МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 6-05-0714-02 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», 6-05-0714-03 «Инженерно-техническое проектирование и производство материалов и изделий из них», 6-05-0715-07 «Эксплуатация наземных транспортных и технологических машин и комплексов» и 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» заочной формы обучения

Часть 1

Могилев 2026

УДК 531
ББК 22.21
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «1» декабря 2025 г., протокол № 8

Составители: канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов;
канд. техн. наук, доц. Д. М. Макаревич;
ст. преподаватель С. В. Гонорова;
ст. преподаватель А. Н. Юманова

Рецензент канд. техн. наук, доц. Е. В. Ильюшина

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теоретическая механика» для студентов специальностей 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 6-05-0714-02 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», 6-05-0714-03 «Инженерно-техническое проектирование и производство материалов и изделий из них», 6-05-0715-07 «Эксплуатация наземных транспортных и технологических машин и комплексов» и 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Содержат материал для подготовки к аудиторной контрольной работе.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск Д. И. Якубович

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение…………………………………………………………………….. 5
1 Статика……………………………………………………………………….. 6
1.1 Понятия теоретической механики……………………………….. 6
1.2 Аксиомы статики…………………………………………………….. 6
1.3 Связи и их реакции. Принцип освобождаемости от связей………… 7
1.4 Проекции силы на ось и на плоскость……………………………… 9
1.5 Условия равновесия системы сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил………………………………………………………….. 9
1.6 Момент силы относительно точки…………………………….. 11
1.7 Пара сил………………………………………………………………. 12
1.8 Приведение системы сил, произвольно расположенных на плоскости, к заданному центру…………………………………………….….. 13
1.9 Условия и уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости. Теорема Вариньона………………………..….. 14
1.10 Сосредоточенные и распределенные силы………………………. 16
1.11 Момент силы относительно оси……………………………….... 17
1.12 Равновесие системы сил, расположенных в пространстве. Случай параллельных сил…………………………………………………………….. 18
1.13 Равновесие сочлененных систем тел……………………………… 19
1.14 Равновесие тел при наличии трения скольжения…………………… 21
1.15 Равновесие тела при наличии трения качения……………………. 23
1.16 Расчет ферм…………………………………………………………. 24
2 Кинематика………………………………………………………….. 26
2.1 Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки.. 26
2.2 Скорость и ускорения движущейся точки при векторном способе задания ее движения………………………………………………………….. 27
2.3 Скорость и ускорение точки при координатном способе задания ее движения………………………………………………………………………. 28
2.4 Скорость и ускорение точки при естественном способе задания ее движения………………………………………………………………………. 30
2.5 Поступательное движение твердого тела………………………….. 31
2.6 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси….. 32
2.7 Скорость и ускорение точек тела при вращательном движении……. 34
2.8 Плоскопараллельное движение твердого тела…………………….. 35
2.9 Определение скоростей точек плоской фигуры……………………... 36

2.10 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела, движущего плоскопараллельно…………………………………………………………………. 37
2.11 Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей……………………………………………….. 37
2.12 Некоторые частные случаи определения положения мгновенного центра скоростей…………………………………………………………... 39
2.13 Сложное движение точки……………………………………….. 41
2.14 Теорема сложения скоростей и ускорений при сложном движении точки……………………………………………..…………… 42
2.15 Ускорение Кориолиса…………………………………………… 43
Список литературы………………………………………………… 44
Приложение А………………………………………………………… 45

Введение

Основной задачей методических рекомендаций является оказание помощи студенту при подготовке к аудиторной контрольной работе по разделам теоретической механики «Статика» и «Кинематика». При положительной оценке контрольной работы студент допускается к сдаче зачета или экзамена по указанным разделам дисциплины «Теоретическая механика».

Контрольная работа включает в себя два теоретических вопроса (один по разделу «Статика», второй – по разделу «Кинематика») и одну задачу на применение основных законов и принципов раздела «Статика» или «Кинематика».

В методических рекомендациях содержится минимум материалов, необходимый для ответов на теоретические вопросы, а также примеры решения задач, тематика которых совпадает с тематикой задач, представленных при проведении аудиторной контрольной работы.

Рецензированию подлежат только те контрольные работы, в которых содержится ответ на один теоретический вопрос и дано решение предложенной задачи. Преподаватель оценивает полноту ответов на теоретические вопросы, правильность решения задачи и делает окончательное заключение о получении зачета.

1 Статика

1.1 Понятия теоретической механики

Теоретическая механика – дисциплина фундаментальная. С необходимостью применять содержащиеся в ней знания приходится постоянно сталкиваться не только на производствах, но и в быту; не только инженерам, но и гуманитариям.

Без знания теоретической механики невозможно качественно изучать сопротивление материалов, детали машин, теорию механизмов и машин, подъёмные и транспортные устройства и ряд других учебных предметов.

При изучении данного курса приследуется цель: помочь будущему специалисту освоить минимум содержащихся в теоретической механике знаний.

Современная техника ставит перед инженерами множество задач, решение которых связано с исследованием механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называют происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел или их частей в пространстве. Под механическим взаимодействием понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение положения этих тел в пространстве или изменение их формы (деформация).

Теоретическая механика – наука, в которой изучают наиболее общие законы механического движения и механического взаимодействия.

В основе теоретической механики лежат законы классической механики (законы Ньютона), которые установлены путем обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений, нашедшие подтверждение в процессе всей общественно-производственной практики человечества.

Теоретическая механика состоит из трех основных частей: статики, кинематики и динамики.

Статика изучает законы равновесия материальных тел и способы преобразования систем сил из сложных в более простые.

Кинематика изучает движение материальных тел с геометрической точки зрения, т. е. без учета сил, вызывающих эти движения.

Динамика изучает движение материальных тел с учетом сил, вызывающих эти движения, и массы тел.

Для изучения теоретической механики необходимо владеть элементарной и высшей математикой, основами физики и начертательной геометрии.

1.2 Аксиомы статики

Аксиома инерции. Под действием уравновешенной системы сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Аксиома равновесия двух сил. Если тело находится в равновесии под действием двух сил (рисунок 1.1), то эти силы равны по величине, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Аксиома присоединения или исключения уравновешенной системы сил. Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему уравновешенных сил.

Следствие: не нарушая состояния тела, точку приложения силы можно переносить вдоль линии её действия на любое расстояние.

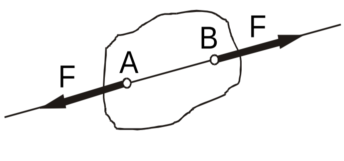


Рисунок 1.1

Аксиома параллелограмма сил. Равнодействующая двух пересекающихся сил (рисунок 1.2) проходит через точку их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах. Вектор равнодействующей и его модуль можно найти по формулам

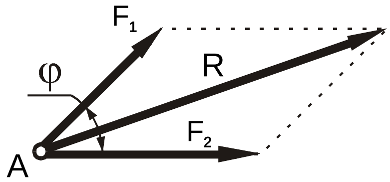


Рисунок 1.2

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi}.$$

1.3 Связи и их реакции. Принцип освобождаемости от связей

Тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется свободным (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называют **несвободным**.

Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют **связью**.

Примерами несвободных тел являются: груз, лежащий на столе; дверь, закрепленная на петлях, и т. д. Связями в этих случаях будут: для груза – плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери – петли, не дающие ей отойти в сторону от косяка двери.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто реакцией связи.

Активные силы – силы, не зависящие от связей.

Значение реакций связей зависит от активных сил и наперед неизвестно (если никакие другие силы на тело не действуют, реакции равны нулю); для их определения надо решить соответствующую задачу механики.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Когда связь может препятствовать перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции такой связи наперед неизвестно и должно находиться в результате решения задачи статики. Правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач механики важную роль.

Одним из основных положений механики является принцип освобождаемости от связей, согласно которому всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их действие реакциями (рисунок А.1).

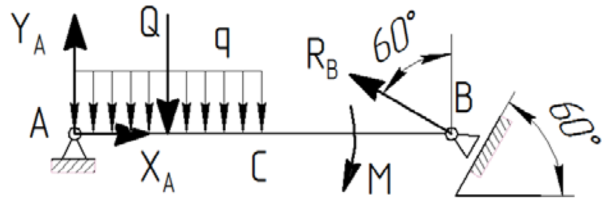


Рисунок 1.3

Задача 1. Определить момент M пары сил, при котором реакция опоры B равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = 150 Н/м, размеры $AC = CB = 2$ м (рисунок 1.3).

Решение

Применим принцип освобождаемости от связей и заменим связи соответствующими реакциями (см. рисунок А.1). Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0;\ -Q \cdot \frac{AC}{2} - M + R_B \cdot \cos 60° \cdot AB = 0.$$

Так как сила $Q = q{\cdot}AC$, то $M = R_B \cdot \cos 60° \cdot AB - q \cdot AC \cdot \dfrac{AC}{2} = 0.$

$$M = 250 \cdot \cos 60° \cdot 4 - 150 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 200 \text{ Н·м}.$$

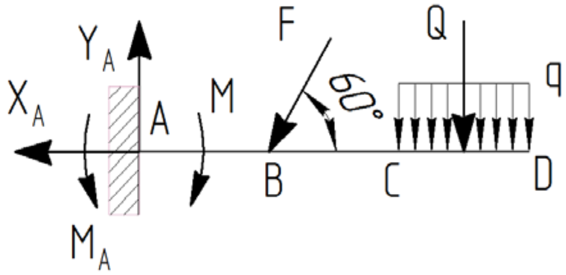


Рисунок 1.4

Задача 2. К балке AD приложена пара сил с моментом M = 200 Н·м, распределенная нагрузка интенсивностью q = 20 Н/м и сила F. Какой должна быть эта сила, для того чтобы момент в заделке A равнялся 650 Н·м, если размеры $AB = BC = CD = 2$ м (рисунок 1.4).

Решение

Применим принцип освобождаемости от связей и заменим связи соответствующими реакциями. Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0;\ M_A - M - F \cdot \sin 60° \cdot AB - Q \cdot \left(AC + \frac{CD}{2} \right) = 0.$$

Так как сила $Q = q{\cdot}CD$, то

$$M_A - M - F \cdot \sin 60° \cdot AB - q \cdot CD \cdot \left(AC + \frac{CD}{2} \right) = 0.$$

$$F = \frac{M_A - M - q \cdot CD \cdot \left(AC + \frac{CD}{2} \right)}{\sin 60° \cdot AB} = \frac{650 - 200 - 20 \cdot 2 \cdot \left(4 + \frac{2}{2} \right)}{\sin 60° \cdot 2} = 144{,}3 \text{ Н.}$$

1.4 Проекции силы на ось и на плоскость

Проекцией силы на ось называют скалярную величину, равную взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора силы на эту ось (рисунок 1.5).

Проекции сил на оси x и y можно определить по следующим формулам:

$$F_x = F \cdot \vec{i} = F \cdot \cos\alpha;$$

$$F_y = F \cdot \vec{j} = F \cdot \sin\alpha.$$

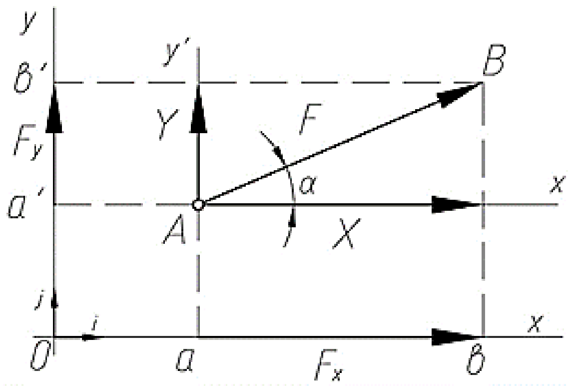


Рисунок 1.5

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

Проекция будет положительной, если угол α острый; отрицательной – если тупой. Если сила перпендикулярна к оси, то проекция равна 0.

