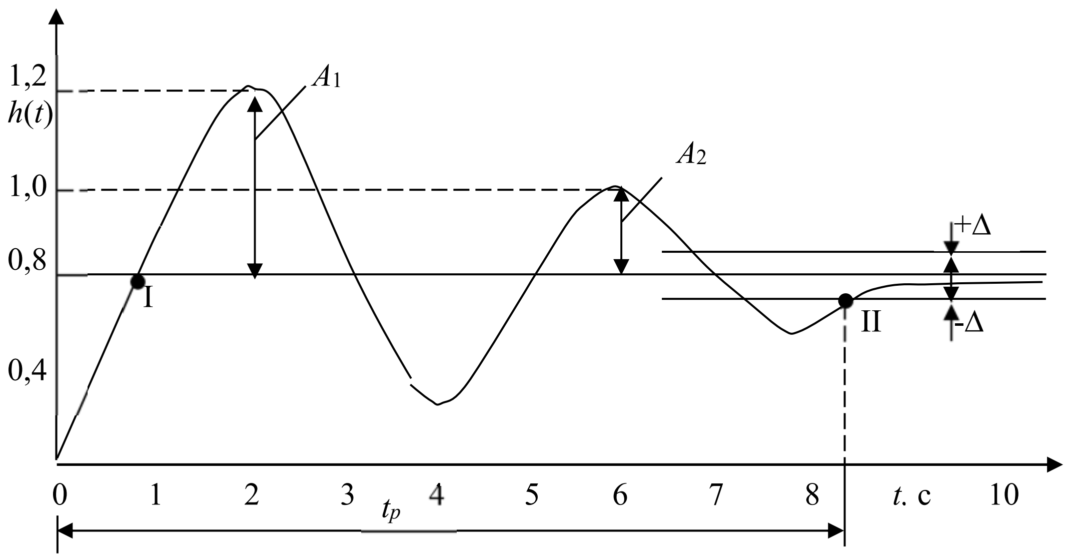


Рисунок 8.5 – График переходного процесса по задающему воздействию

Определим по рисунку значения основных величин, требуемых для расчета показателей качества регулирования:

– заданное значение регулируемой величины $x_{вх}$ $(t) = 1$;

– установившееся значение регулируемой величины $h_у$ $(t) = 0{,}8$;

– максимальное значение регулируемой величины $h_{\max 1}$ $(t) = 1{,}2$;

– второе максимальное значение регулируемой величины $h_{\max 2}$ $(t) = 1$;

– допустимое отклонение переходной характеристики $h(t)$ от установившегося значения $h_{уст}(t)$ $\Delta = \pm 0{,}05 \cdot h_у(t) = \pm 0{,}05 \cdot 0{,}8 = \pm 0{,}04$.

Для определения времени регулирования $t_Р$ проведем горизонтальную линию, показывающую верхнюю границу коридора 2Δ (в нашем случае его можно называть «5-процентный коридор»), на уровне $h_у$ $(t) + \Delta = 0{,}8 + 0{,}04 = 0{,}84$ с;

– время нарастания выходного сигнала до 10 % от $h_у(t)$ $t_{н10\,\%} = 0{,}1$ с;

– время нарастания выходного сигнала до 90 % от $h_у(t)$ $t_{н\,90\%} = 0{,}8$ с.

Определяем время нарастания выходного сигнала $t_н = t_{н90\,\%} - t_{н10\,\%} = 0{,}8 - 0{,}1 = 0{,}7$ с.

Определяем перерегулирование:

$$\sigma = \frac{1{,}2 - 0{,}8}{0{,}8} \cdot 100\,\% = 50\,\%.$$

Находим колебательность:

$$\mu = \frac{1 - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} \cdot 100\,\% = 50\,\%.$$

Определяем степень затухания переходного процесса:

$$\psi = 1 - \mu = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Число колебаний. Посчитаем число перерегулирований, находящихся за пределами построенного 5 процентного коридора. Имеем: $N = 2$.

Статическая ошибка. $\Delta_{ст}(\varepsilon) = x_{вх}(t) - h_у(t) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

Задания

Определить показатели качества регулирования:

– по переходной функции по задающему воздействию;

– по переходной функции по возмущающему воздействию.

Данные по вариантам задаются преподавателем.

Контрольные вопросы

1 Перечислите прямые показатели качества регулирования.

2 Приведите формулу перерегулирования.

3 Опишите порядок определения времени регулирования.

4 Приведите формулу колебательности.

5 Приведите формулу статической ошибки регулирования.

Список литературы

1 **Сеславин, А. И.** Теория автоматического управления. Линейные, непрерывные системы : учебник / А. И. Сеславин. – М. : ИНФРА-М, 2022. – 314 с.

2 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления : учебник и практикум / Д. П. Ким. – М. : Юрайт, 2025. – 309 с.

3 **Ягодкина, Т. В.** Теория автоматического управления : учебник и практикум / Т. В. Ягодкина, В. М. Беседин. – М. : Юрайт, 2025. – 461 с.

4 **Антимиров, В. М.** Системы автоматического управления : учеб. пособие / В. М. Антимиров ; под науч. ред. В. В. Телицина. – М. : Юрайт, 2018. – 92 с.

5 **Жмудь, В. А.** Системы автоматического управления высшей точности : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Жмудь, А. В. Тайчиначев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2018. – 211 с.

6 **Кудинов, Ю. И.** Теория автоматического управления (с использованием MATLAB-SIMULINK) : учеб. пособие / Ю. И. Кудинов, Ф. Ф. Пащенко. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2018. – 312 с. : ил.

7 **Кузьмин, А. В.** Теория систем автоматического управления : учебник / А. В. Кузьмин, А. Г. Схиртладзе. – Старый Оскол : ТНТ, 2016. – 224 с.

8 **Сазонов, Г. Г.** Основы автоматического управления : учеб. пособие / Г. Г. Сазонов. – Старый Оскол : ТНТ, 2016. – 236 с.

9 **Анхимюк, В. Л.** Теория автоматического управления / В. Л. Анхимюк, О. Ф. Опейко, Н. Н. Михеев. – Мн. : ДизайнПРО, 2000. – 351 с.

10 **Брюханов, В. Н.** Теория автоматического управления / В. Н. Брюханов, М. Г. Косов, С П. Протопопов ; под ред. Ю. М. Соломенцева. – 3-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2000. – 268 с. : ил.