МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» очной формы обучения

Часть 1

Могилев 2026

УДК 539.3/6
ББК 305.1212
М55(64)

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «1» декабря 2025 г., протокол № 6

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Механика материалов и конструкций» для студентов специальности 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» очной формы обучения. Содержат материал для проведения практических занятий в осеннем семестре.

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Часть 1

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» изучают дисциплину «Механика материалов и конструкций» на протяжении 3-го и 4-го семестров. Методические рекомендации выполнены в объеме практических занятий 3-го семестра.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов компетенции:

– владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

– быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;

– проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

– выбирать конструктивные материалы и формы элементов конструкций, расчетные схемы, производить расчеты технических конструкций и их элементов на прочность, устойчивость, жесткость.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–11], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

1 Геометрические характеристики поперечных сечений. Определение центра тяжести составного сечения

Пример – Определить координату центра тяжести составного сечения относительно оси y. Размеры сечения на рисунке 1.1 даны в миллиметрах.

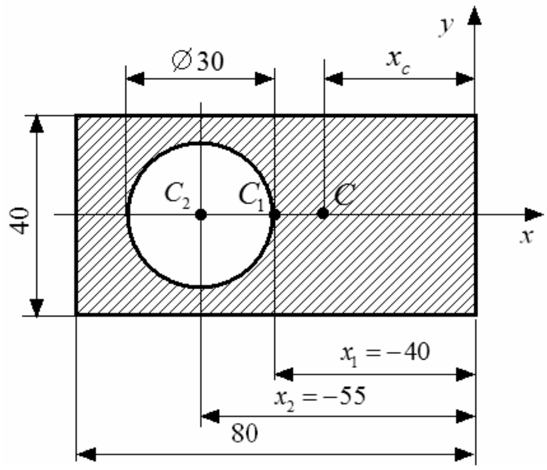


Рисунок 1.1

Решение

Положение центров тяжести прямоугольника и круга с координатами относительно оси y указано на рисунке 1.1. Площади отдельных фигур

$$A_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 = 7{,}065 \text{ см}^2.$$

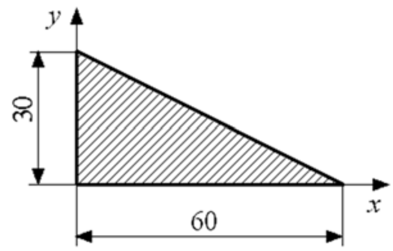
Координата x_c определяется по формуле

$$x_c = \frac{\sum S_Y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(-4) \cdot 32 - (-5{,}5) \cdot 7{,}065}{32 - 7{,}065} = -3{,}57 \text{ см}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

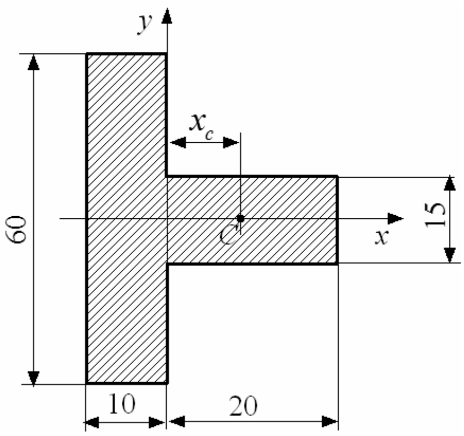
1 Координата центра тяжести треугольника относительно указанных осей:

а) $x_c = 1$ см;
б) $x_c = 2$ см;
в) $x_c = -2$ см;
г) $x_c = 3$ см.



2 В каком ответе дано правильное значение координаты центра тяжести сечения x_c:

а) $x_c = 0$ см;
б) $x_c = -1/3$ см;
в) $x_c = 1/3$ см;
г) $x_c = 2/3$ см.



3 По какой формуле определяется статический момент простого сечения площадью A относительно произвольной оси y:

а) $S_y = x_c \cdot A$;
б) $S_y = y_c \cdot A$;
в) $S_y = x_c / A$;
г) $S_y = y_c / A$.

4 По какой формуле определяется координата центра тяжести составного поперечного сечения относительно оси x:

а) $x_c = \dfrac{\sum S_y}{\sum A}$;   в) $x_c = \dfrac{\sum S_x}{\sum A}$;

б) $y_c = \dfrac{\sum S_y}{\sum A}$;   г) $y_c = \dfrac{\sum S_x}{\sum A}$.

2 Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей. Использование таблиц сортамента

Пример 1 **–** Определить осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей x и y. Размеры сечения на рисунке 2.1 даны в миллиметрах.

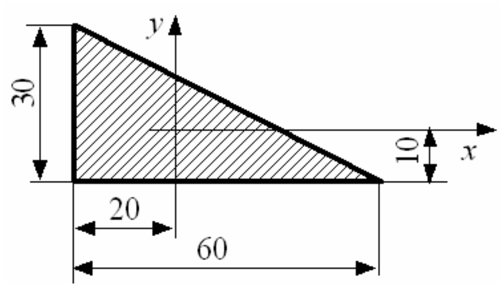


Рисунок 2.1

Решение

Определим осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$I_x = \frac{6 \cdot 3^3}{36} = 4{,}5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 6^3}{36} = 18 \text{ см}^4.$$

Пример 2 **–** Определить осевые и полярный моменты инерции сечения относительно центральных осей x и y. Размеры сечения на рисунке 2.2 даны в миллиметрах.

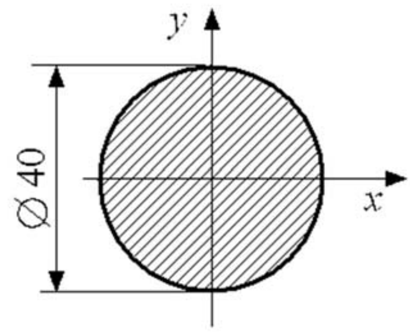


Рисунок 2.2

Решение

Определим осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$I_x = I_y = \frac{3{,}14 \cdot 4^4}{64} = 12{,}56 \text{ см}^4.$$

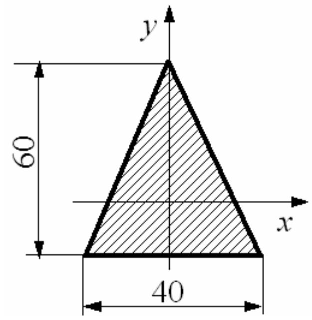
Определим полярный момент инерции:

$$I_\rho = \frac{3{,}14 \cdot 4^4}{32} = 25{,}12 \text{ см}^4.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

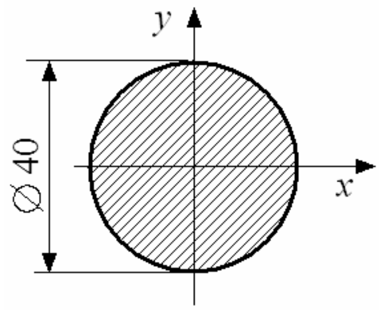
1 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси y:

а) $I_y = 24$ см^4;
б) $I_y = 8$ см^4;
в) $I_y = 10{,}7$ см^4;
г) $I_y = 18$ см^4.



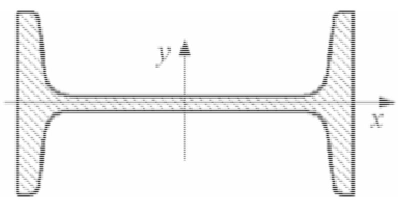
2 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

а) $I_{xy} = 0$ см^4;
б) $I_{xy} = -8 \cdot \pi$ см^4;
в) $I_{xy} = -24 \cdot \pi$ см^4;
г) $I_{xy} = 24 \cdot \pi$ см^4.



3 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции для двутавра № 10 относительно оси x:

а) $I_x = 198$ см^4;
б) $I_x = 39{,}7$ см^4;
в) $I_x = 17{,}9$ см^4;
г) $I_x = 6{,}49$ см^4.



3 Определение моментов инерции простых сечений при параллельном переносе и повороте осей. Главные центральные оси и моменты инерции поперечного сечения

Пример – Определить осевые моменты инерции поперечного сечения (рисунок 3.1) относительно указанных осей x и y. Размеры сечения на рисунке 3.1 даны в миллиметрах.

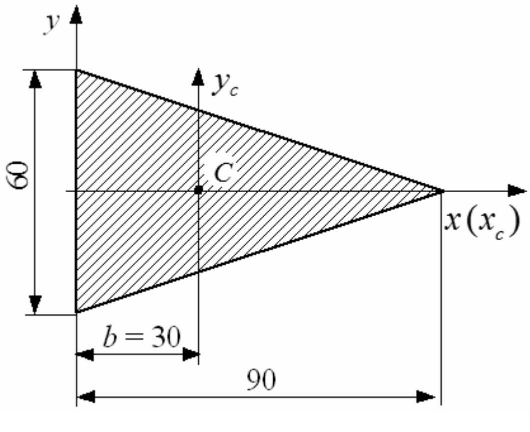


Рисунок 3.1

Решение

По рисунку видно, что заданная ось x и центральная ось x_c совпадают, а между вертикальными осями y и y_c есть межосевое расстояние b.

Моменты инерции

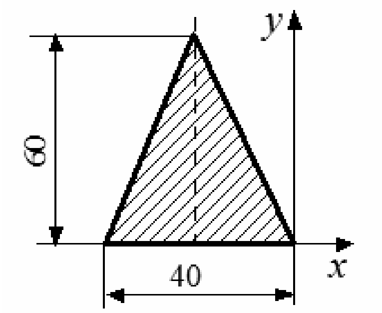
$$I_x = I_{x_c} = \frac{9 \cdot 6^3}{48} = 40{,}5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot A = \frac{6 \cdot 9^3}{36} + 3^2 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 354{,}5 \text{ см}^4.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

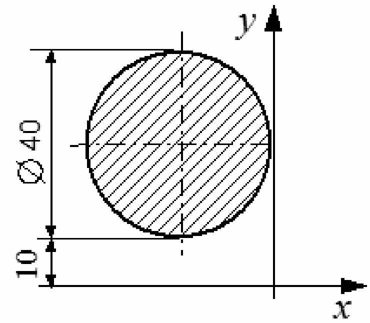
1 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси y:

а) $I_y = 32$ см^4;
б) $I_y = 58$ см^4;
в) $I_y = 56$ см^4;
г) $I_y = 54$ см^4.



2 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

а) $I_{xy} = 0$ см^4;
б) $I_{xy} = -8 \cdot \pi$ см^4;
в) $I_{xy} = -24 \cdot \pi$ см^4;
г) $I_{xy} = 24 \cdot \pi$ см^4.