Проекцией силы на плоскость Oxy называется вектор F_{xy}, заключенный между проекциями начала и конца вектора силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рисунок 1.6). Проекции силы на плоскости и на координатные оси определяются следующими зависимостями:

$$F_{xy} = F \cdot \cos\beta;\; F_x = F_{xy} \cdot \cos\gamma = F \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma;$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\gamma = F \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma;\;\; F_z = F \cdot \sin\beta.$$

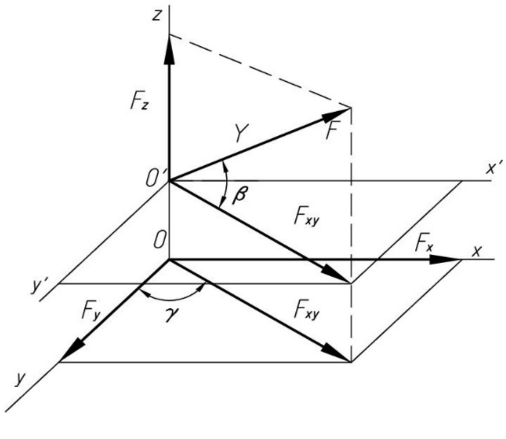


Рисунок 1.6

1.5 Условия равновесия системы сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, образуют систему сходящихся сил. Пусть задана система сходящихся сил (рисунок 1.7) $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$. Равнодействующая система сходящихся сил равна векторной сумме всех сил системы и проходит через точку пересечения их линий действия:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i.$$

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраической сумме проекций всех сил системы на соответствующие оси.

$$R_X = \sum F_{iX}; \; R_У = \sum F_{iУ}; \; R_Z = \sum F_{iZ} \, .$$

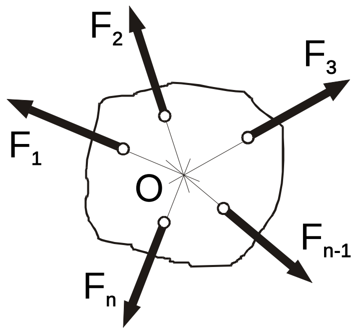


Рисунок 1.7

Вычислив проекции равнодействующей, можно определить ее модуль и направляющие косинусы:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_У^2 + R_Z^2} \, ;$$

$$\cos\alpha_R = \frac{R_X}{R}; \quad \cos\beta_R = \frac{R_У}{R}; \quad \cos\gamma_Z = \frac{R_Z}{R},$$

где α_R, β_R, γ_R – углы, образуемые равнодействующей с осями *x*, *y* и *z* соответственно.

При равновесии системы сходящихся сил $R = 0$ и сумма проекций всех сил системы на три координатные оси равна нулю.

$$\sum F_{iX} = 0; \; \sum F_{iУ} = 0; \; \sum F_{iZ} = 0 \, .$$

Для системы сходящихся сил, расположенных в одной плоскости, получаем два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = 0; \; \sum F_{iУ} = 0 \, .$$

Если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, то эти силы лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются в одной точке.

Задача 3. Груз удерживается в равновесии двумя стержнями *AC* и *BC*, шарнирно соединенными в точках *A*, *B* и *C*. Стержень *BC* растянут силой $F_2 = 45$ Н, а стержень *AC* сжат силой $F_1 = 17$ Н. Определить вес груза, если заданы углы $\alpha = 15^o$ и $\beta = 60^o$ (рисунок 1.8).

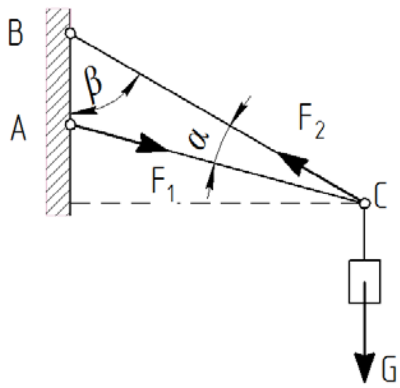


Рисунок 1.8

Решение

Шарнир *C* находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил:

$$\vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \, .$$

Составим уравнение равновесия:

$$\sum F_Y = 0;$$

$$-G + F_2 \cdot \cos 60° - F_1 \cdot \sin 15° = 0; \quad G = F_2 \cdot \cos 60° - F_1 \cdot \sin 15°.$$

Подставляя значения сил, получим:

$$G = 45 \cdot \cos 60° - 17 \cdot \sin 15° = 18{,}1 \text{ Н}.$$

1.6 Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки (центра) – вектор, численно равный $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$.

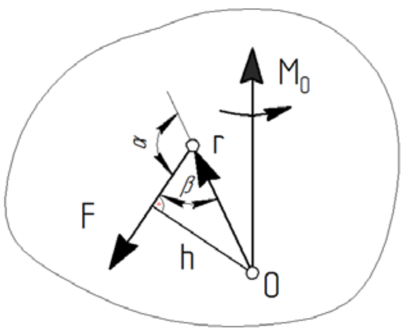


Рисунок 1.9

Направление вектора $\vec{M}_0$ перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, наблюдается происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 1.9).

Плечо силы h – кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы F (см. рисунок 1.9).

$$M_O = \pm F \cdot h.$$

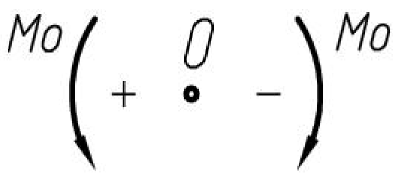


Рисунок 1.10

На плоскости момент силы относительно точки O считают положительным, если сила стремится вращать тело против хода часовой стрелки, в обратном – отрицательным (рисунок 1.10).

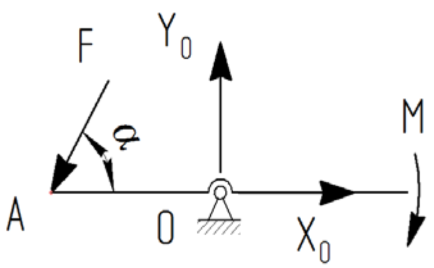


Рисунок 1.11

Задача 4. На рычаг с неподвижной осью O действуют пара сил с моментом M = 3 Н·м и сила F. Определить модуль силы F, при которой рычаг находится в равновесии, если угол α = 45º, длина AO = 0,3 м (рисунок 1.11).

Решение

Применим принцип освобождаемости от связей и разложим реакцию шарнира O на две составляющие: X_O и Y_O.

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_O = 0; \; -M + F \cdot \sin 45° \cdot AO = 0,$$

откуда

$$F = \frac{M}{\sin 45^\circ \cdot AO}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$F = \frac{3}{\sin 45^\circ \cdot 0,3} = 14,14 \text{ Н}.$$

1.7 Пара сил

Две параллельные, равные по величине, направленные в противоположные стороны и не лежащие на одной прямой силы (рисунок 1.12), называют парой сил.

Плоскость, в которой расположены силы пары – плоскость действия пары сил.

Суммарная проекция сил пары на любую ось равна нулю, однако данные силы не уравновешиваются.

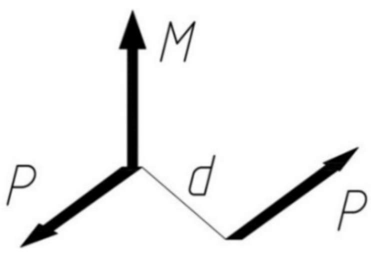


Рисунок 1.12

Пара сил стремится повернуть тело, к которому она приложена.

Действие пары сил на тело характеризуется моментом *M*.

Суммарный момент пары сил относительно любой точки плоскости её действия не зависит от положения этой точки на плоскости и равен произведению модуля одной из сил пары на плечо *d*. Плечо – кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (см. рисунок 1.12).

$$M = \pm P \cdot d\ .$$

Вектор пары сил перпендикулярен плоскости действия пары и направлен в ту сторону, откуда «вращение» пары наблюдается происходящим против хода часовой стрелки. Не изменяя действие пары сил на твердое тело, *M* можно переносить в любую точку тела.

Примеры изображения пары сил на схемах (рисунок 1.13).

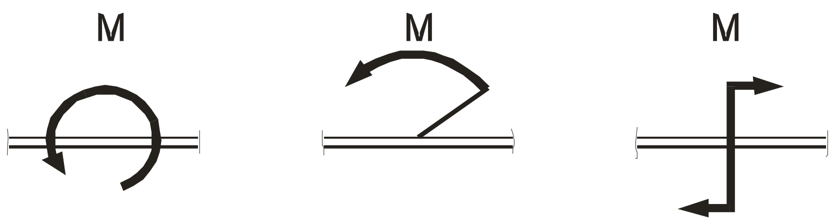


Рисунок 1.13

Задача 5. На плиту в ее плоскости действует две пары сил. Определить сумму моментов этих пар, если сила F = 8 Н, Q = 5 Н, расстояния AB = 0,25 м, CD = 0,20 м, углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 70^\circ$ (рисунок 1.14).

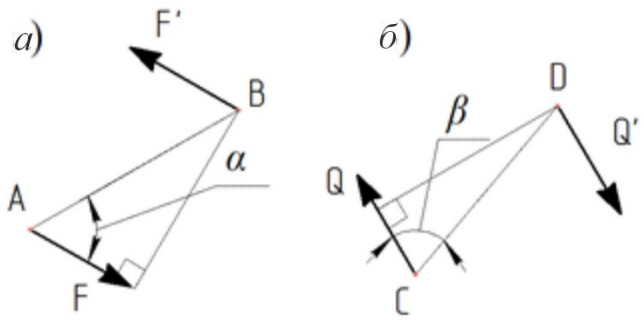


Рисунок 1.14

Решение

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M = F \cdot AB \cdot \sin\alpha - Q \cdot CD \cdot \sin\beta = 8 \cdot 0,25 \cdot \sin 60^\circ - 5 \cdot 0,20 \cdot \sin 70^\circ = 0,79 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

1.8 Приведение системы сил, произвольно расположенных на плоскости, к заданному центру

Силы, линии действия которых лежат в одной плоскости произвольно, образуют систему сил, произвольно расположенных на плоскости.

Силу F на плоскости можно переносить параллельно самой себе в любую точку плоскости, добавив при этом пару сил ($\vec{F}$; $\overrightarrow{F''}$), момент которой равен моменту переносимой силы $(M = F \cdot d)$, относительно новой точки приведения (рисунок 1.15). Данный метод носит название метода Пуансо.

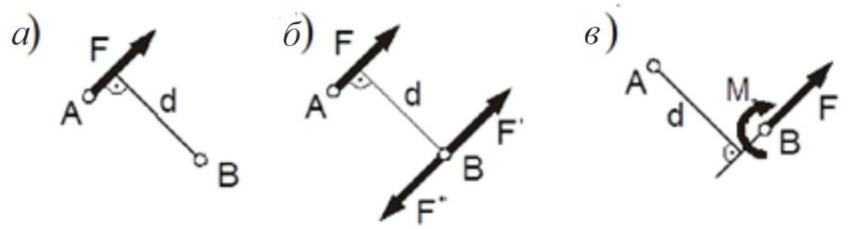


Рисунок 1.15

При рассмотрении системы сил, приложенных к твердому телу, и приведя эту систему к центру O, получим систему сходящихся сил F_i и систему пар сил M_{Oi} (i = 1, 2, …, n).

Систему сходящихся сил можно заменить одной силой, которая будет для системы сходящихся сил равнодействующей:

$$\vec{R}_Г = \vec{F}_1^{'} + \vec{F}_2^{'} + ... + \vec{F}_n^{'} = \sum \vec{F}_i^{'},$$

которая называется **главным вектором системы сил** $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ и равна их геометрической сумме $R_Г = \sum \vec{F}_i$.

Модуль главного вектора

$$R_Г = \sqrt{R_{Гx}^2 + R_{Гy}^2},$$

где $R_{Гx}$, $R_{Гy}$ – проекции главного вектора на соответствующие оси координат.

$$R_{Гx} = \sum F'_{ix} = \sum F_{ix}; \quad R_{Гy} = \sum F'_{iy} = \sum F_{iy}.$$

Направление главного вектора определяется направляющими косинусами

$$\cos\alpha_R = \frac{R_{Гx}}{R_Г}; \quad \cos\beta_R = \frac{R_{Гy}}{R_Г},$$

где α_R, β_R – углы между главным вектором и осями Ox и Oy соответственно.