3 Какое утверждение может быть верно для главных центральных осей x и y:

а) $I_x > 0$, $I_y < 0$;
б) $I_x = I_{\max}$, $I_y = I_{\min}$;
в) $I_x = 0$, $I_y = 0$;
г) $I_x + I_y = 0$.

4 Оси x и y являются главными центральными, если …:

а) $I_{xy} = 0$, $S_x = 0$, $S_y = 0$;
б) $I_{xy} = 0$;
в) $S_x = 0$, $S_y = 0$;
г) $S_x = S_y$.

5 Ось симметрии поперечного сечения является ...:

а) всегда главной, но не всегда центральной осью;
б) всегда центральной, но не всегда главной осью;
в) всегда главной центральной осью;
г) не всегда центральной осью.

6 Угол для определения положения главных центральных осей инерции определяется по формуле:

а) $\alpha_o = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$; в) $\alpha_o = \operatorname{arctg} \frac{I_{xy}}{I_x - I_y}$;

б) $\alpha_o = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$; г) $\alpha_o = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$.

4 Определение геометрических характеристик в составных сечениях и сечениях сложной формы

Пример – Для заданного сечения (рисунок 4.1) определить положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции. Размеры сечения даны в миллиметрах.

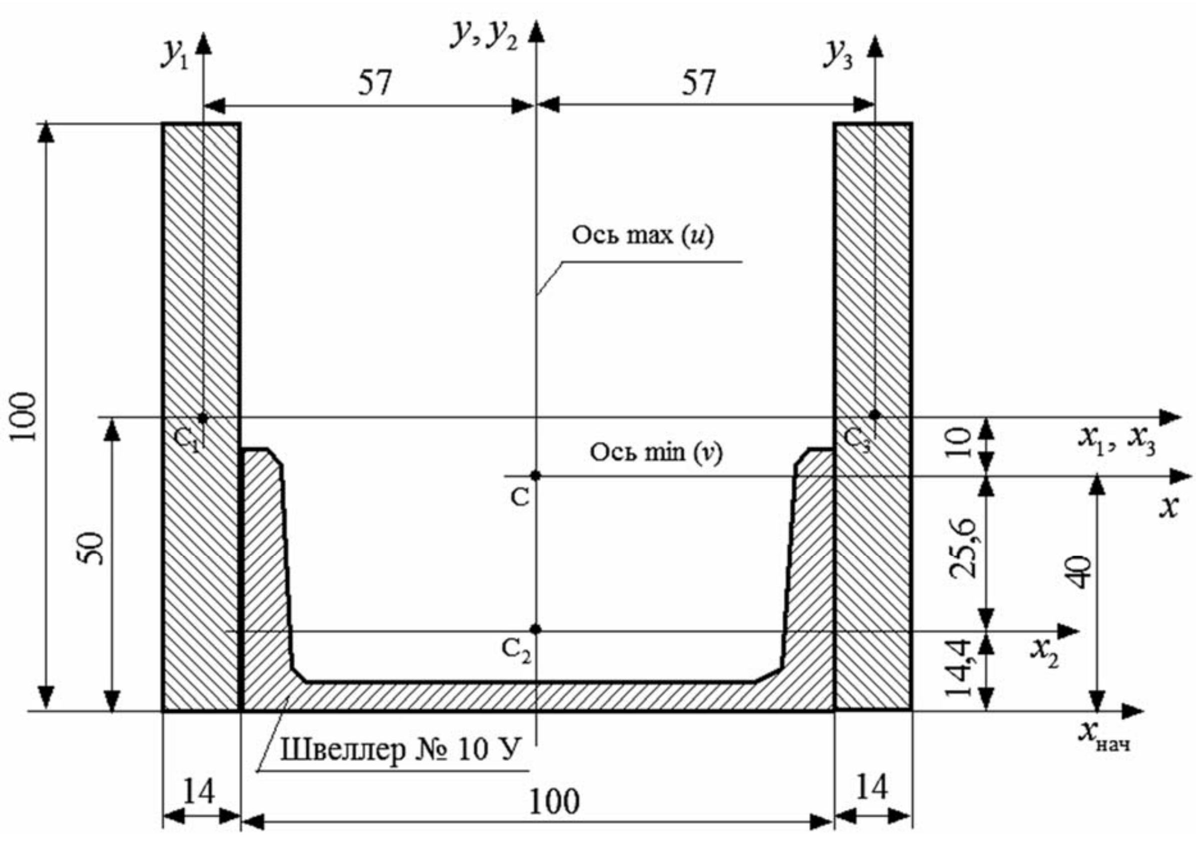


Рисунок 4.1

Решение

Определим собственные геометрические характеристики фигур.
Прямоугольники:

$$A_1 = A_3 = 10 \cdot 1{,}4 = 14 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_1} = I_{x_3} = \frac{1{,}4 \cdot 10^3}{12} = 116{,}7 \text{ см}^4; \quad I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{10 \cdot 1{,}4^3}{12} = 2{,}3 \text{ см}^4.$$

Для швеллера из таблиц ГОСТ 8240–97, с учетом горизонтального расположения фигуры,

$$A_2 = 10{,}9\ \text{см}^2;\ I_{x_2} = 20{,}4\ \text{см}^4;\ I_{y_2} = 174\ \text{см}^4;\ h = 10\ \text{см};\ z_0 = 1{,}44\ \text{см}.$$

В данном сечении ось y является осью симметрии (главной центральной осью инерции), поэтому центр тяжести всего сечения расположен на этой оси. Определим его координату y_c относительно оси $x_{нач}$:

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 14 + 1{,}44 \cdot 10{,}9 + 5 \cdot 14}{14 + 10{,}9 + 14} = 4\ \text{см},$$

где y_1, y_2, y_3 – координаты центров тяжести прямоугольников и швеллера относительно начальной оси $x_{нач}$ (см. рисунок 4.1).

Через найденный центр тяжести проводим вторую главную центральную ось инерции сечения – x.

Расстояния между главными центральными осями всего сечения и центральными осями отдельных фигур

$$c_1 = c_3 = y_1 - y_c = 5 - 4 = 1\ \text{см};\quad c_2 = y_c - y_2 = 4 - 1{,}44 = 2{,}56\ \text{см};$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1{,}4}{2} + \frac{10}{2} = 5{,}7\ \text{см};\quad d_2 = 0.$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения относительно осей xy по следующим формулам:

$$I_x = (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) =$$

$$= (116{,}7 + 1^2 \cdot 14) \cdot 2 + (20{,}4 + 2{,}56^2 \cdot 10{,}9) = 353{,}2\ \text{см}^4;$$

$$I_y = (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) =$$

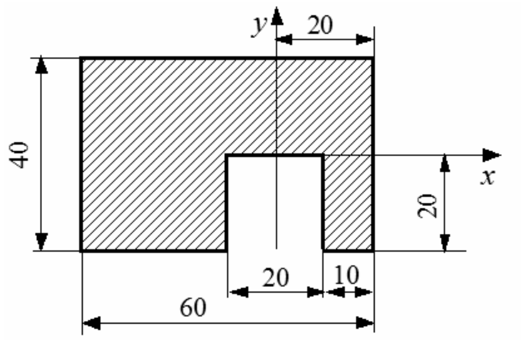
$$= (2{,}3 + 5{,}7^2 \cdot 14) \cdot 2 + (174 + 0 \cdot 10{,}9) = 1088{,}3\ \text{см}^4.$$

Так как $I_x = I_{\min}$, а $I_y = I_{\max}$, то ось y проходит через плоскость максимальной жесткости сечения, а ось x – минимальной.

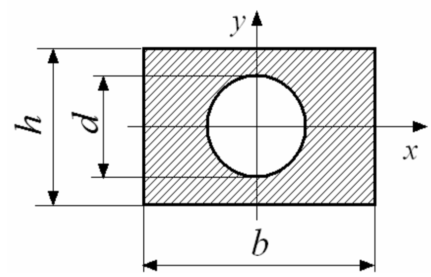
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 В каком ответе дано правильное значение статического момента сечения относительно оси x:

а) $S_x = 0$ см^3; в) $S_x = 4$ см^3;
б) $S_x = 44$ см^3; г) $S_x = 52$ см^3.



2 По какой формуле определяется момент инерции I_x указанного поперечного сечения:



а) $I_x = \dfrac{hb^3}{12} - \dfrac{\pi d^4}{64}$;

б) $I_x = \dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{\pi d^4}{64}$;

в) $I_x = \dfrac{bh^3}{12} - \dfrac{\pi d^4}{64}$;

г) $I_x = \dfrac{bh^3}{36} - \dfrac{\pi d^4}{64}$.

5 Определение внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений

Пример **–** Определить величину внутренних силовых факторов в сечении C прямолинейного бруса (рисунок 5.1).

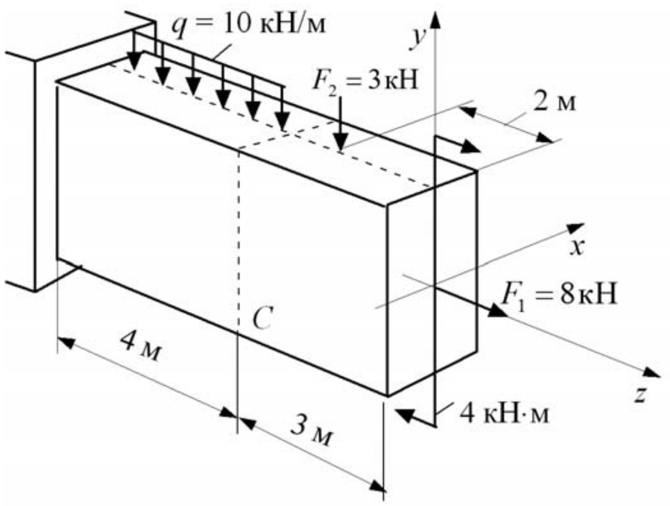
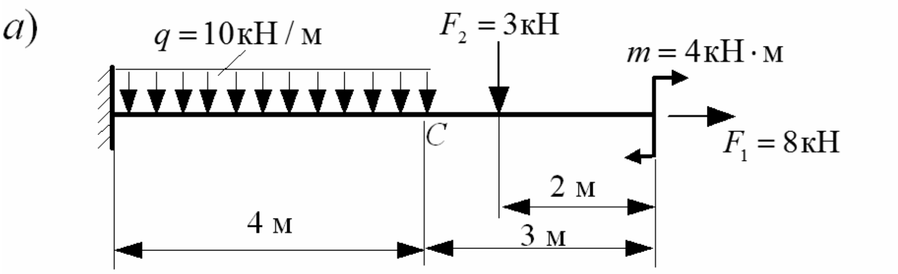


Рисунок 5.1

Решение

Покажем расчетную схему (рисунок 5.2, *а*).



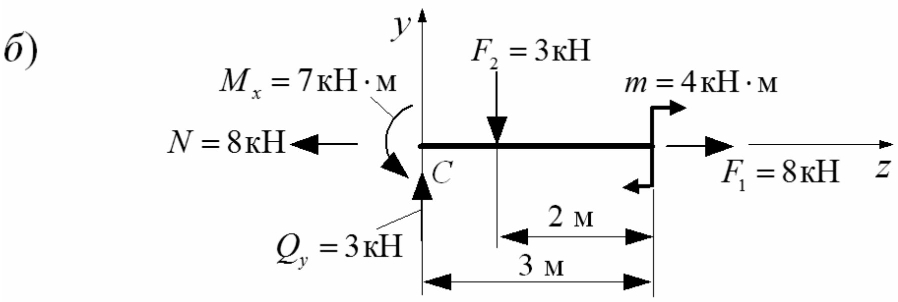


Рисунок 5.2

Для решения задачи используем *метод сечений*: мысленно рассечем брус по искомому сечению *C* и рассмотрим равновесие его правой части (рисунок 5.2, *б*). Для определения всех внутренних усилий составим шесть уравнений статического равновесия:

$$\sum X = 0; \quad Q_x = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_y - F_2 = 0; \quad Q_y = F_2 = 3 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 0; \quad -N + F_1 = 0; \quad N = F_1 = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_x^C = 0; \quad M_x - F_2 \cdot 1 - m = 0; \quad M_x = F_2 \cdot 1 + m = 3 + 4 = 7 \text{кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_y^C = 0; \quad M_y = 0;$$

$$\sum M_z^C = 0; \quad M_z = M_{\text{кр}} = 0.$$

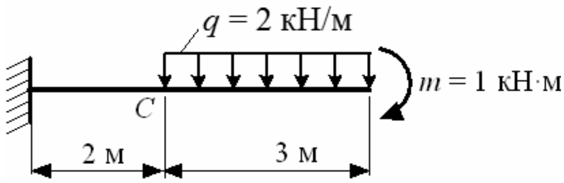
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Метод, позволяющий определить внутренние усилия в сечении стержня:
а) метод сил; в) метод независимости действия сил;
б) метод сечений; г) метод начальных.

2 Сколько всего существует внутренних силовых факторов:
а) три; в) пять;
б) четыре; г) шесть.

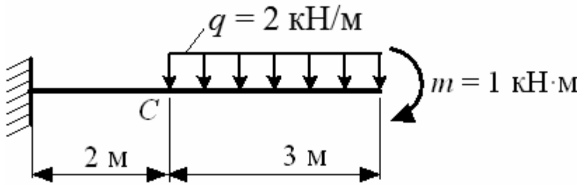
3 Чему равна поперечная сила Q_y в сечении C:

а) $Q_y = 3$ кН; в) $Q_y = 6$ кН;
б) $Q_y = 2$ кН; г) $Q_y = 7$ кН.



4 Чему равен изгибающий момент M_x в сечении C:

а) $M_x = 3$ кН · м;
б) $M_x = 7$ кН · м;
в) $M_x = 10$ кН · м;
г) $M_x = 1$ кН · м.



6 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брусе

Пример – Стальной брус (рисунок 6.1) площадью поперечного сечения A = 50 см^2 сжимается силой F = 300 Н. Удельный вес материала $\gamma = 78$ кН/м^3. Построить эпюру продольных сил N с учетом собственного веса бруса.

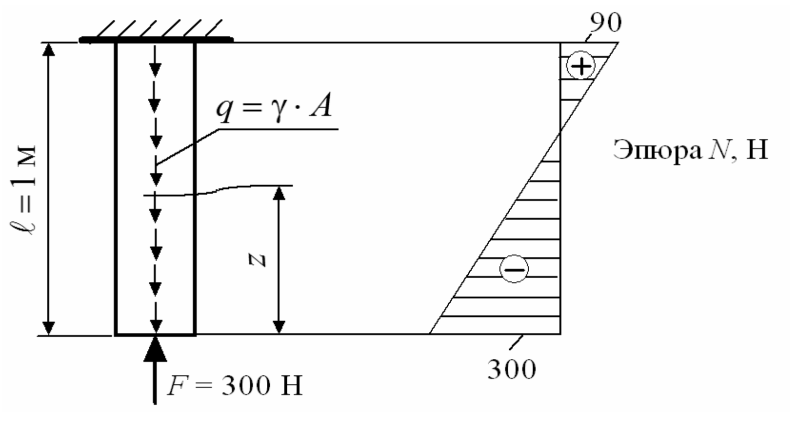


Рисунок 6.1

Решение

Построение эпюры продольных сил N:

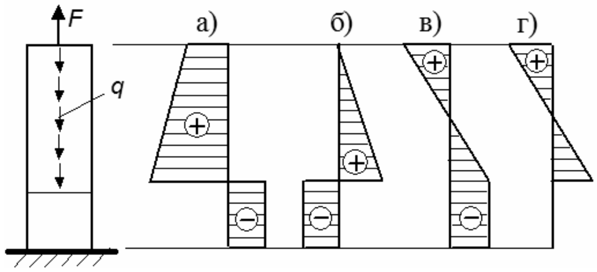
$$N = -F + \gamma \cdot A \cdot z = -300 + 78 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot z = -300 + 390 \cdot z;$$

$$z = 0; \quad N = -300 \text{ Н};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad N = 90 \text{ Н}.$$

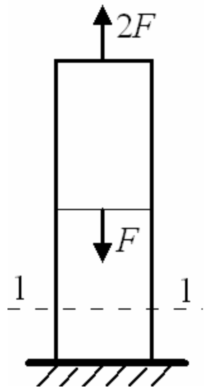
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Для стержня, изображенного на рисунке, эпюра продольных сил N будет иметь вид:

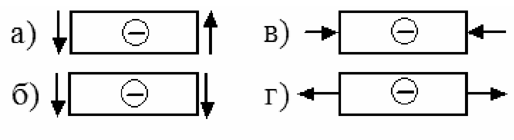


2 Для стержня, схема которого изображена на рисунке, продольная сила, действующая в сечении 1–1, будет:

а) растягивающей;
б) сжимающей;
в) сдвигающей;
г) равна нулю.



3 Укажите верное правило знаков для продольной силы N:



4 Если $N > 0$, то участок стержня:

а) сжат; в) растянут;
б) изогнут; г) испытывает сдвиг.

7 Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе

Пример – Для балки, изображенной на рисунке 7.1, построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M.

Решение

Определение реакций на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1{,}5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0;\ \ R_B = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 2 \cdot 6)}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3{,}5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0;\ \ R_A = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 3{,}5 - 10 \cdot 2 \cdot 1)}{5} = 17 \text{ кН}.$$

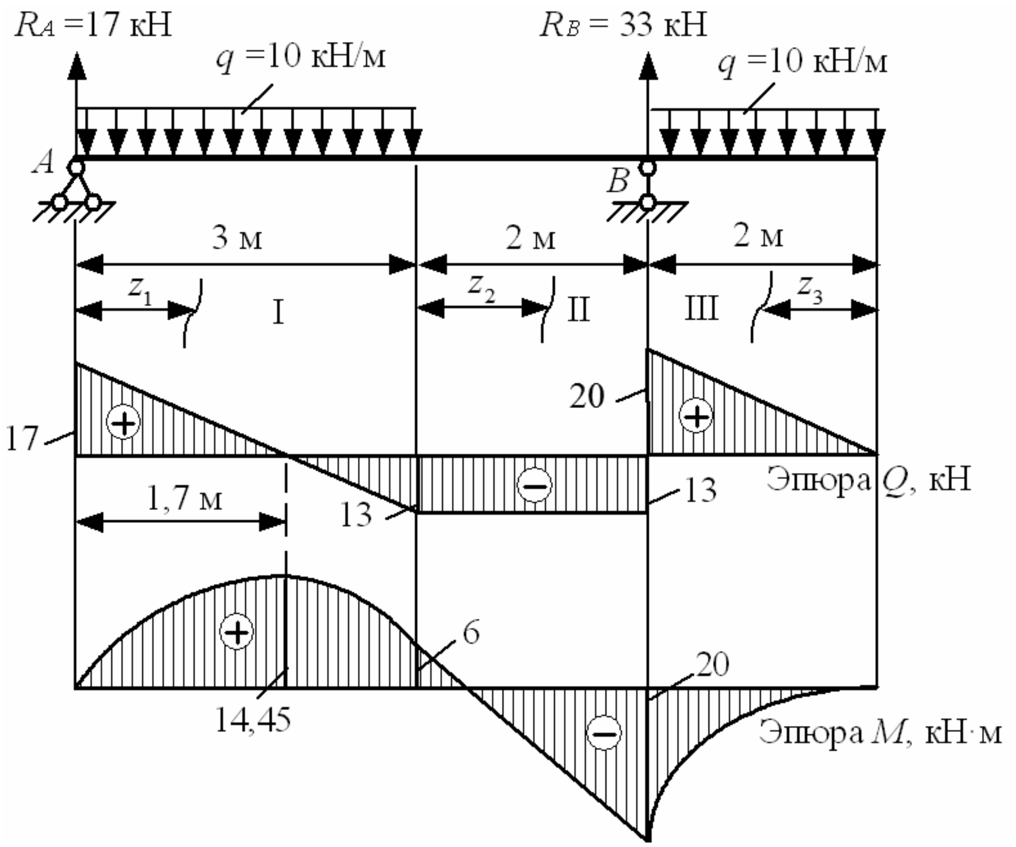


Рисунок 7.1

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
Участок I: $0 \le z_1 \le 3$ м.

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1\,;\; M = R_A \cdot z_1 - q\frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2\,;$$

$$z_1 = 0;\;\; Q = 17 \text{ кН};\; M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м};\;\; Q = -13 \text{кН};\; \text{M} = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0;\;\; z_1 = 1{,}7 \text{ м};$$

$$M_{экстр} = 17 \cdot 1{,}7 - 5 \cdot 1{,}7^2 = 14{,}45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II: $0 \le z_2 \le 2$ м.

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН};$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1{,}5 + z_2) = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1{,}5 + z_2);$$

$$z_2 = 0;\ \ M = 17\cdot 3 - 30\cdot 1{,}5 = 6\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 2\ \text{м};\ \ M = 17\cdot 5 - 30\cdot 3{,}5 = -20\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III: $0 \le z_3 \le 2$ м.