Систему присоединенных пар сил можно заменить одной парой сил с моментом $\vec{M}_{ГO} = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} + ... + \vec{M}_{nO} = \sum \vec{M}_{iO}$, который называется главным моментом заданной системы сил относительно центра приведения O и равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно центра приведения.

Любую систему сил, произвольно расположенных на плоскости, можно привести к силе, равной ее главному вектору, приложенной в центре приведения, и паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.

Задача 6. Задана плоская система сил $F_1 = F_2 = F_3 = 2$ Н, $F_4 = 10$ Н. Определить главный момент этой системы сил относительно точки A, если радиус $r = 1$ м (рисунок 1.16).

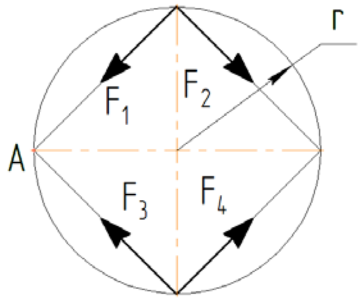


Рисунок 1.16

Решение

Главный момент системы сил относительно точки равен сумме моментов сил относительно этой точки.

Запишем уравнение моментов сил относительно точки A:

$$M_{ГA} = -F_2 \cdot r\sqrt{2} + F_4 \cdot r\sqrt{2} = r\sqrt{2} \cdot (F_4 - F_2) = 1\sqrt{2} \cdot (10 - 2) = 11{,}3 \text{ Н·м}.$$

1.9 Условия и уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости. Теорема Вариньона

При равновесии системы сил, произвольно расположенных на плоскости, главный вектор и главный момент этой системы сил относительно любой точки плоскости равны нулю: $\vec{R}_Г = 0$; $M_{ГO} = 0$.

Формы уравнений равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости, имеют вид

$$1)\ \begin{cases}\sum F_{ix}=0;\\ \sum F_{iy}=0;\\ \sum M_{iO}=0;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\sum F_{ix}=0;\\ \sum M_A(\vec{F}_i)=0;\\ \sum M_B(\vec{F}_i)=0;\end{cases}\qquad 3)\ \begin{cases}\sum M_A(\vec{F}_i)=0;\\ \sum M_B(\vec{F}_i)=0;\\ \sum M_C(\vec{F}_i)=0.\end{cases}$$

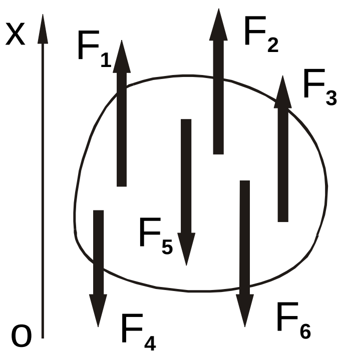


Рисунок 1.17

При этом должны выполняться условия: для второго случая *AB* не перпендикулярна оси Ox; для третьего случая *ABC* должен быть треугольником.

Для системы параллельных сил, расположенных в одной плоскости (рисунок 1.17), аналитические условия равновесия выразятся в виде двух уравнений в двух формах:

$$1)\ \begin{cases}\sum F_{ix}=0;\\ \sum M_O(\vec{F}_i)=0;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\sum M_A(\vec{F}_i)=0;\\ \sum M_B(\vec{F}_i)=0.\end{cases}$$

При этом для второго случая *AB* не параллельно оси *Ox*.

Для системы сил, произвольно расположенных на плоскости, справедлива теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона): момент равнодействующей системы сил, произвольно расположенных на плоскости, относительно точки *O* равен алгебраической сумме моментов сил ее составляющих относительно точки *O*:

$$M_{RO}=\sum M_{Oi}.$$

Задача 7. Стержень *AC* жестко связан с рамой. Определить в килоньютонах реакцию опоры *B*, если силы $F_1 = F_2 = 20$ кН, момент пары сил $M = 80$ кН·м, расстояние $l = 2$ м (рисунок 1.18).

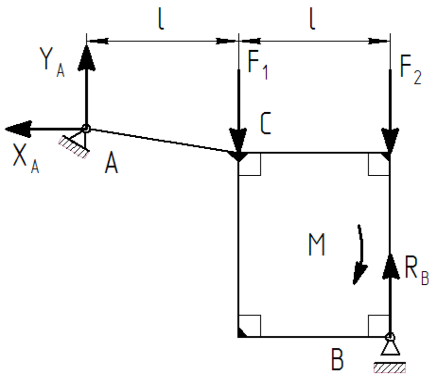


Рисунок 1.18

Решение

Применим принцип освобождаемости от связей, заменив связи их реакциями.

Запишем уравнения равновесия:

$$\sum M_A=0;\ -F_1\cdot l-F_2\cdot 2l+R_B\cdot 2l-M=0;$$

$$R_B=\frac{F_1\cdot l+F_2\cdot 2l+M}{2l}=0.$$

Подставляя значения, получим

$$R_B=\frac{20\cdot 2+20\cdot 2\cdot 2+80}{2\cdot 2}=50\ \text{кН}.$$

1.10 Сосредоточенные и распределенные силы

Силы, приложенные к твердому телу в точке, называются сосредоточенными. Однако реально существуют лишь системы распределенных сил, приложенных к телу по объему, по поверхности или по линии. Распределенные силы характеризуются величиной силы, приходящейся на единицу объема, площади или длины тела.

В основном действуют параллельные системы распределенных сил. Например: силы тяжести, силы давления ветра на стену здания, воды на плотину, сыпучего груза на площадку и т. д.

Для сил, распределенных по отрезку прямой (рисунок 1.19), интенсивность *q,* Н/м – частное от деления равнодействующей *dQ* системы сил, приложенных к бесконечно малому участку линии, на длину *dx* этого участка.

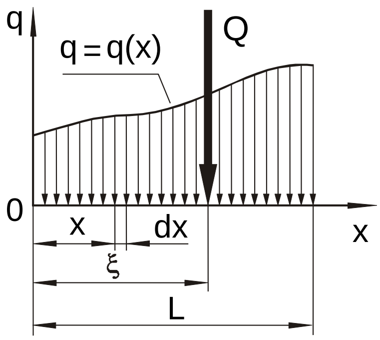


Рисунок 1.19

$$q = \frac{dQ}{dx}.$$

При известном законе изменения $q = f(x)$ (см. рисунок 1.19) равнодействующую распределенной нагрузки можно найти по формуле

$$Q = \int_0^L q dx.$$

В соответствии с теоремой о моменте равнодействующей выражение для определения точки приложения силы *Q* имеет вид

$$Q \cdot \xi = \int_0^L q \cdot x dx; \quad \xi = \frac{1}{Q} \cdot \int_0^L q \cdot x dx.$$

Для нагрузки, изменяющейся по линейному закону (рисунки 1.20 и 1.21), формулы для определения *Q* и ξ имеют вид

$$Q = q \cdot L; \ \ \xi = \frac{1}{2} L; \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot L; \quad \xi = \frac{2}{3} L.$$

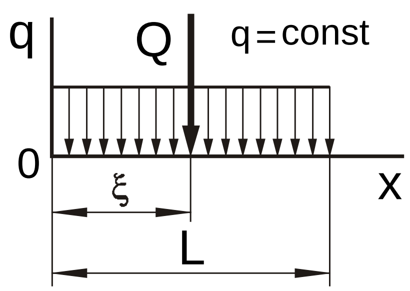


Рисунок 1.20

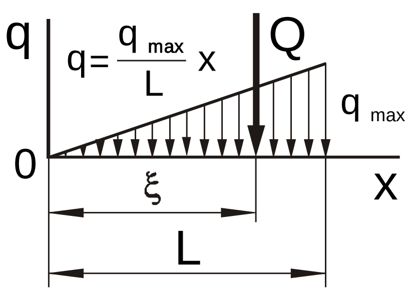


Рисунок 1.21

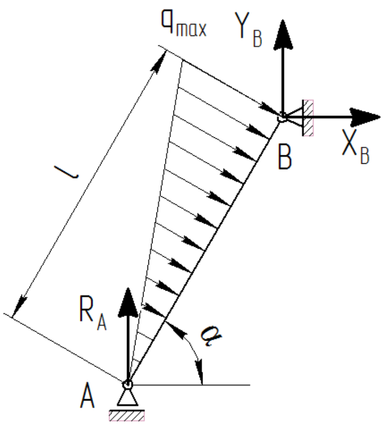


Рисунок 1.22

Задача 8. Определить реакцию опоры *A*, если длина балки l = 0,3 м, интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 20 Н/м, угол α = 60º (рисунок 1.22).

Решение

Применим принцип освобождаемости от связей, заменив связи их реакциями.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0;\ \frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - R_A \cdot l \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$R_A = \frac{\frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{1}{3} l}{l \cdot \cos\alpha}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$R_A = \frac{\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{1}{3}}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ Н}.$$

1.11 Момент силы относительно оси

Момент M_Z силы относительно оси Oz (рисунок 1.23) равен произведению модуля проекции силы на плоскость *Q*, перпендикулярную оси, на плечо *h* этой проекции относительно точки *O* пересечения оси с плоскостью *Q*:

$$M_z = F \cdot h \cdot \cos\alpha\,.$$

Момент считается положительным, если (рисунок 1.24), глядя навстречу оси, «вращение» плоскости *Q* под действием спроецированной на неё силы наблюдается происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным – при вращении в обратном направлении.

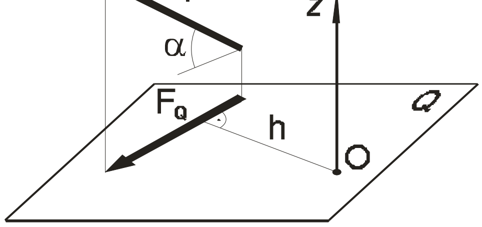


Рисунок 1.23

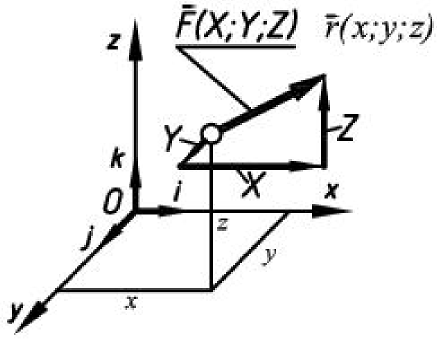


Рисунок 1.24

Момент силы относительно оси равен нулю, если $\cos\alpha$ или h равны нулю, или линия действия силы параллельна или пересекает ось.

Момент силы относительно осей и начала отсчета прямоугольной системы координат (см. рисунок 1.24) можно определить, зная координаты точки приложения силы (x, y, z) и проекции силы на оси (X, Y, Z):

$$\vec{M}_O = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k};$$

$$M_x = y \cdot Z - z \cdot Y; \; M_y = z \cdot X - x \cdot Z; \; M_z = x \cdot Y - y \cdot X;$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты осей координат x, y, z соответственно.

***Задача* 9.** Определить момент распределенной нагрузки относительно оси Oy, если $q_{max} = 10$ Н/м, $a = 3$ м (рисунок 1.25).

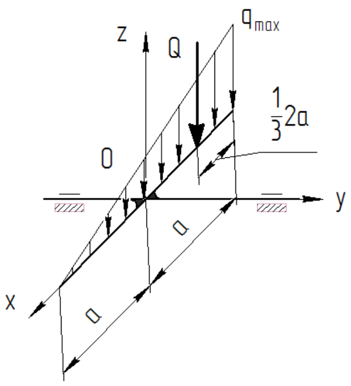


Рисунок 1.25

Решение

Момент распределенной нагрузки относительно оси Oy равен

$$M_y = -\frac{1}{2} q_{max} \cdot 2a \cdot \left(a - \frac{1}{3} 2a \right);$$

$$M_y = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3) = -30 \text{ Н·м}.$$

Ответ: $M_y = -30$ Н·м.

1.12 Равновесие системы сил, расположенных в пространстве. Случай параллельных сил

Главный вектор и главный момент системы сил относительно центра O равны $\vec{R}_Г = \sum \vec{F}_i$; $\vec{M}_{ГО} = \sum \vec{M}_{Oi}$.

Условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $\vec{R}_Г = 0$ и $\vec{M}_{ГО} = 0$. Но данные векторы равны нулю только тогда, когда их проекции на оси координат равны нулю:

$$R_x = R_y = R_z = 0; \quad M_x = M_y = M_z = 0.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases}\sum F_{ix}=0;\\ \sum F_{iy}=0;\\ \sum F_{iz}=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum M_{ix}=0;\\ \sum M_{iy}=0;\\ \sum M_{iz}=0.\end{cases}$$

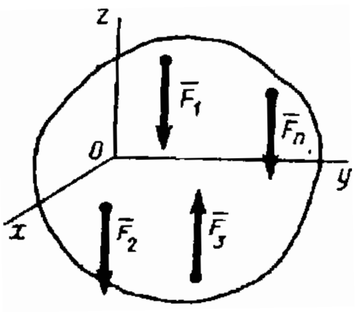


Рисунок 1.26

При равновесии системы сил, произвольно расположенных в пространстве, суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей равны нулю.

В случае параллельных сил (рисунок 1.26) координатную ось *z* можно выбрать так, что она будет параллельна силам. Тогда проекции каждой из сил на оси *x* и *y* и их моменты относительно оси *z* будут равны нулю и получают три уравнения равновесия:

$$\sum F_{iz}=0; \quad \sum M_{ix}=0; \quad \sum M_{iy}=0.$$

При равновесии системы параллельных сил, расположенных в пространстве, алгебраическая сумма всех сил и суммы их моментов относительно двух перпендикулярных силам координатных осей равны нулю.

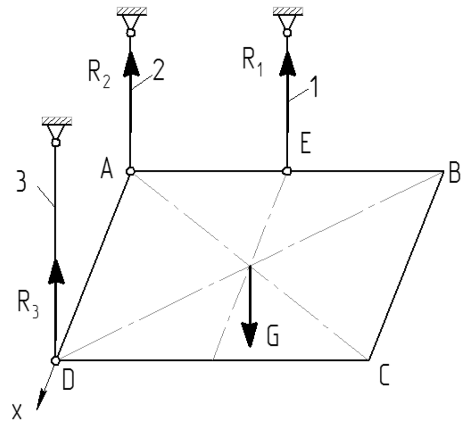


Рисунок 1.27

Задача 10. Горизонтальная однородная квадратная плита *ABCD* весом *G* = 500 Н подвешена в точках *A*, *D*, *E* к вертикальным стержням *1*, *2*, *3*. Определить усилие в стержне *1*, если *AD* = 2·*AE* (рисунок 1.27).

Решение

Покажем усилия в стержнях $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$. Запишем уравнение момента относительно оси *Ax*:

$$R_1\cdot AE - G\cdot AE = 0;\ R_1\cdot AE = G\cdot AE;\ R_1 = G.$$

Подставляя значения, получим R_1 = 500 Н.

Ответ: R_1 = 500 Н.

1.13 Равновесие сочлененных систем тел

Сочлененной системой тел называется совокупность тел, соединенных между собой с помощью связей или просто соприкасающихся друг с другом.

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы сочлененных тел, соединенных связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними, в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с телами, в неё не входящими.

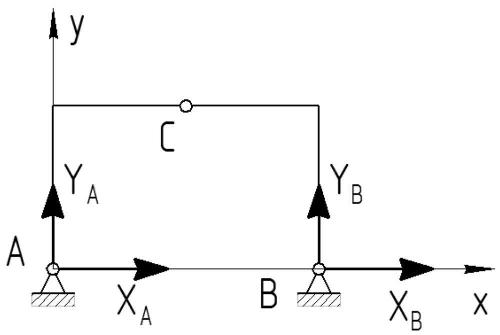


Рисунок 1.28

Для арки, показанной на рисунке 1.28, количество неизвестных реакций больше количества независимых уравнений равновесия. Для решения задачи необходимо дополнительно рассмотреть равновесие одной или нескольких частей конструкции (*AC* или *CB*).

Составляя уравнения равновесия сил, действующих на арку, получим три уравнения с четырьмя неизвестными X_A, Y_A, X_B, Y_B.

Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее части, получим еще три уравнения, содержащие две новые неизвестные X_C, Y_C (рисунок 1.29). Решая систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных.

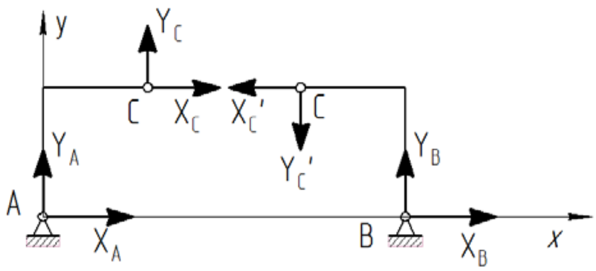


Рисунок 1.29

Другой вариант решения подобных задач заключается в том, что конструкцию расчленяют на отдельные тела и составляют уравнения равновесия каждого из тел в отдельности. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

Для конструкции из *n* тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится 3*n* независимых уравнений, позволяющих найти 3*n* неизвестных.

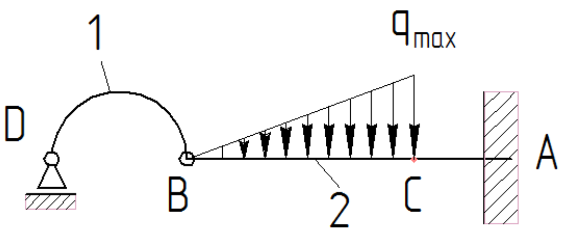


Рисунок 1.30

Задача 11. Вес однородной арки *1* равен 100 Н. Пренебрегая весом балки *2*, определить максимальную интенсивность q_{max} распределенной нагрузки, для того чтобы момент в заделке *A* равнялся 70 Н·м, если арка *1* имеет форму полуокружности и размеры $BC = 3 \cdot AC = 0{,}5$ м (рисунок 1.30).

Решение

Для решения задачи сначала рассмотрим равновесие арки *1* (рисунок 1.31), а затем балки *2* (рисунок 1.32).

Применим принцип освобождаемости от связей и заменим связи соответствующими реакциями.

Для арки составим уравнение равновесия $\sum M_D = 0$ и найдем вертикальную составляющую реакции в шарнире *B*:

$$-G_1\frac{DB}{2}+Y_B\cdot DB=0;\;\; Y_B=\frac{G_1}{2}.$$

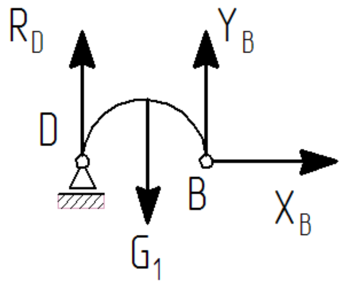


Рисунок 1.31

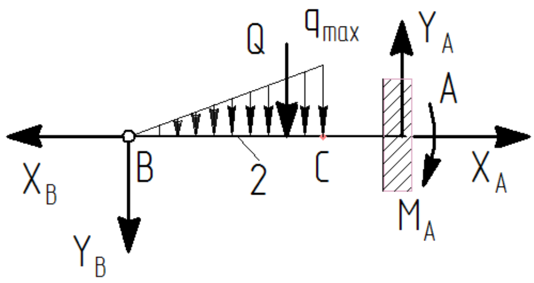


Рисунок 1.32

Для балки составим уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum M_A=0;\;\; -M_A+Y_B\cdot AB+\frac{1}{2}q_{\max}\cdot BC\cdot\left(\frac{1}{3}BC+AC\right)=0;$$

$$q_{\max}=\frac{M_A-Y_B\cdot AB}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot\left(\frac{1}{3}BC+AC\right)}=\frac{70-50\cdot\left(0,5+\frac{0,5}{3}\right)}{\frac{1}{2}\cdot 0,5\cdot\left(\frac{1}{3}0,5+\frac{0,5}{3}\right)}=441{,}8\ \text{Н/м}.$$

1.14 Равновесие тел при наличии трения скольжения

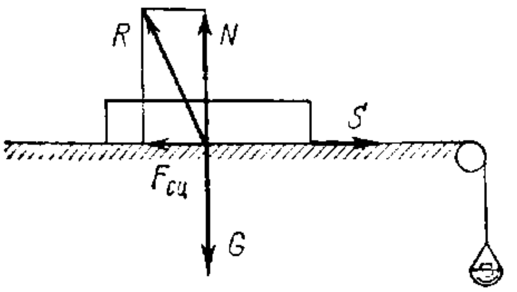


Рисунок 1.33

При стремлении сдвинуть покоящееся тело по неподвижной поверхности с усилием $\vec{S}$ (рисунок 1.33) в плоскости, касательной к соприкасающимся поверхностям, возникает сила сцепления $\vec{F}_{сц}$. При этом полная реакция поверхности

$$\vec{R}=\vec{F}_{сц}+\vec{N},$$

где N – нормальная составляющая полной реакции поверхности.

Силой сцепления называется касательная составляющая полной реакции опорной поверхности, которая уравновешивает силу, стремящуюся сдвинуть покоящееся тело.

Если усилие $\vec{S}$ изменяется от нуля до некоторого максимального значения $\vec{S}^{\max}$, при котором тело придет в движение, то сила $\vec{F}_{сц}$ сцепления также будет изменяться от нуля до своего максимального значения $\vec{F}_{сц}^{\max}$ (критический случай).

Коэффициент пропорциональности между максимальным значением силы сцепления и нормальным давлением тела на поверхность называют коэффициентом сцепления.

$$f_{сц}^{\max} = \frac{F_{сц}^{\max}}{N}.$$

При решении задач значение силы сцепления $F_{сц}$ можно найти только для критического случая. В остальных же случаях сила сцепления находится из уравнений равновесия как составляющая полной реакции поверхности.

Сила трения скольжения – касательная составляющая полной реакции опорной поверхности, возникающая при скольжении тела.

Коэффициент пропорциональности между силой трения скольжения и нормальным давлением тела на поверхность называется коэффициентом трения скольжения, который определяется по формуле

$$f = \frac{F_{тр}}{N}.$$

Экспериментально установлено, что $f < f_{сц}^{\max}$.

Коэффициенты сцепления и трения скольжения зависят от материалов соприкасающихся поверхностей, от разделяющих их оксидных пленок, покрытий, смазочных материалов, а также от макро- и микрогеометрии соприкасающихся поверхностей. Значения данных коэффициентов устанавливаются опытным путем и приведены в справочной литературе.

Условия отсутствия скольжения $S < f \cdot N$, а наличия – $S \geq f \cdot N$.

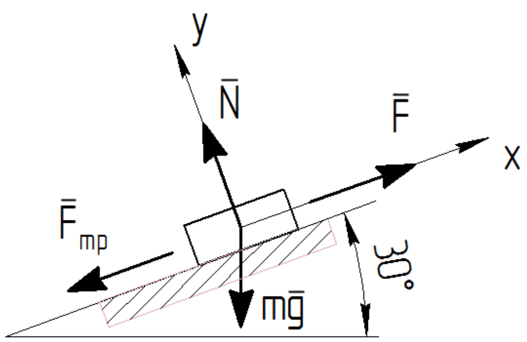


Рисунок 1.34

Задача 12. Каким должен быть вес тела, для того чтобы началось скольжение вверх по наклонной плоскости, если F = 90 Н, а коэффициент трения скольжения f = 0,3 (рисунок 1.34)?

Решение

Для решения задачи составим уравнение равновесия в проекциях на ось x:

$$\sum F_x = 0;\; F - F_{ТР} - G \cdot \sin 30° = 0.$$

Сила трения скольжения определяется из выражения

$$F_{ТР} = f \cdot N,$$

где N – нормальная составляющая полной реакции опоры.