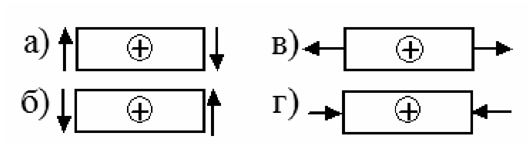
$$Q = q\cdot z_3 = 10\cdot z_3;\ \ M = -0{,}5\cdot q\cdot z_3^2 = -5\cdot z_3^2;$$

$$z_3 = 0;\quad Q = 0;\quad M = 0;$$

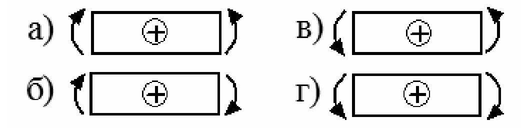
$$z_3 = 2\ \text{м};\ \ Q = 20\ \text{кН};\ \ M = -20\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите верное правило знаков для поперечной силы Q:



2 Укажите верное правило знаков для изгибающего момента M:

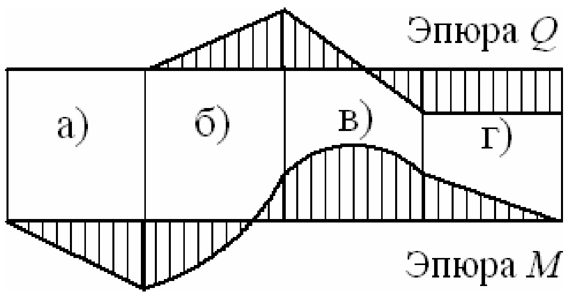


3 Укажите правильную дифференциальную зависимость:

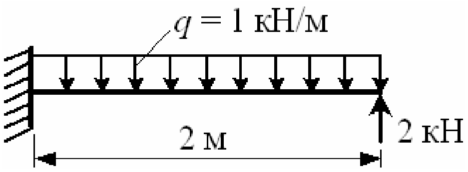
а) $M = \dfrac{dq}{dz}$; в) $q = \dfrac{dM}{dz}$;

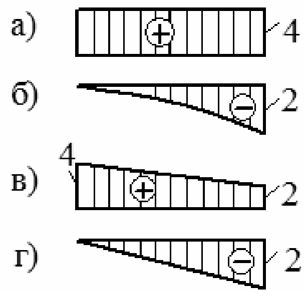
б) $Q = \dfrac{dM}{dz}$; г) $M = \dfrac{dQ}{dz}$.

4 На каком участке не соблюдаются дифференциальные зависимости между Q и M:

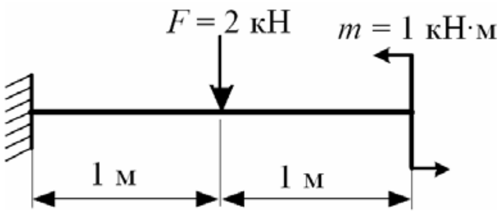


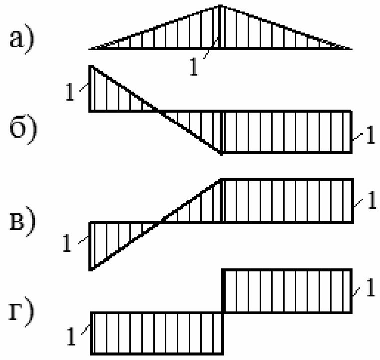
5 Какая эпюра поперечных сил верна для указанной балки:





6 Какая эпюра изгибающих моментов верна для указанной балки:





8 Определение внутренних сил при кручении. Построение эпюр крутящих моментов

Пример **–** Для заданного ступенчатого вала (рисунок 8.1) построить эпюру крутящих моментов. Предварительно вал уравновесить.

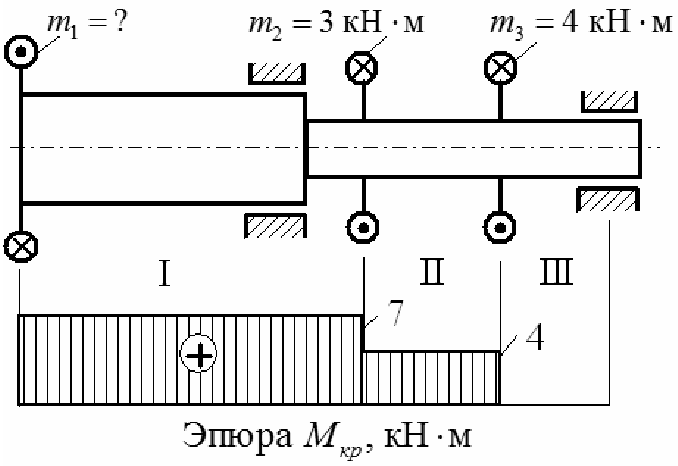


Рисунок 8.1

Решение

Для определения скручивающего момента m_1 составим уравнение статики:

$$\sum m = m_2 + m_3 - m_1 = 0\,,$$

откуда

$$m_1 = m_2 + m_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Построение эпюры $M_{кр}$:

$$M_1 = m_1 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_2 = m_1 - m_2 = 7 - 3 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_3 = m_1 - m_2 - m_3 = 7 - 3 - 4 = 0 .$$

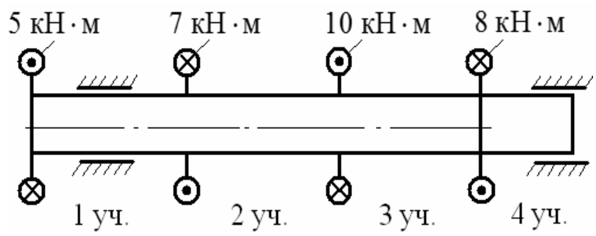
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 При кручении стержня в поперечном сечении бруса возникает ...:

а) продольная сила N;
б) крутящий момент $M_{кр}$;
в) изгибающий момент M;
г) поперечная сила Q.

2 Определите величину крутящего момента $M_{кр}$ на участке 3 (по модулю):

а) $M_{кр} = 22$ кН·м;
б) $M_{кр} = 8$ кН·м;
в) $M_{кр} = 10$ кН·м;
г) $M_{кр} = 2$ кН·м.



9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусьев

Пример 1 – Произвести проверку прочности и жесткости стального ступенчатого бруса, показанного на рисунке 9.1.

Исходные данные: A_1 = 3 см^2; A_2 = 5 см^2; [σ] = 160 МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\Delta\ell]$ = 1 мм.

Решение

Проверку прочности производим по условию

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{\max} \leq [\sigma] .$$

По эпюре продольных сил и конфигурации стержня определяем опасный участок:

$$\sigma_{max} = \frac{70 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 140 \cdot 10^6 \text{ Па} = 140 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

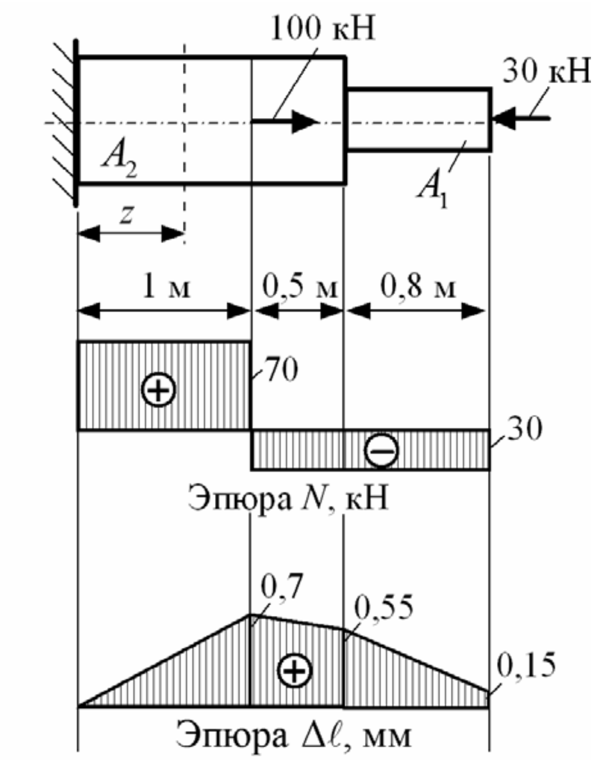


Рисунок 9.1

Для проверки жесткости стержня строим эпюру $\Delta\ell$, определяя деформацию каждого участка по формуле

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

Начало расчета находится в сечении, примыкающем к жесткой заделке, перемещение которого равно нулю: $z = 0$; $\Delta\ell = 0$.

$$z = 1 \text{ м}; \qquad \Delta\ell = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}7 \text{ мм};$$

$$z = 1{,}5 \text{ м}; \qquad \Delta\ell = 0{,}7 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}55 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}55 \text{ мм};$$

$$z = 2{,}3 \text{ м}; \qquad \Delta\ell = 0{,}55 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}15 \text{ мм}.$$

$$\Delta\ell_{\max} = 0{,}7 \text{ мм} < [\Delta\ell] = 1 \text{ мм}.$$

Жесткость бруса обеспечена.

Пример 2 – Бетонная колонна (рисунок 9.2) круглого поперечного сечения длиной ℓ = 5 м сжимается силой $F = 500$ кН.

Определить диаметр колонны, если допустимое напряжение на сжатие [σ] = 5 МПа, а удельный вес бетона $\gamma = 20 \cdot 10^3$ Н/м^3.

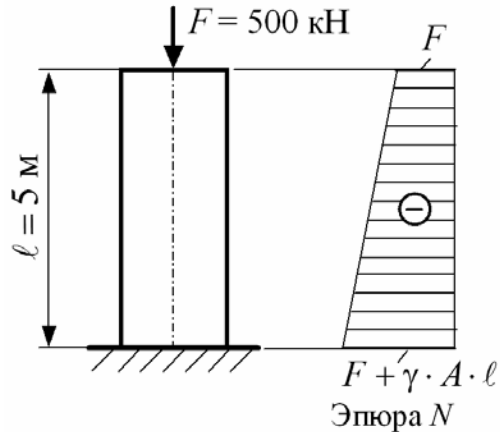


Рисунок 9.2

Решение

При постоянной площади поперечного сечения A полный вес колонны $G = \gamma \cdot A \cdot \ell$. Эпюра продольных сил N показана на рисунке 9.2.

В опасном сечении $N_{\max} = F + \gamma A \ell$. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{F}{A} + \gamma\ell \le [\sigma].$$

$$A \ge \frac{F}{[\sigma] - \gamma \cdot \ell} = \frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 - 20 \cdot 10^3 \cdot 5} = 0{,}102 \text{ м}^2.$$

$$d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}102}{\pi}} = 0{,}36 \text{ м} = 360 \text{ мм}.$$

Пример 3 – Определить наибольшее значение допустимой силы F для ступенчатого чугунного бруса (рисунок 9.3), если A = 10 см^2 , $[\sigma]_{раст}$ = 60 МПа, $[\sigma]_{сж}$ = 120 МПа.