Для определения силы N составим уравнения проекций на ось y:

$$\sum F_y = 0;\;\; N - G \cdot \cos 30° = 0;\;\;\; N = G \cdot \cos 30°;$$

$$F - f \cdot G \cdot \cos 30° - G \cdot \sin 30° = 0.$$

Из полученного выражения вычисляем вес G:

$$G = \frac{F}{f \cdot G \cdot \cos 30° + G \cdot \sin 30°} = \frac{90}{0,3 \cdot \cos 30° + \sin 30°} = 118,45 \text{ Н}.$$

Ответ: G = 118,45 Н.

1.15 Равновесие тела при наличии трения качения

Пусть на каток радиусом R и весом P, опирающийся на горизонтальную поверхность, действует сила T, приложенная горизонтально к его центру (рисунок 1.35), стремящаяся сместить каток.

Под действием силы тяжести катка соприкасающаяся поверхность деформируется и линия действия силы N смещается на расстояние поверхности и силы сцепления $F_{сц}$ смещается из A в C. Составим уравнения равновесия катка:

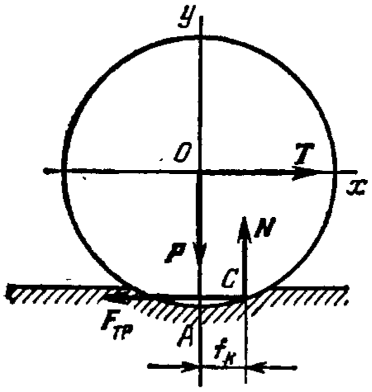


Рисунок 1.35

$$\sum F_{ix} = T - F_{сц} = 0; \quad \sum F_{iy} = N - P = 0;$$

$$\sum M_{iA} = f_к \cdot N - T \cdot R = 0.$$

Откуда $F_{сц} = T$; $N = P$.

На каток действуют две пары сил: $(\vec{F}_{сц}, \vec{T})$ и $(\vec{N}, \vec{P})$, которые уравновешены. Первая пара сил с моментом $M = T{\cdot}R$ стремится привести каток в движение, а вторая – противодействует качению катка. Момент $M_к = f_к \cdot N$ противодействующей пары называют моментом сопротивления качению, а коэффициент $f_к$ – коэффициентом трения качения (измеряется экспериментально). Условия отсутствия качения $T \cdot R < f_k \cdot N$, наличия качения $T \cdot R \geq f_k \cdot N$.

Задача 13. К катку *1* с помощью нерастяжимой нити подвешен груз *2*. Определить наибольший вес этого груза, при котором каток *1* весом 3,2 кН останется в покое, если коэффициент трения качения $f_к$ = 0,004 м, радиус R = 32,4 см (рисунок 1.36).

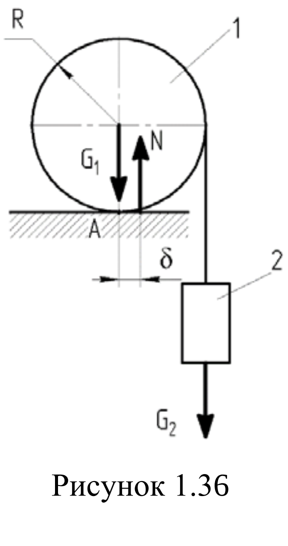


Рисунок 1.36

Решение

Для решения задачи запишем уравнение моментов сил относительно точки A:

$$\sum M_A = 0. \quad -G_2 \cdot R + N \cdot \delta = 0,$$

откуда

$$G_2 = \frac{N \cdot \delta}{R}.$$

Рассматривая равновесие катка *1*, можно заметить, что $G_1 = N$.

Подставляя числовые значения, получим

$$G_2 = \frac{3200 \cdot 0,004}{0,324} = 39,5 \text{ Н}.$$

Ответ: G_2 = 39,5 Н.

1.16 Расчет ферм

При устройстве перекрытий, постройке мостов, кранов, мачт и т. п. применяются конструкции, называемые фермами.

Ферма (рисунок 1.37) – геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из «невесомых» стержней, соединенных между собой шарнирами.

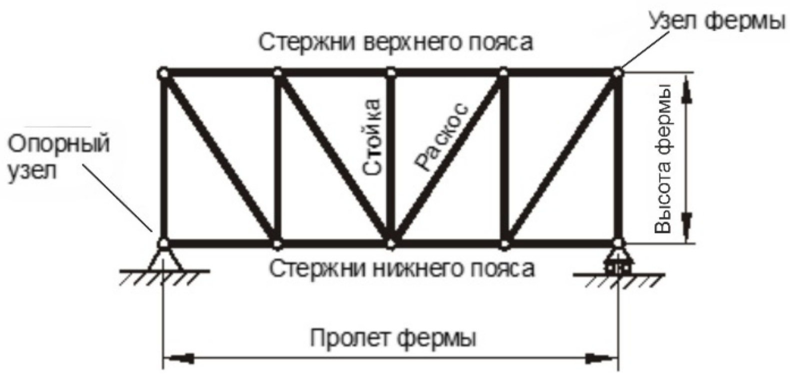


Рисунок 1.37

Если оси всех стержней и силы, действующие на ферму, лежат в одной плоскости, то такую ферму называют плоской.

1.16.1 Определение усилий в стержнях плоской фермы способом вырезания узлов.

Основные допущения, принятые при расчете ферм: стержни фермы считаются невесомыми; внешние силы приложены в узлах фермы; усилия в стержнях направляют от узла, предполагая стержни растянутыми.

Способ вырезания узлов заключается в последовательном рассмотрении равновесия каждого узла фермы. Для каждого рассматриваемого узла плоской фермы составляют два уравнения равновесия в форме $\sum F_{ix} = 0$ и $\sum F_{iy} = 0$.

Порядок рассмотрения равновесия узлов произволен, лишь бы в рассматриваемых уравнениях число неизвестных усилий не превышало двух.

Вначале целесообразно определить опорные реакции фермы.

1.16.2 Расчет ферм способом сечений.

Производить расчет фермы способом сечений удобно при определении усилий в отдельных ее стержнях. Метод состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т. е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем записывают уравнения равновесия так, чтобы в каждое из них вошло только одно неизвестное усилие, составляя уравнение моментов сил относительно точки пересечения двух других усилий (точка Риттера).

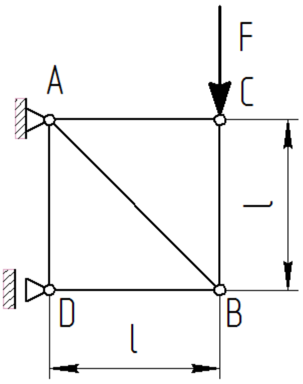


Рисунок 1.38

Задача 14. Определить усилие в стержне *AB*. Сила $F = 600$ Н (рисунок 1.38).

Решение

Для решения задачи применим способ вырезания узлов.

Сначала вырезам узел *C* (рисунок 1.39, *а*) и составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_y = 0; \quad -F - S_{CB} = 0.$$

Откуда $S_{CB} = -F$.

Затем рассмотрим равновесие узла *B* (рисунок 1.39, *б*):

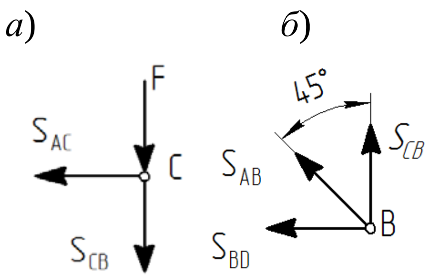


Рисунок 1.39

$$\sum F_y = 0; \; S_{CB} + S_{AB} \cdot \sin 45° = 0,$$

откуда

$$S_{AB} = \frac{-S_{CB}}{\sin 45°}.$$

Заменяя S_{CB} силой *F*, получаем

$$S_{AB} = \frac{F}{\sin 45°} = \frac{600}{\sin 45°} = 848{,}5 \text{ Н}.$$

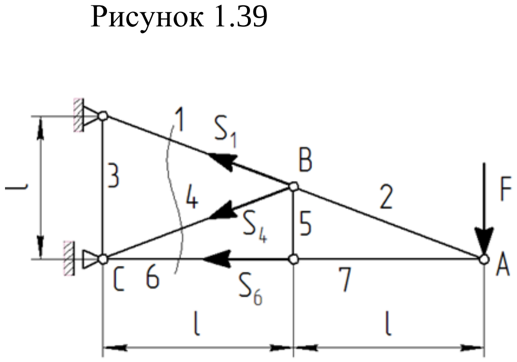


Рисунок 1.40

Задача 15. Определить усилие в стержне *6*. Сила $F = 360$ Н (рисунок 1.40).

Решение

Для решения задачи воспользуемся методом сечений (рисунок 1.40). Для этого проводим сечение через три стержня *1*, *4* и *6*.

Далее определяем точки Риттера.

Для данного случая это точки A, B и C. Для определения усилия S_6 требуется составить уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0. \qquad -F \cdot l - S_6 \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Откуда

$$S_6 = \frac{F \cdot l}{\frac{l}{2}} = -2 \cdot F.$$

Подставляя значения, получим

$$S_6 = -2 \cdot 360 = -720 \text{ Н}.$$

Ответ: $S_6 = -720$ Н.

2 Кинематика

2.1 Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) – значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики.

Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$ (рисунок 2.1).

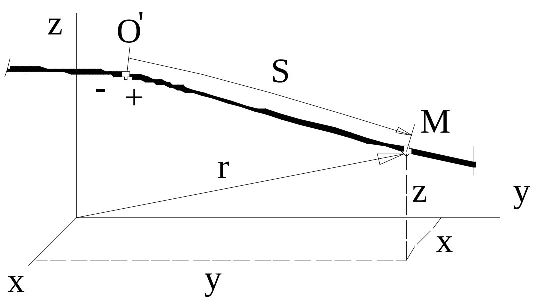


Рисунок 2.1

Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из точки O в точку M.

При движении точки M данный вектор будет с течением времени изменяться по величине и по направлению. Следовательно, он является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от времени t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Это равенство определяет закон движения точки в векторной форме. Оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий радиус-вектор и найти положение движущейся точки в любой момент времени.

Если вместо зависимости $\vec{r} = \vec{r}(t).$ будут заданы координаты x, y и z точки, как функции времени, то такой способ задания движения точки будет называться координатным.

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t).$$

Если движение точки происходит в одной плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость *Oxy*, получим два уравнения движения:

$$x = f_1(t); y = f_2(t).$$

При прямолинейном движении точки, направив вдоль ее траектории координатную ось *Ox,* движение будет определяться одним уравнением:

$$x = f_1(t).$$

Естественным способом задания движения точки удобно пользоваться в случае, если известна траектория движущейся точки.

Движение точки считается описанным **естественным способом**, если известны (см. рисунок 2.1): траектория γ, дуговая координата $s = s(t)$, начало отсчёта O', положительное (+) направление отсчета s. Величина s в уравнении определяет положение движущейся точки на траектории, а не пройденный ею путь.

2.2 Скорость и ускорения движущейся точки при векторном способе задания ее движения

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Скоростью точки называются вектор, определяющий быстроту и направления ее движения в каждый момент времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to \infty} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Вектор скорости точки равен первой производной от ее радиуса-вектора по времени и направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Размерность скорости – метр в секунду или километр в час

Ускорением точки называют вектор, характеризующий быстроту изменения величины и направления скорости точки:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to \infty} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} .$$

Вектор ускорения точки равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

Размерность ускорения – метр на секунду в квадрате.

В общем случае вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и его можно расположить на нормальную и касательную составляющие: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ направлено по нормали к траектории точки в сторону вогнутости.

$a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ направлено по касательной к траектории точки.

Задача 1. Положение точки на плоскости определяется ее радиусом-вектором $\vec{r} = 0{,}3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + 0{,}1 \cdot t^3 \cdot \vec{j}$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2};\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 0{,}3 \cdot t \cdot 2 \cdot \vec{i} + 0{,}1 \cdot t^2 \cdot 3 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0{,}6 \cdot \vec{i} + 0{,}3 \cdot t \cdot 2 \cdot \vec{j} = 0{,}6 \cdot \vec{i} + 0{,}6 \cdot t \cdot \vec{j},$$

Так как вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$ перпендикулярны между собой, то их сумму найдем по теореме Пифагора:

$$\vec{a} = \sqrt{0{,}6^2 + (0{,}6 \cdot t)^2};\ \ a_1 = \sqrt{0{,}36 + 0{,}36 \cdot 2^2} = \sqrt{1{,}8} = 1{,}34 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 1{,}34$ м/с^2.

2.3 Скорость и ускорение точки при координатном способе задания ее движения

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Отсюда $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Проекции вектора скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции вектора скорости, найдем ее величину и направление.

Углы α, β и γ, которые вектор $\vec{v}$ образует с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно, находятся как углы направляющих косинусов:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ ; \quad \cos\alpha_v = \frac{v_x}{v}; \quad \cos\beta_v = \frac{v_y}{v}; \quad \cos\gamma_v = \frac{v_z}{v}.$$

Аналогично определяем координаты, направляющие косинусы и модуль ускорения:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ; \quad \cos\alpha_v = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta_v = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma_v = \frac{a_z}{a}.$$

Задача 2. Даны уравнения движения точки: $x = 0{,}3 \cdot t^3$, $y = 2 \cdot t^2$, где *x*, *y* – в сантиметрах. Определить, в какой момент времени t_1 ускорение точки равно 7 см/с^2.

Решение

Полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

Ускорение точки определим через его проекции на оси координат *Ox* и *Oy*:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2}\ ; \quad v_x = \frac{dx}{dt} = 0{,}3 \cdot t^2 \cdot 3 = 0{,}9 \cdot t^2 \text{ см/с};$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0{,}9 \cdot t \cdot 2 = 1{,}8 \cdot t \text{ см/с}^2.$$

Ускорение

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dy^2}{dt^2}\ ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cdot t \cdot 2 = 4 \cdot t \text{ см/с}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{(1{,}8 \cdot t_1)^2 + 4^2} = 7\ .$$

Возведем обе части в квадрат и определим время t_1:

$$(1{,}8 \cdot t)^2 + 4^2 = 7^2\ ;$$

$$3{,}24 \cdot t_1^{\ 2} + 16 - 49 = 0\ ; \quad 3{,}24 \cdot t_1^{\ 2} - 33 = 0\ ;$$

$$t_1^{\ 2} = \frac{33}{3{,}24} = 10{,}185\ ; \quad t_1 = \sqrt{10{,}185} = 3{,}19 \text{ с}.$$

Ответ: $t_1 = 3{,}19$ с.

2.4 Скорость и ускорение точки при естественном способе задания ее движения

Рассмотрим определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения, т. е. при задании траектории точки и закона движения точки вдоль этой траектории в виде $s = f(t)$ (рисунок 2.2).

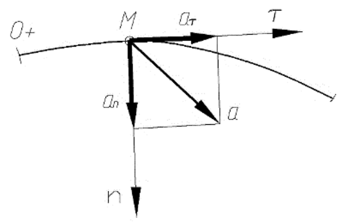


Рисунок 2.2

В этом случае значения векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяют по их проекциям на подвижные оси *Mτnb*, оси естественного трехгранника с началом в движущейся точке *M*.

Ось *Mτ* – направлена по касательной к траектории точки в сторону положительного отсчета координаты *s*; ось *Mn* – по главной нормали к траектории точки. Ось *Mb* – перпендикулярно к первым двум так, чтобы оси образовывали правую систему координат. *Mτ* – **касательная**, *Mn* – **нормальная** и *Mb* – **бинормальная** оси координат.

Величина скорости точки равна первой производной дуговой координаты точки *s* по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Скорость точки *v* направлена в сторону положительного отсчета *s*, когда $v > 0$, при $v < 0$ – в противоположную сторону.

Вектор ускорения точки определяется его касательной $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющими по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ ,$$

которые равны

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории в точке *M*.

При $a_\tau > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением оси *Mτ*, а при $a_\tau < 0$ – в противоположную сторону; a_n – всегда положительно направлено по главной нормали.

Задача 3. Задано уравнение движения по криволинейной траектории: $s = 0,2 \cdot t^2 + 0,3 \cdot t$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t_1 = 3$ с, если в этот момент радиус кривизны траектории $\rho_1 = 1,5$ м.

Решение

Так как точка движется по криволинейной траектории, то ускорение имеет две составляющие (a_τ – касательное; a_n – нормальное) и $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Составляющие полного ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \qquad v = \frac{ds}{dt} = 0,2 \cdot t \cdot 2 + 0,3 \cdot 1 \quad \text{при } t_1 = 3 \text{ с;}$$

$$v_1 = 0,2 \cdot 3 \cdot 2 + 0,3 = 1,5 \text{ м/с}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,2 \cdot 1 \cdot 2 = 0,4 \text{ м/с}^2 = \text{const};$$

$$a_{n1} = \frac{{v_1}^2}{\rho_1} = \frac{1,5^2}{1,5} = 1,5 \text{ м/с}^2; \quad a_1 = \sqrt{0,4^2 + 1,5^2} = 1,55 \text{ м/с}^2.$$

Точка совершает криволинейное равноускоренное движение.

Ответ: $a_1 = 1,55$ м/с^2.

2.5 Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором любая прямая, проведенная на этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению: $\vec{r} = \overrightarrow{\text{const}}$.

При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями (прямолинейные плоские и пространственные).

Поступательное движение тела определяется следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают геометрически одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к кинематике точки: $\vec{V}_A = \vec{V}_B$; $\vec{a}_A = \vec{a}_B$.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\vec{a}_A$ – ускорением поступательного движения тела. Эти векторы можно изображать к любой точке тела.

Понятия о скорости и ускорении твердого тела имеют смысл только при поступательном его движении.

Задача 4. При вращении кривошипа (рисунок 2.3) $OA = O_1B = 0,16$ м, угол $\varphi = \pi \cdot t$. Определить скорость и ускорение точки D полукруга ABD при $t_1 = 2$ с, если $AB = 0,25$ м.

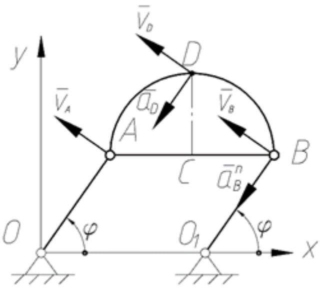


Рисунок 2.3

Решение

Определим направление вектора скорости точек A и B. Так как точки A и B совершают движение по окружности, скорости этих точек будут направлены по касательной к окружности радиуса R = 0,16 м и параллельны друг другу.

Если скорости двух точек одного тела равны между собой, то тело совершает поступательное движение.

$$S_A = S_B = \varphi \cdot OA;$$

$$v_A = v_D = \frac{dS_A}{dt} = OA \cdot \frac{d\varphi}{dt} = OA \cdot \pi = 0{,}785 \text{ м/с} = \text{const}.$$

Так как полукруг ABD совершает поступательное движение, то ускорение точки D будет равно ускорению любой другой его точки.

Так как точка A совершает криволинейное движение, то имеет две составляющие ускорения (a_τ – касательное; a_n – нормальное).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,;$$

$$a_\tau = \frac{dv_A}{dt} = 0\ ;\ a_n = \frac{v^2}{OA} = \frac{0{,}785^2}{0{,}25} = 2{,}47 \text{ м/с}^2; \quad a = \sqrt{0^2 + 2{,}47^2} = 2{,}47 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 2{,}47$ м/с^2.

2.6 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называют такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

Проходящая через эти точки прямая называется неподвижной осью вращения.

Так как расстояния между точками твердого тела всегда неизменны, то при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым углом поворота тела φ. Определить положение тела можно с помощью угла φ:

$$\varphi = f(t).$$

Данное уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

В пределе при $\Delta t \to 0$ найдём числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \cdot .$$

Размерность угловой скорости – 1/ед. времени; в качестве единицы измерения угловой скорости обычно применяют радиан в секунду, или, что то же, 1/с$^{-1}$, т. к. радиан – величина безразмерная.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости тела. Угловое ускорение тела

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} .$$

Размерность углового ускорения – 1/(ед. времени)^2; в качестве единицы измерения обычно применяется радиан на секунду в квадрате, или, что то же, 1/с$^{-2}$.

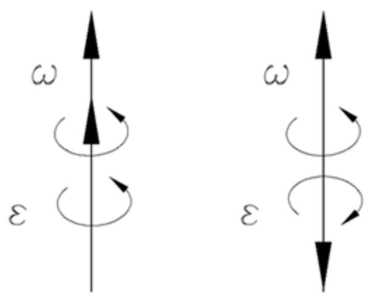


Рисунок 2.4

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, когда разные (рисунок 2.4).

Угловое ускорение тела можно также изобразить в виде векторов $\vec{\varepsilon}$, которые направлены вдоль оси вращения.

Задача 5. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^2$.

Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε данного тела в момент времени, когда тело повернулось на угол $\varphi_1 = 25$ рад.

Решение

Определим момент времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ рад/с}^2 = \text{const}; \quad \varphi_1 = t_1^2 = 25; \quad t_1 = \sqrt{25} = 5 \text{ с};$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t; \quad \omega_1 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ рад/с}.$$

2.7 Скорость и ускорение точек тела при вращательном движении

Рассмотрим произвольную точку M твердого тела, совершающего вращательное движение, находящуюся на расстоянии R от оси вращения (рисунок 2.5).

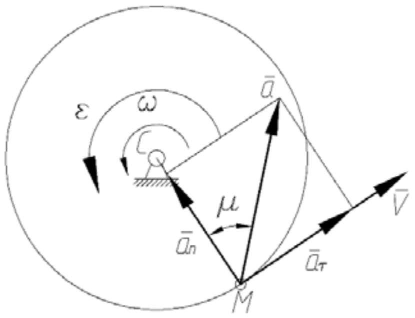


Рисунок 2.5

При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса R, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершит элементарное перемещение $ds = R \cdot d\varphi$; $OM = R$.

$$v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad v = \omega R.$$

Скорость называют линейной или окружной скоростью точки M.

Направлена скорость по касательной к окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку M. При криволинейном движении ее ускорение a имеет две составляющие: a_τ и a_n.

$$a_\tau = R \cdot \omega; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2.$$

Касательная составляющая $\vec{a}_\tau$ ускорения направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном); нормальная составляющая $\vec{a}_n$ всегда направлена по радиусу к оси вращения.

Полное ускорение точки M:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}\mu = a_\tau / a_n = \varepsilon / \omega^2.$$

Задача 6. Угловая скорость тела изменяется по закону $\varphi = 4t^2 + 3t$. Определить полное ускорение точки тела на расстоянии r = 0,25 м от оси вращения в момент времени t = 3 с.

Решение

Так как точка движется по окружности, то ее ускорение можно разложить на составляющие (a_τ – касательное; a_n – нормальное).

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение точки:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4 \cdot t \cdot 2 + 3 \cdot 1; \quad \omega_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 27 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 8 \cdot 1 = 8 \text{ рад/с}^2.$$

При $t_1 = 3$ с

$$\omega_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 27 \text{ рад/с}; \quad a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,25\sqrt{8^2 + 27^4} = 7,07 \text{ м/с}^2.$$

2.8 Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости *П* (рисунок 2.6).

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Прямая $M'M''$ перпендикулярная плоскости *П* движется поступательно и для изучения плоского движения достаточно рассмотреть движение плоской фигуры *S*.

Положение плоской фигуры *S* в плоскости *Oxy* определяется положением двух произвольных точек *A* и *B* этой фигуры (рисунок 2.7).

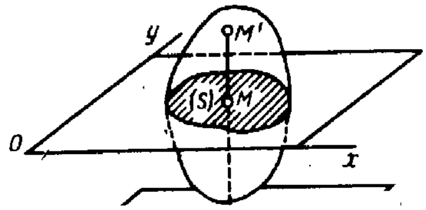


Рисунок 2.6

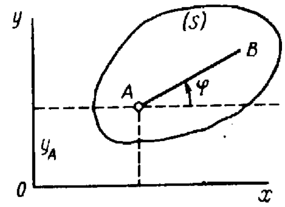


Рисунок 2.7

Положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A и y_A точки *A* и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *Ox*. Точку *A*, выбранную для определения положения фигуры *S*, будем в дальнейшем называть **полюсом**.