Решение

Эпюра продольных сил N, выраженная в долях от силы F, показана на рисунке 9.3.

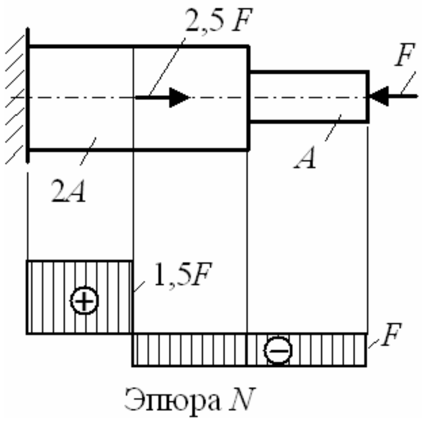


Рисунок 9.3

Расчет допустимой силы по условию прочности в сжатой области:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{\max}^{сж} = \frac{F}{A} \le [\sigma]_{сж};$$

$$[F]_{сж} \le A[\sigma]_{сж} = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^{6} = 120 \cdot 10^{3}\ \text{Н}.$$

Расчет допустимой силы по условию прочности в растянутой области:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{\max}^{раст} = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot A} \le [\sigma]_{раст};$$

$$[F]_{раст} \le \frac{2A[\sigma]_{раст}}{1,5} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^{6}}{1,5} = 80 \cdot 10^{3}\ \text{Н}.$$

Допустимой силой для бруса будет меньшая из рассчитанных сил: $[F] = 80$ кН.

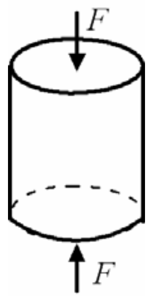
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 По какой формуле определяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении-сжатии:

а) $\sigma = \frac{M}{W}$; б) $\sigma = \frac{N}{A}$; в) $\sigma = G \cdot \varepsilon$; г) $\sigma = \frac{N}{E \cdot A}$.

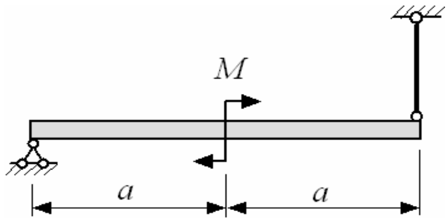
2 По какой формуле определяется абсолютная деформация бруса при растяжении-сжатии:

а) $\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}$; б) $\Delta\ell = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$; в) $\Delta\ell = \frac{\varepsilon}{\ell}$; г) $\Delta\ell = \frac{N}{A}$.



3 Образец диаметром 0,02 м разрушился под действием силы $F = 0{,}15$ МН. Тогда величина предела прочности материала равна:

а) 7,5 МПа; в) 209,3 МПа;
б) 375 МПа; г) 477,7 МПа.

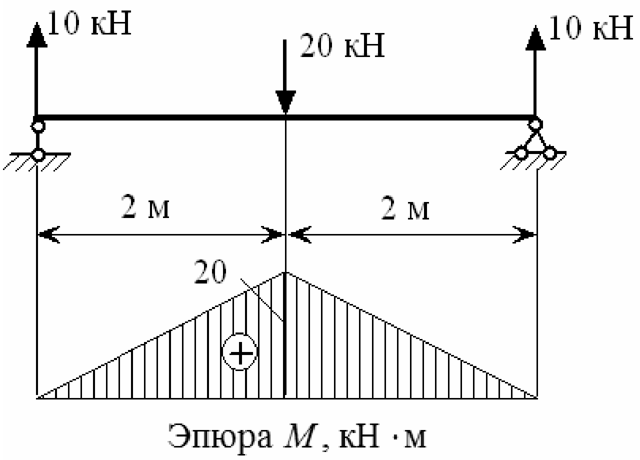


4 Жесткий брус, нагруженный моментом M, поддерживается в горизонтальном положении стальным стержнем площадью поперечного сечения A. Условие прочности стержня:

а) $\dfrac{M}{2 \cdot a \cdot A} \le [\sigma]$; б) $\dfrac{M \cdot A}{2 \cdot a} \le [\sigma]$; в) $\dfrac{M}{A} \le [\sigma]$; г) $\dfrac{M \cdot a}{A} \le [\sigma]$.

10 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проверочный расчет)

Пример – Проверить прочность балки таврового сечения (рисунок 10.1), если $[\sigma]_{раст} = 30$ МПа и $[\sigma]_{сж} = 60$ МПа.



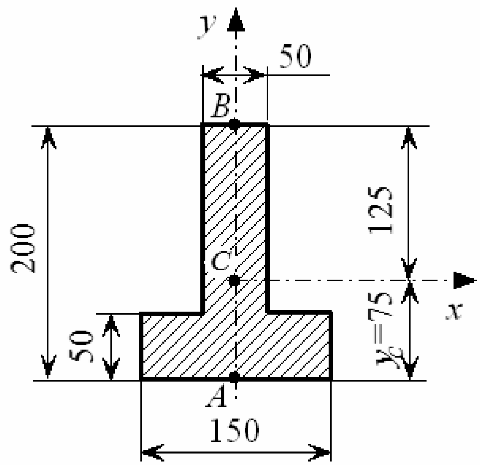


Рисунок 10.1

Решение

Определение координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$y_C = \frac{15 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 15 \cdot 5 \cdot 12{,}5}{15 \cdot 5 + 15 \cdot 5} = 7{,}5 \text{ см}.$$

Определение главного центрального момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 = 5312{,}5 \text{ см}^4 = 5312{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Определение моментов сопротивления поперечного сечения относительно оси x:

$$W_A = \frac{I_x}{y_A} = \frac{5312{,}5 \cdot 10^{-8}}{7{,}5 \cdot 10^{-2}} = 708 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_B = \frac{I_x}{y_B} = \frac{5312{,}5 \cdot 10^{-8}}{12{,}5 \cdot 10^{-2}} = 425 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение, в котором действует максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 20$ кН·м.

Проверка прочности:

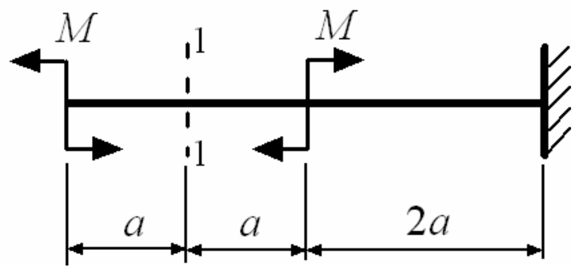
$$\sigma_A = \frac{M_{\max}}{W_A} = \frac{20 \cdot 10^3}{708 \cdot 10^{-6}} = 28{,}25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28{,}25 \text{ МПа} < [\sigma]_{раст} = 30 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{W_B} = \frac{20 \cdot 10^3}{425 \cdot 10^{-6}} = 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа} < [\sigma]_{сж} = 60 \text{ МПа}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 В сечении 1–1 возникают внутренние силовые факторы:

а) $M \neq 0,\ Q = 0$;
б) $M = 0,\ Q = 0$;
в) $M \neq 0,\ Q \neq 0$;
г) $M = 0,\ Q \neq 0$.



2 Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки имеет вид:

а) $\dfrac{M}{W} \leq [\sigma]$; б) $\dfrac{M \cdot \ell}{W} \leq [\sigma]$; в) $\dfrac{M}{E \cdot I} \leq [\sigma]$; г) $\dfrac{F}{W} \leq [\sigma]$.

11 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проектировочный расчет)

Пример – Подобрать двутавровое поперечное сечение стальной балки (рисунок 11.1) и проверить его прочность по нормальным и касательным напряжениям. Исходные данные: [σ] = 160 МПа; [τ] = 100 МПа.

Решение

Строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рисунок 11.1). По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение, в котором действует максимальный изгибающий момент $M_{\max}$ = 45 кН·м.

Поперечное сечение выбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \le [\sigma] = 160\ \text{МПа};$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 281{,}25 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 281{,}25\ \text{см}^3.$$

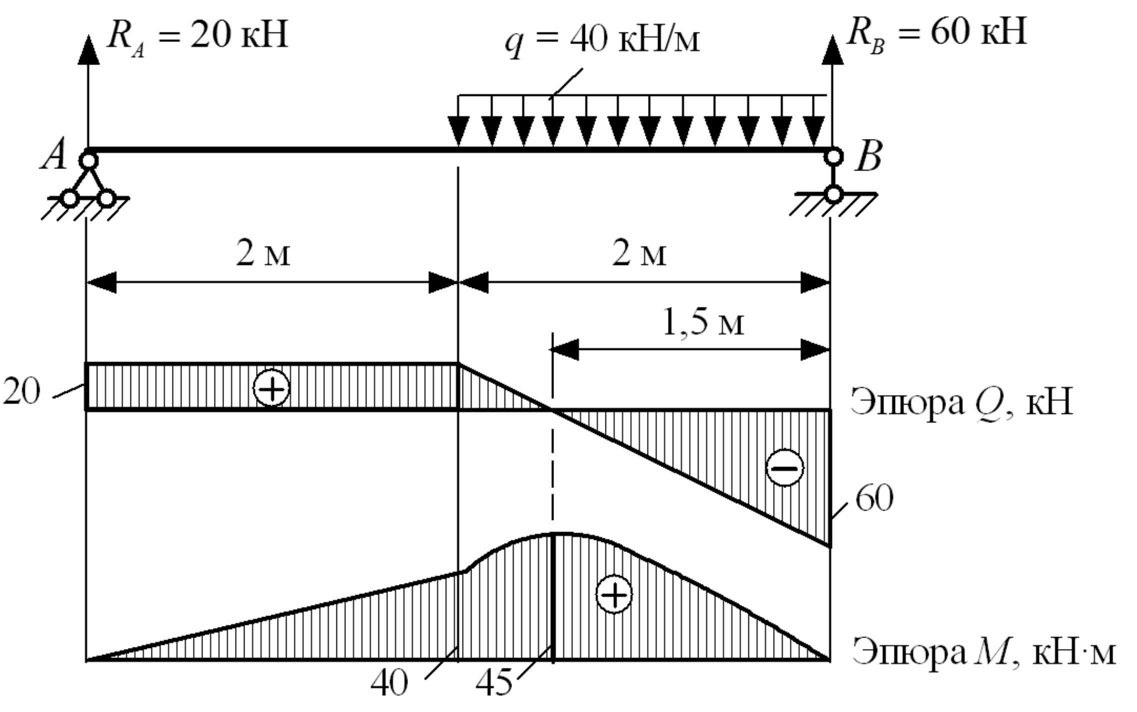


Рисунок 11.1

Рассчитанному моменту сопротивления в наибольшей степени подходит двутавр № 24 (W_x = 289 см^3; I_x = 3460 см^4; S_x^* = 163 см^3; b^* = 5,6 мм).

Проверяем прочность двутавра по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{b^* \cdot I_x} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,5 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

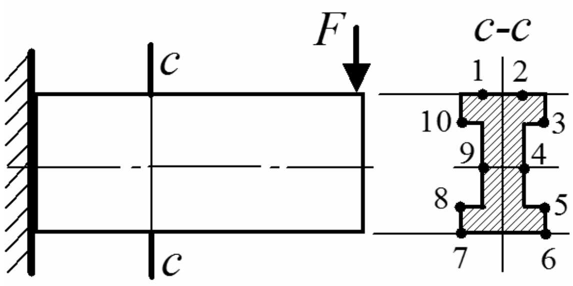
1 Максимальные нормальные напряжения действуют в точках:

а) 10, 3, 8, 5;

б) 3, 5, 6;

в) 1, 2, 7, 6;

г) 9, 4.



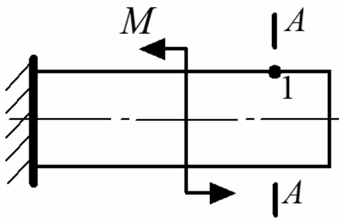
2 Какие напряжения действуют в точке 1:

а) нет напряжений;

б) действуют нормальное и касательное напряжения;

в) действует нормальное напряжение;

г) действует касательное напряжение.



12 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности

Пример 1 – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как указано на рисунке 12.1.

Проверить прочность детали по третьей теории прочности, если $[\sigma] = 160$ МПа.

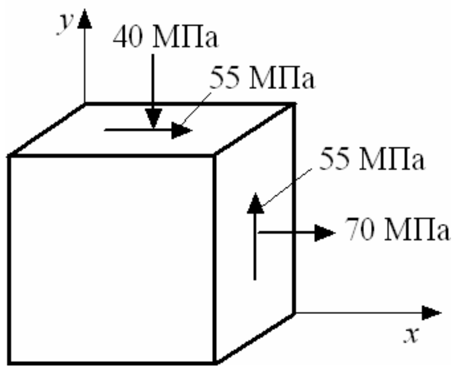


Рисунок 12.1

Решение

Напряжения, действующие на указанных площадках:

$$\sigma_x = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 55 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения

$$\sigma_{гл} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{70 - 40}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(70 + 40)^2 + 4 \cdot 55^2} = 15 \pm 78;$$

$$\sigma_{max} = 15 + 78 = 93 \text{ МПа} = \sigma_1;$$

$$\sigma_{min} = 15 - 78 = -63 \text{ МПа} = \sigma_3;$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_2 = 93 - (-63) = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Пример 2 – Для напряженного состояния (см. пример 1) определить положение главных площадок и направление действия главных напряжений.

Определить величину максимальных касательных напряжений и указать площадки, на которых они действуют.

Решение

Положение главных площадок определяется углом α_0:

$$\text{tg}2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 55}{70 - (-40)} = 1;$$

$$\alpha_0 = 22{,}5^\circ.$$

Так как $\alpha_0 > 0$, поворачиваем заданные площадки против часовой стрелки и получаем главные площадки (рисунок 12.2).

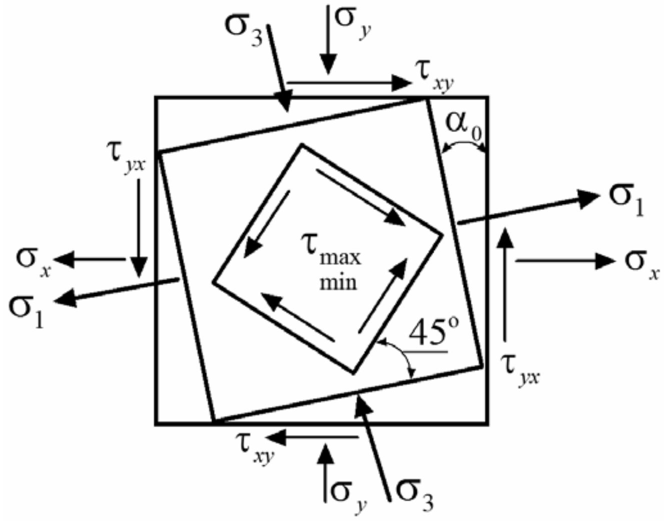


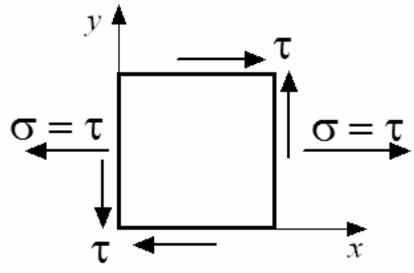
Рисунок 12.2

Определяем величину максимальных касательных напряжений, которые действуют на площадках, расположенных под углом 45° по отношению к главным площадкам:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{93 - (-63)}{2} = 78 \text{ МПа.}$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

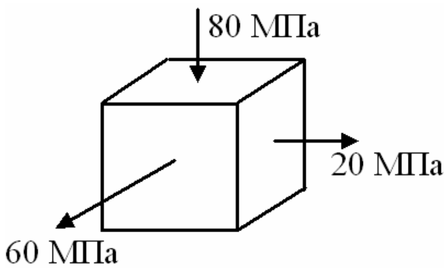
1 Для заданного напряженного состояния максимальное главное напряжение равно ...:



а) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\tau$; в) $\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\tau$;

б) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\tau$; г) $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\tau$.

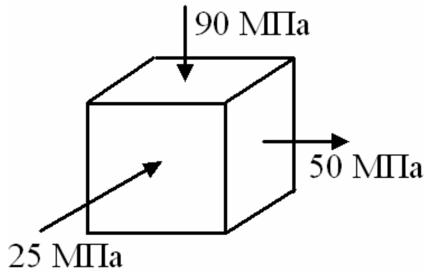
2 Для заданного напряженного состояния главное напряжение σ_3 равно:



а) 80 МПа; в) 20 МПа;

б) 60 МПа; г) – 80 МПа.

3 Для заданного напряженного состояния определите эквивалентное напряжение по теории максимальных касательных напряжений:



а) 65 МПа; в) 165 МПа;

б) 140 МПа; г) 75 МПа.

4 На главных площадках плоского напряженного состояния действуют:

а) только касательные напряжения;

б) только нормальные напряжения;

в) нет напряжений;

г) эквивалентные напряжения.

13 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (определение допускаемой нагрузки)

Пример – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой F (рисунок 13.1). Определить допустимую величину силы $[F]$ при $[\sigma]$ = 10 МПа. Проверить прочность балки по касательным напряжениям при $[\tau]$ = 1 МПа.

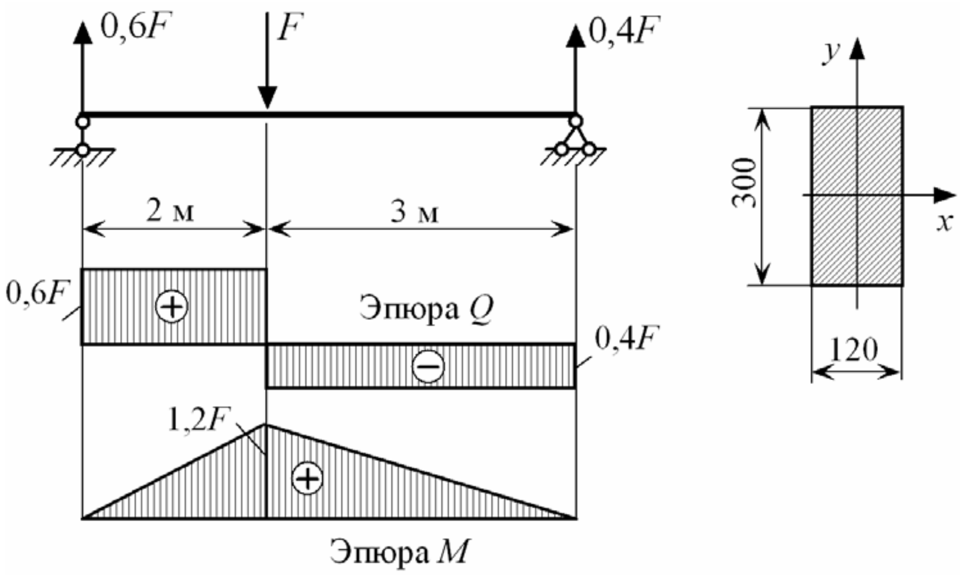


Рисунок 13.1

Решение

Осевой момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 30^2}{6} = 1800 \text{ см}^3 = 1800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рисунок 13.1).

Допустимую силу рассчитаем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{1{,}2 \cdot [F]}{W_x} \le [\sigma];$$

$$[F] = \frac{W_x \cdot [\sigma]}{1{,}2} = \frac{1800 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^6}{1{,}2} = 15000 \text{ Н} = 15 \text{ кН}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q_{max}}{A} = \frac{3}{2}\cdot\frac{0{,}6\cdot 15\cdot 10^3}{12\cdot 30\cdot 10^{-4}} = 0{,}375\cdot 10^6 \text{ Па} = 0{,}375 \text{ МПа} < [\tau] = 1 \text{ МПа}.$$

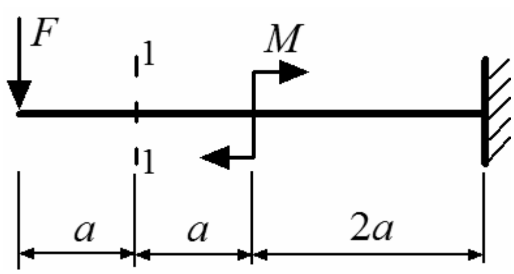
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какой закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки:

а) постоянный;
б) гиперболический;
в) параболический;
г) линейный.

2 В сечении 1–1 возникают внутренние силовые факторы:

а) $M \neq 0,\ Q = 0$;
б) $M = 0,\ Q = 0$;
в) $M \neq 0,\ Q \neq 0$;
г) $M = 0,\ Q \neq 0$.



14 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе

Пример 1 – Проверить жесткость двутавровой балки (рисунок 14.1), если допустимый прогиб $[y]$ = 6 мм.