Для задания плоского движения тела достаточно задать положение полюса $A - X_A$, Y_A и угла φ:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

Первые два уравнения определяют поступательное движение вместе с полюсом *A*. Третье уравнение определяет вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс (ось *Az*).

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения полюса:

$$v_{xA} = \dot{x}_A; \quad v_{yA} = \dot{y}_A; \quad a_{xA} = \ddot{x}_A; \quad a_{yA} = \ddot{y}_A,$$

а также угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения вокруг полюса

$$\omega = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}.$$

2.9 Определение скоростей точек плоской фигуры

Скорость произвольной точки M фигуры определим как сумму скоростей, которые точка получает при поступательном движении вместе с полюсом и вращательном движении вокруг полюса.

Представим положение точки M как $\vec{r} = \vec{r}_A + A\vec{M}$ (рисунок 2.8).

Продифференцировав это выражение по времени, получим:

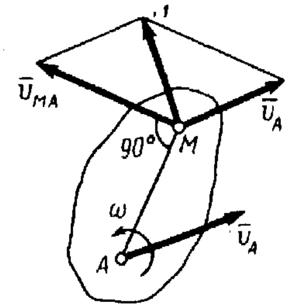


Рисунок 2.8

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{dA\vec{M}_A}{dt}, \text{ т. к. } \frac{dA\vec{M}_A}{dt} = \vec{\omega} \times A\vec{M} = \vec{v}_{MA};$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

При этом скорость v_{MA}, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A, будет определяться из выражения

$$v_{MA} = \omega \cdot MA,$$

где ω – угловая скорость плоской фигуры.

Скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости точки A, принятой за полюс, и скорости точки M при вращении фигуры вокруг полюса. Модуль и направление этой находятся построением параллелограмма скоростей.

Задача 7. Определить скорость точки A (рисунок 2.9), если скорость центра катка равна 5 м/с, угловая скорость катка $\omega = 2$ рад/с. Радиус катка r = 0,2 м, угол $\alpha = 45°$. Каток катится без скольжения.

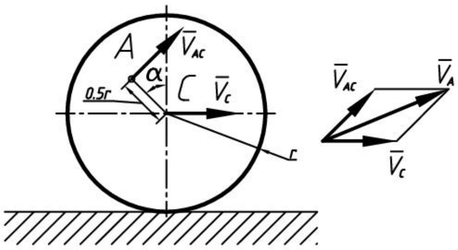


Рисунок 2.9

Решение

Так как тело совершает плоскопараллельное движение, то скорость точки A будет состоять из скорости полюса (точка C) и скорости, полученной точкой A при вращении вокруг полюса C.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC},$$

$$v_{AC} = \omega \cdot 0,5 \cdot r = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с.}$$

$$v_A = \sqrt{v_{AC}^2 + v_C^2 + 2 \cdot v_C \cdot v_{AC} \cdot \cos\alpha} = \sqrt{0,2^2 + 5^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ} = 5,14 \text{ м/с.}$$

2.10 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела, движущего плоскопараллельно

Рассмотрим какие-нибудь две точки *A* и *B* плоской фигуры. Принимая точку *A* за полюс (рисунок 2.10), получаем

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

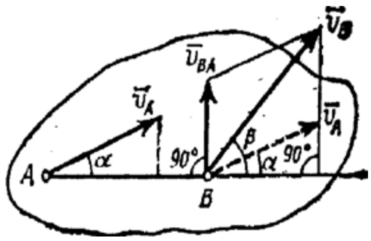


Рисунок 2.10

Отсюда, проецируя обе части равенства на ось, направленную по *AB*, и учитывая, что вектор $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярен *AB*, находим

$$v_B \cdot \cos\beta = v_A \cdot \cos\alpha + v_{BA} \cdot \cos 90^\circ.$$

т. к. $v_{BA} \cdot \cos 90^\circ = 0$. Следовательно, проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны.

Задача 8. Стержень *AB* (рисунок 2.11) скользит по гладкой стене вниз и гладкому полу, скорость точки *A* $V_A = 5$ м/с, угол между полом и стержнем *AB* равен 30º. Определить скорость точки *B*.

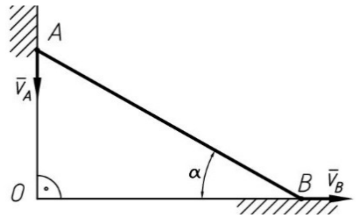


Рисунок 2.11

Решение

Так как точки *A* и *B* принадлежат одному телу, то воспользуемся теоремой о проекции двух скоростей точек тела на прямую, проходящую через эти точки.

$$v_B \cdot \cos\alpha = v_A \cdot \cos(90 - \alpha); \quad v_B = \frac{v_A \cdot \cos(90-\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{5 \cdot \cos(90-30)}{\cos 30} = 2,89 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_B = 2,89$ м/с.

2.11 Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

При определении скоростей точек плоской фигуры через скорость полюса, скорость полюса и скорость вращательного движения вокруг полюса могут быть равны по величине и противоположны по направлению и существует такая точка *P*, скорость которой в данный момент времени равна нулю ($\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0$). Называют ее мгновенным центром скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка, связанная с плоской фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей (рисунок 2.12).

$$v_A = \omega \cdot PA, \quad (\vec{v}_A \perp PA).$$

Так как $v_B = \omega \cdot PB$, $(\vec{v}_B \perp PA)$, то $\omega = v_B/PB = v_A/PA$.

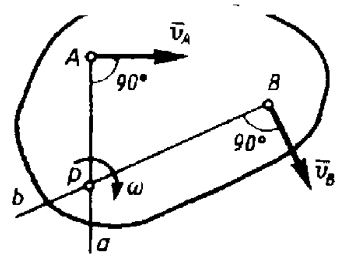


Рисунок 2.12

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1 Для определения положения мгновенного центра скоростей надо знать величину и направления скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры; мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек.

2 Угловая скорость ω плоской фигуры в данный момент времени равна отношению скорости $\vec{v}_A$ к расстоянию от нее до мгновенного центра P скоростей:

$$\omega = v_A/PA.$$

3 Скорость точки $\vec{v}_A$ по отношению к мгновенному центру скоростей P укажет направление угловой скорости ω.

4 Величина скорости точки $\vec{v}_B$ прямопропорциональна кратчайшему расстоянию от точки B к мгновенному центру скоростей P:

$$v_A = \omega \cdot BP.$$

Задача 9. Кривошип OA (рисунок 2.13) длиной 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью ω = 8 рад/с. К шатуну AB в точке C шарнирно прикреплен шатун CD. Для заданного положения механизма определить скорость точки D ползуна, если угол $\alpha = 20^\circ$.

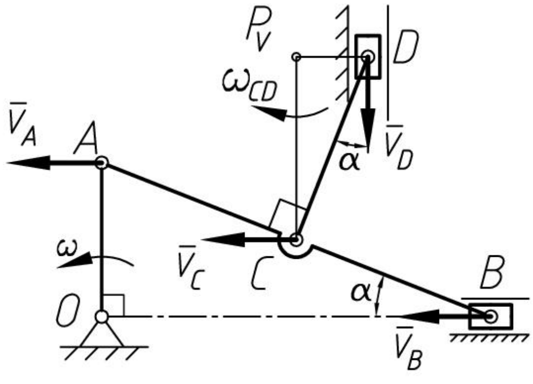


Рисунок 2.13

Решение

Так как точка A принадлежит кривошипу OA, совершающему вращательное движение вокруг точки O, то скорость этой точки равна $v_A = \omega \cdot OA$ и направлена перпендикулярно к OA в сторону ω.

Движение точки B ограничено горизонтальными направляющими, ползун может совершать только поступательное движение по горизонтальным направляющим.

Скорость точки B v_B направлена в ту же сторону, что и v_A.

Так как две точки шатуна имеют одинаковое направление ($v_A = v_B$) скоростей, то тело совершает мгновенно поступательное движение, и скорости всех точек шатуна имеют одинаковое направление и значение.

$$v_A = v_B = v_C = \omega \cdot OA = 8 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ м/с.}$$

Шатун CD совершает плоскопараллельное движение.

Мгновенный центр скоростей P шатуна CD лежит на пересечении перпендикуляров к v_A и v_B.

Определим угловую скорость шатуна CD и скорость точки D:

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{P_V C} = \frac{v_C}{CD \cdot \cos\alpha}; \qquad \omega_{CD} = \frac{v_C}{P_V C} = \frac{v_C}{CD \cdot \sin\alpha};$$

$$\frac{v_C}{CD \cdot \cos\alpha} = \frac{v_C}{CD \cdot \sin\alpha}; \quad v_D = \frac{v_C \cdot CD \cdot \sin\alpha}{CD \cdot \cos\alpha} = v_C \cdot \tan\alpha = 1,6 \cdot \tan 20^{\circ} = 0,582 \text{ м/с.}$$

2.12 Некоторые частные случаи определения положения мгновенного центра скоростей

Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого – неподвижного, то точка P касания этих тел является мгновенным центром скоростей (рисунок 2.14).

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна скоростям этих точек, то мгновенный центр скоростей P лежит на пересечении прямых, соединяющих начало и концы векторов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ (рисунок 2.15).

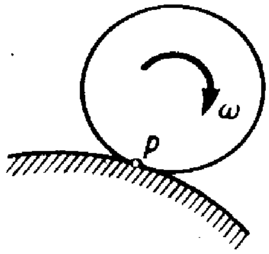


Рисунок 2.14

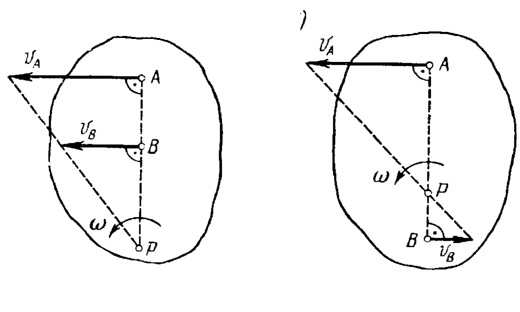


Рисунок 2.15

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны и одинаково направлены, причем отрезок AB не перпендикулярен данным скоростям, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек тела равны (рисунок 2.16). Угловая скорость тела ω в этот момент времени равна нулю. Тело совершает мгновенно поступательное движение.

Ускорение точки M (рисунок 2.17)

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

где $a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM$ и направлено перпендикулярно к AM в сторону ε; $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM$ и направлено от точки M к точке A.

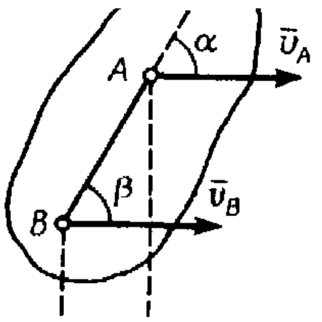


Рисунок 2.16

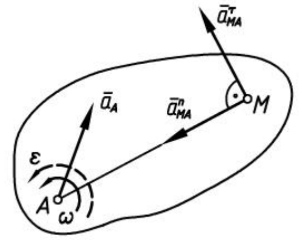


Рисунок 2.17

Задача 10. Для данного положения механизма определить ускорение ползуна B, если колесо 1 радиуса $R = 50$ см катится с постоянной скоростью его центра $v_0 = 5$ м/с; угол $\alpha = 30°$ (рисунок 2.18).

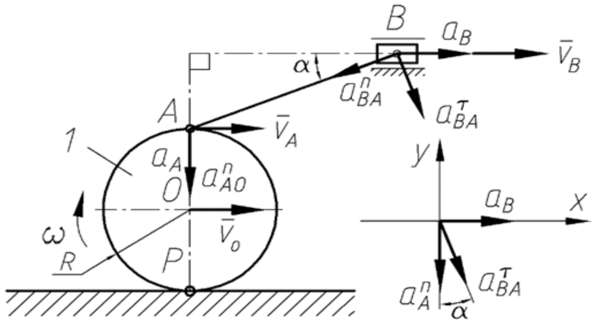


Рисунок 2.18

Решение

Определим угловую скорость колеса:

$$\omega = \frac{V_0}{OP} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ рад/с.}$$

Так как тело катится без скольжения по неподвижной поверхности, то мгновенный центр скоростей Pv находится в точке контакта колеса с поверхностью и направлен по ходу часовой стрелки:

$$v_A = v_B = 2v_O = 10 \text{ м/с}; \quad \omega_{AB} = 0.$$

Определим ускорение точки A, приняв точку O за полюс:

$$\vec{a}_A + \vec{a}_O + \vec{a}^{n}_{AO} + \vec{a}^{\tau}_{AO}.$$

Так как колесо катится с постоянной скоростью, то его угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{dv_O}{OPdt} = 0$ и касательное ускорение тоже равно нулю.

Ускорение точки A равно

$$a_A = a_{AO}^n = \omega^2 \cdot R = 10^2 \cdot 0,5 = 50 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки B будет состоять из ускорения точки A плюс ускорения, полученного от вращения точки B вокруг точки A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$; $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau$.

Так как скорости точек A и B параллельны между собой, то шатун AB совершает мгновенно поступательное движение, значит, $\omega_{AB} = 0 \rightarrow a_{BA}^n = 0$.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + 0 + 0 + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Спроецируем уравнение на оси x и y:

– ось OX:

$$a_B = a_{BA}^\tau \cdot \sin\alpha;$$

– ось $OУ$:

$$-\frac{a_A^n}{\cos\alpha} = a_{BA}^\tau;$$

$$0 = -a_A^n - a_{BA}^\tau \cdot \cos\alpha.$$

Тогда

$$a_B = -\frac{a_A^n}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = -a_A^n \cdot \tan\alpha = 50 \cdot \tan 30 = 28,86 \text{ м/с}^2.$$

2.13 Сложное движение точки

Рассмотрим движение точки по отношению к двум системам отсчета, из которых одну считаем основной или условно неподвижной, а другую движущуюся по отношению к основной.

Движение, совершаемое точкой, называют сложным. Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая, в свою очередь, движется относительно основной системы отсчета $O_0x_0y_0z_0$ (рисунок 2.19). Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета, называется относительным движением $\vec{r}_r$.

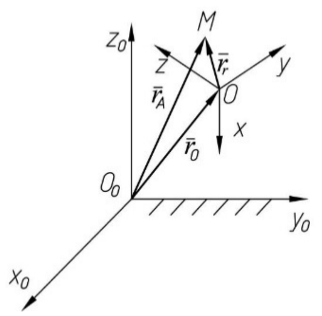


Рисунок 2.19

Скорость называется относительной скоростью $\vec{v}_r$, а ускорение – относительным ускорением $\vec{a}_r$.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета (и всеми связанными с нею точками) по отношению к неподвижной системе отсчета, является для точки M переносным движением.

Скорость и ускорение точки, связанной с подвижными осями и с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *M*, называют переносной скоростью $\vec{v}_e$ и переносным ускорением точки *M* ($\vec{a}_e$).

Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета, называется абсолютным $\vec{r}_a$, его скорость и ускорение – абсолютной скоростью $\vec{v}_a$ и абсолютным ускорением $\vec{a}_a$.

Для решения задач кинематики необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями точки.

2.14 Теорема сложения скоростей и ускорений при сложном движении точки

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее относительной и переносной скоростей: $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

Модуль абсолютной скорости

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2 \cdot v_e \cdot v_r \cdot \cos\alpha},$$

где α – угол между векторами относительной и переносной скоростей точки.

При сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно векторной сумме переносного, относительного и кориолисова ускорения:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_C.$$

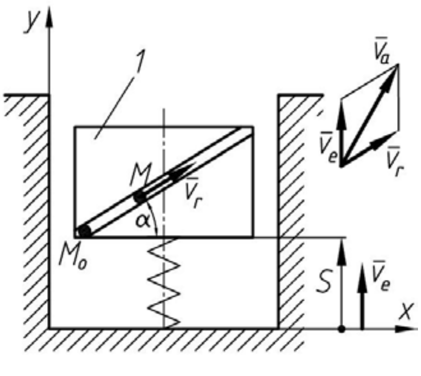


Рисунок 2.20

Задача 11. Определить абсолютную скорость в момент времени $t = 2$ с точки *M*, которая движется по диагонали прямоугольной пластины *1* по закону $M_0M = 0{,}3t^2$. Сама пластина (рисунок 2.20) движется вертикально в плоскости согласно уравнению $s = 1 + 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)$. Угол $\alpha = 45°$.

Решение

Так как точка *M* совершает сложное движение, то ее скорость состоит из переносной и относительной скорости точки.

$$v_e = \frac{ds}{dt} = 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}; \qquad v_{e1} = 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ м/с};$$

$$v_r = \frac{d(M_0M)}{dt} = 0,3 \cdot t \cdot 2; \quad v_{r1} = 0,3 \cdot 2 \cdot 2 = 1,2 \text{ м/с};$$

$$v_{a1} = \sqrt{v_{e1}^2 + v_{\tau 1}^2 + 2 \cdot v_{r1} \cdot v_{e1} \cdot \cos\alpha} = \sqrt{1,2^2 + \frac{\pi^2}{16} + 2 \cdot 1,2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos 45^\circ} = 1,841 \text{ м/с}.$$

2.15 Ускорение Кориолиса

Ускорение Кориолиса характеризует быстроту изменения переносной скорости в относительном движении и изменение относительной скорости в переносном движении:

$$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \quad \text{или} \quad a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ (рисунок 2.21).

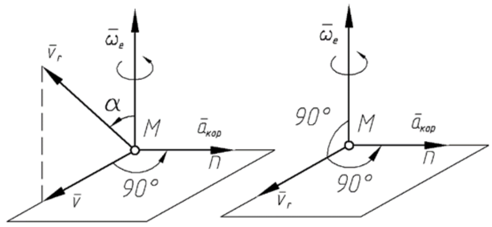


Рисунок 2.21

Из данной формулы видно, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) $\omega_e = 0$, т. е. когда переносное движение является поступательным или переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) $v_r = 0$, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) когда α = 0 (180º), т. е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения.

Направление вектора $\vec{a}_c$ определяется по правилу Жуковского либо по правилу векторного произведения (см. рисунок 2.21):

– проецируем вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения;

– поворачиваем полученную проекцию на 90º по направлению переносного вращения (по направлению ω_e) – это и есть направление кориолисова ускорения.

По правилу векторного произведения $\vec{a}_c$ – вектор, перпендикулярный $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$, направлен так, чтобы поворот от $\vec{\omega}_e$ к $\vec{v}_r$ на угол α виден происходящим против хода часовой стрелки.

Задача 12. Пластина *ABC* (рисунок 2.22) вращается вокруг оси *Oz* по закону $\varphi = 5 \cdot t^2$, а по стороне *AC* движется точка *M* согласно уравнению $AM = 4 \cdot t^3$. Определить ускорение Кориолиса точки *M* в момент времени $t_1 = 0,5$ с.

Решение

$$\varphi = \varphi_e; \; \omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 5 \cdot t \cdot 2; \; \omega_{e1} = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ рад/с};$$

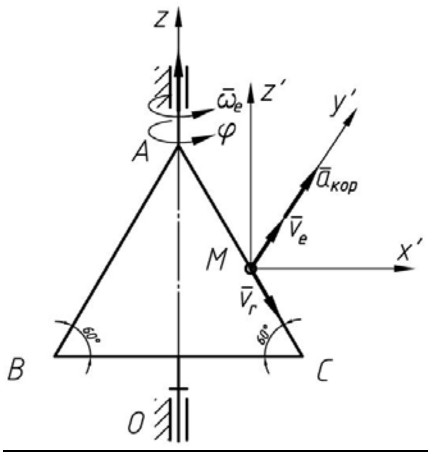


Рисунок 2.22

$$v_r = \frac{d(AM)}{dt} = 4 \cdot t^2 \cdot 3;$$

$$v_{r1} = 4 \cdot 3 \cdot 0,5^2 = 3 \text{ м/с}.$$

Кориолисово ускорение определяется по формуле

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между вектором угловой скорости $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости $\vec{v}_r$, $\alpha = 150°$.

Вращательное движение рамки является переносным движением, а движение точки по стороне AC – относительное движение.

$$a_c = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 150 = 15 \text{ м/с}^2.$$

Список литературы

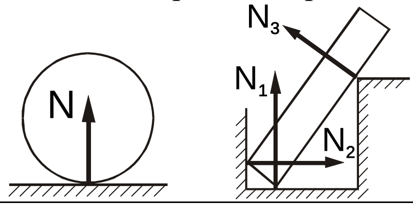
1 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика : учебник / В. Л. Цывильский. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : КУРС ; ИНФРА-М, 2020. – 368 с.

2 Сборник заданий по теоретической механике. Статика : учеб. пособие / под ред. В. В. Дрожжина. – 2-е изд., испр. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2022. – 224 с.

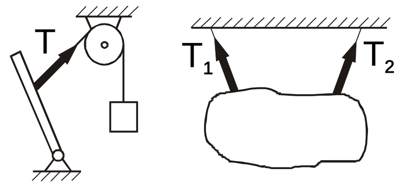
3 Сборник заданий по теоретической механике. Кинематика : учеб. пособие / под ред. В. В. Дрожжина. – 2-е изд., испр. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2022. – 192 с.

Приложение А
(рекомендуемое)

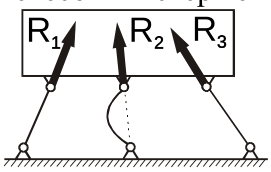
Гладкая опорная поверхность



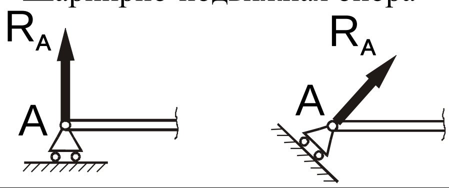
Нить



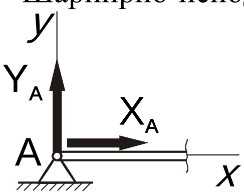
Невесомый стержень



Шарнирно-подвижная опора

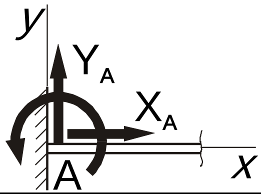


Шарнирно-неподвижная опора

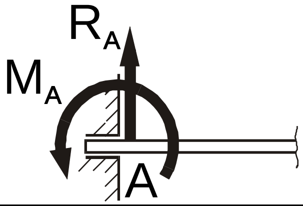


$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}$$

Жесткая заделка

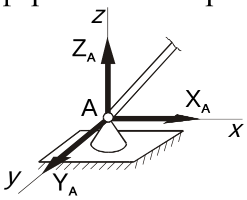


Скользящая заделка



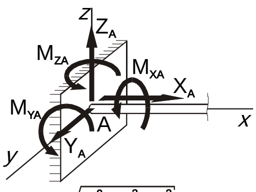
Бискользящая заделка

Сферический шарнир



$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}$$

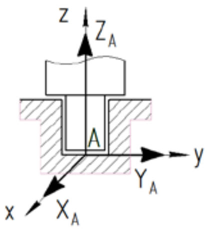
Пространственная жесткая заделка



$$R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}$$

$$M_A=\sqrt{M_{XA}^2+M_{YA}^2+M_{ZA}^2}$$

Подпятник



Подшипник

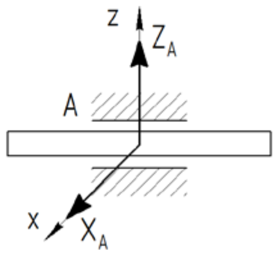


Рисунок А.1 – Опорные реакции