Исходные данные: двутавр № 20 (I_x = 1840 см^4); $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

Решение

Уравнение прогибов для данной балки по методу начальных параметров имеет вид:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x\theta_0\cdot z - 18\cdot\frac{z^2}{2!} + 13\cdot\frac{z^3}{3!} - 4\cdot\frac{z^4}{4!}.$$

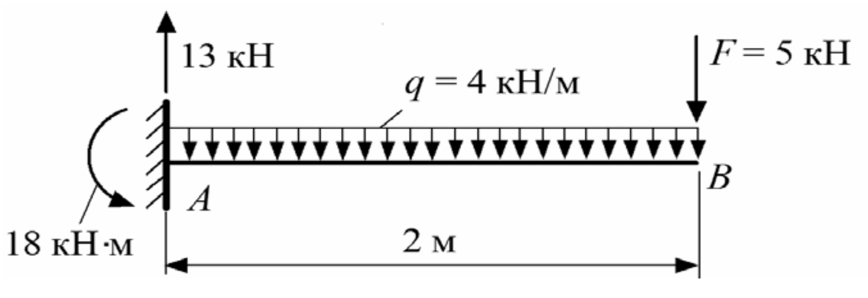


Рисунок 14.1

Начальные параметры следующие: $y_0 = 0;\ \theta_0 = 0$.

Максимальный прогиб $y_{\max} = y_B$ при z = 2 м.

$$EI_x y_B = -18 \cdot \frac{2^2}{2} + 13 \cdot \frac{2^3}{6} - 4 \cdot \frac{2^4}{24} = -21{,}33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 .$$

$$y_{\max} = y_B = \frac{21{,}33}{EI_x} = \frac{21{,}33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0058 \text{ м} = 5{,}8 \text{ мм} < [y] = 6 \text{ мм}.$$

Пример 2 – Методом начальных параметров определить прогиб сечения C и угол поворота сечения D деревянной балки прямоугольного поперечного сечения указанных размеров (рисунок 14.2).

Модуль продольной упругости материала $E = 10^4$ МПа = 10^{10} МПа.

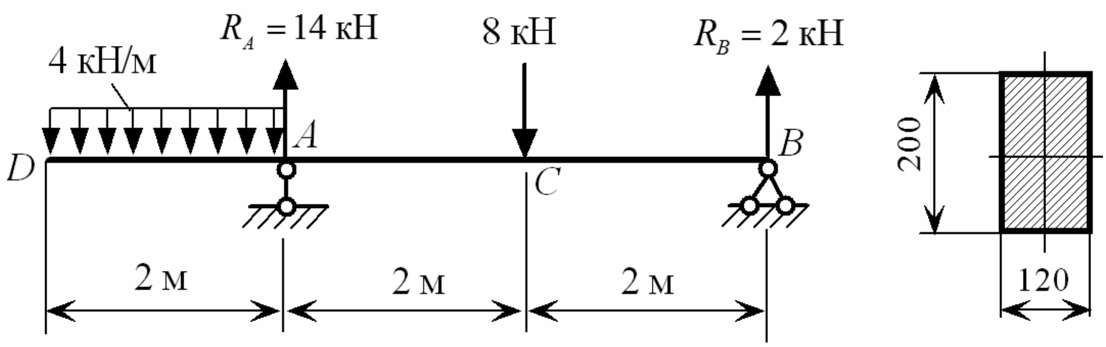


Рисунок 14.2

Решение

Определение осевого момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4 .$$

Определение начальных параметров:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{2^4}{4!} = 0 ;$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{6^4}{4!} + 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 14 \cdot \frac{4^3}{3!} - 8 \cdot \frac{2^3}{3!} = 0 ;$$

$$EI_x y_0 = -\frac{40}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_x \theta_0 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 .$$

Прогиб сечения C

$$EI_x y_C = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 14 \cdot \frac{2^3}{3!} =$$

$$= -\frac{40}{3} + 8 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{24} + 4 \cdot \frac{2^4}{24} + 14 \cdot \frac{2^3}{6} = -\frac{8}{3}\ \text{кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_C = -\frac{8}{3 \cdot EI_x} = -\frac{8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = -0{,}33 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = -3{,}3\ \text{мм}.$$

Угол поворота сечения D равен начальному параметру θ_0:

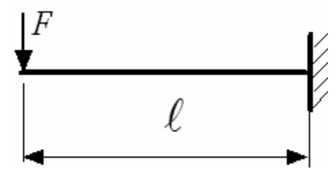
$$\theta_D = \frac{8}{EI_x} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 0{,}01\ \text{рад}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите наиболее общее определение «начальные параметры»:

а) прогиб и угол поворота в опорном сечении;
б) прогиб и угол поворота в крайнем левом сечении балки;
в) прогиб и угол поворота в жесткой заделке;
г) прогиб и угол поворота в крайнем правом сечении балки.

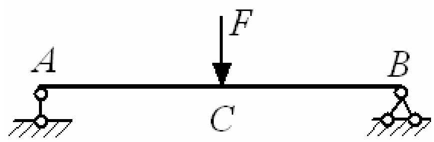
2 Начальные параметры показанной балки равны:



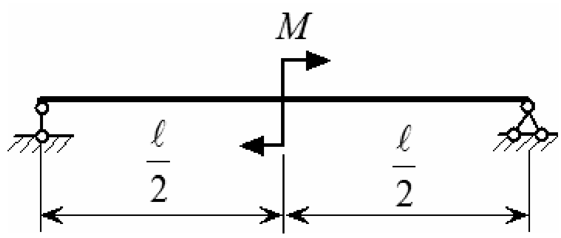
а) $y_0 \neq 0,\ \theta_0 = 0$;
б) $y_0 \neq 0,\ \theta_0 \neq 0$;
в) $y_0 = 0,\ \theta_0 = 0$;
г) $y_0 = 0,\ \theta_0 \neq 0$.

3 В каком сечении показанной балки прогиб равен нулю:

а) сечение A;
б) сечение C;
в) сечение B;
г) сечения A и B.



4 Балка нагружена сосредоточенным моментом M. Жесткость поперечного сечения балки равна EI_x. Начальный параметр θ_0 равен:



а) $\theta_0 = \frac{M \cdot \ell}{8 \cdot EI_x}$; б) $\theta_0 = 0$; в) $\theta_0 = -\frac{M \cdot \ell}{8 \cdot EI_x}$; г) $\theta_0 = \frac{M \cdot \ell}{24 \cdot EI_x}$.

5 Укажите жесткость поперечного сечения при изгибе:

а) GI_x; б) EI_ρ; в) EI_x; г) EA.

15 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии в статически неопределимых системах

Пример 1 – Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 15.1), если площадь поперечного сечения A = 3 см^2, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, допустимое напряжение [σ] = 160 МПа.

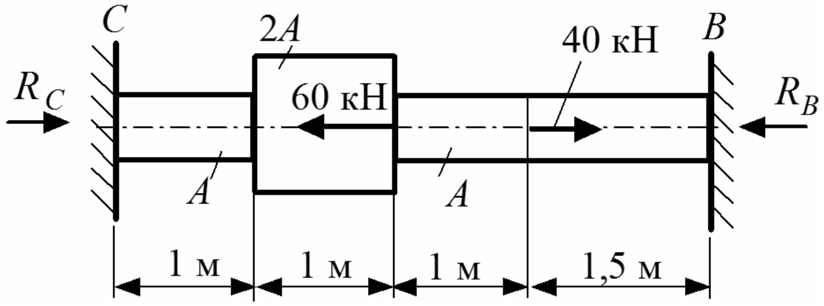


Рисунок 15.1

Решение

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum X = R_C - 60 + 40 - R_B = 0 .$$

Стержень один раз статически неопределим, т. к. единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta\ell = \Delta\ell_P + \Delta\ell_R = 0 ,$$

где $\Delta\ell_P$, $\Delta\ell_R$ – деформации стержня от внешних сил и реакций на опорах соответственно.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору C и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением эпюры N_P и под действием реакции R_C с построением эпюры N_R (рисунок 15.2).

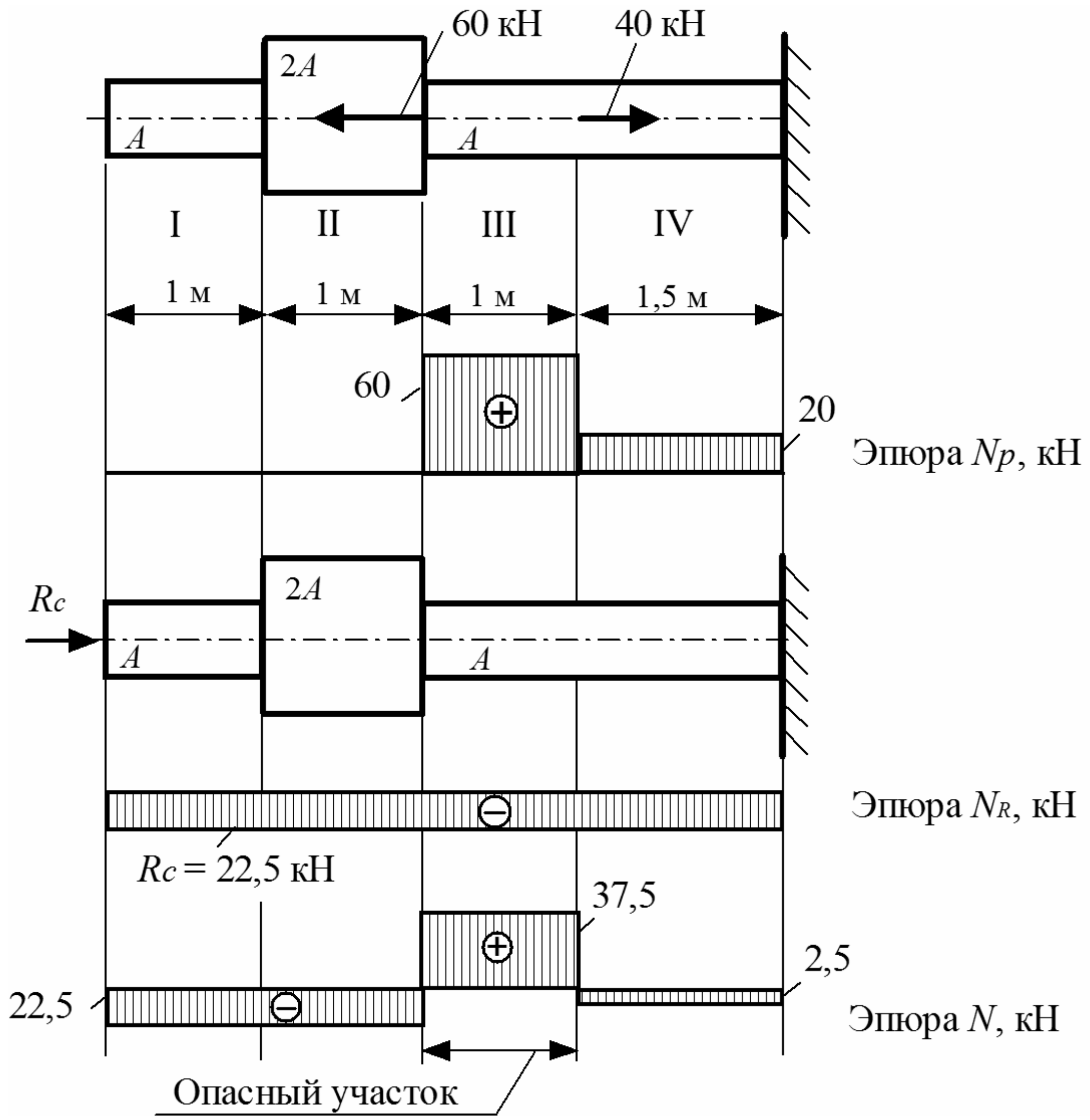


Рисунок 15.2

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta\ell_P = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \frac{\mathrm{N_i} \cdot \ell_\mathrm{i}}{E_\mathrm{i} \cdot A_\mathrm{i}} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1{,}5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta\ell_R = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \frac{N_\mathrm{i} \cdot \ell_\mathrm{i}}{E_\mathrm{i} \cdot A_\mathrm{i}} = -\frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_C \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1{,}5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A}.$$

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta\ell = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_C}{E \cdot A} = 0,$$

откуда R_C = 22,5 кН.

Окончательную эпюру продольных сил N строим суммированием эпюр N_P и N_R. Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{max} = \left(\frac{N}{A}\right)_{max} = \frac{37,5\cdot 10^3}{3\cdot 10^{-4}} = 125\cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Пример 2 – Определить грузоподъемность стержневой системы, которая состоит из абсолютно жесткого бруса BC и двух стальных стержней 1 и 2 (рисунок 15.3, *а*).

Исходные данные: ℓ_1 = 1 м; ℓ_2 = 1,5 м; A_1 = 1 см^2; $A_2 = 1,4$ см^2; $\alpha = 30°$; $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2\cdot 10^5$ МПа.

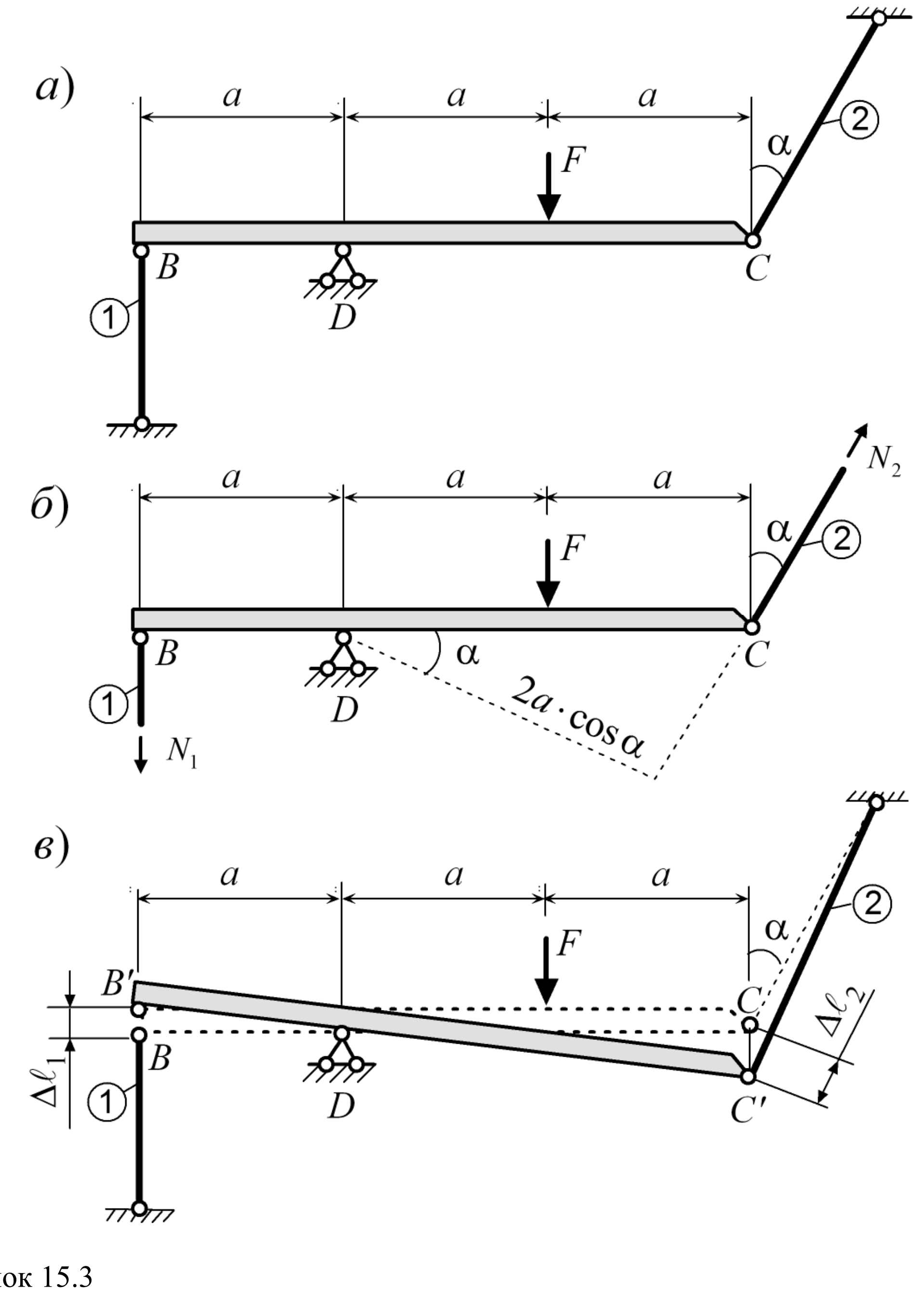


Рисунок 15.3

Решение

Проведем сечение через оба стержня и рассмотрим внутренние силы N_1 и N_2 (рисунок 15.3, *б*).

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum M_D = N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a \cdot \cos\alpha - F \cdot a = 0,$$

$$N_1 + N_2 \cdot 2\cos\alpha = F. \qquad (15.1)$$

Составим уравнение совместности деформаций и перемещений, для чего рассмотрим конструкцию в деформированном состоянии (рисунок 15.3, *в*). В результате удлинения стержней брус BC повернется вокруг шарнира D, оставаясь прямым. Перемещение шарнира B равно удлинению первого стержня: $BB' = \Delta\ell_1$. Перемещение шарнира C равно: $CC' = \Delta\ell_2/\cos\alpha$.

Из подобия треугольников DBB' и DCC' получаем

$$\frac{\Delta\ell_1}{a} = \frac{\Delta\ell_2 / \cos\alpha}{2a}, \quad \text{или} \quad \Delta\ell_2 = 2\cos\alpha \cdot \Delta\ell_1.$$

Выразим деформации стержней через продольные силы:

$$\frac{N_2\ell_2}{EA_2} = 2\cos\alpha \frac{N_1\ell_1}{EA_1};$$

$$N_2 = 2\cos\alpha \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1} N_1. \qquad (15.2)$$

Подставим уравнение (15.2) в уравнение (15.1):

$$\left(1 + 4\cos^2\alpha \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1}\right) N_1 = \left(1 + 4\cos 30^{\circ} \frac{1 \cdot 1,4}{1,5 \cdot 1}\right) N_1 = 3,8 N_1 = F.$$

$$N_1 = 0,263F; \quad N_2 = 2\cos 30^{\circ} \frac{1 \cdot 1,4}{1,5 \cdot 1} N_1 = 0,425F.$$

Напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,263 \cdot F}{1 \cdot 10^{-4}} = 2630 \cdot F \left(\frac{1}{\text{м}^2}\right);$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,425 \cdot F}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 3036 \cdot F \left(\frac{1}{\text{м}^2}\right).$$

Более нагруженным оказался стержень 2.

Определим допустимую грузоподъемность из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 3036 \cdot F \leq [\sigma] \text{ .}$$

$$[F] = \frac{[\sigma]}{3036} = \frac{160 \cdot 10^6}{3036} = 52,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 52,7 \text{ кН}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Сколько независимых уравнений статики можно составить для плоской стержневой системы:

а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

2 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой стержневой системы:

а) одно; б) два; в) три; г) четыре.

3 Укажите условие прочности для статически неопределимой системы, работающей на растяжение-сжатие:

а) $\frac{Q}{A} \leq [\sigma]$; б) $\frac{M}{W} \leq [\sigma]$; в) $\frac{N}{E} \leq [\sigma]$; г) $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$.

4 Какое свойство не присуще статически неопределимым системам:

а) возможность возникновения температурных напряжений;

б) возможность возникновения монтажных напряжений;

в) возможность свободного деформирования;

г) перераспределение внутренних усилий при нарушении одной связи.

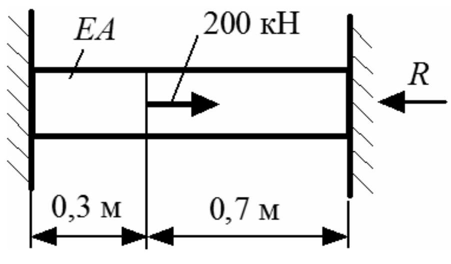
5 Определите реакцию на правой опоре R, если жесткость поперечного сечения EA постоянна по величине:

а) 60 кН;

б) 200 кН;

в) 85,7 кН;

г) 140 кН.



Список литературы

1 **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.

2 **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.

3 **Бажанов, В. Л.** Механика деформируемого твердого тела : учеб. пособие / В. Л. Бажанов. – М. : Юрайт, 2021. – 178 с.

4 **Валишвили, Н. В.** Сопротивление материалов и конструкций: учебник / Н. В. Валишвили, С. С. Гаврюшин. – М. : Юрайт, 2022. – 530 с.

5 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов : учебник / П. А. Степин. – 13-е изд., стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2022. – 320 с. : ил.

6 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп., репринт. изд. – М. : АльянС, 2018. – 624 с.

7 **Беляев, Н. М.** Сопротивление материалов : учеб. пособие / Н. М. Беляев. – 15-е изд., перераб. и стер. – М. : АльянС, 2015. – 608 с.

8 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Мн. : Выш. шк., 2007. – 797 с.

9 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учебник / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

10 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций : учебник / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – М. : Машиностроение, 2002. – 436 с.