

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

# МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности 6-05-0722-05  
«Производство изделий на основе трехмерных технологий»  
очной формы обучения*

Часть 2



Могилев 2026

УДК 539.3/6  
ББК 305.1212  
М55(64)

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «1» декабря 2025 г.,  
протокол № 6

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Каткало;  
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Механика материалов и конструкций» для студентов специальности 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» очной формы обучения. Содержат материал для проведения практических занятий в весеннем семестре.

Учебное издание

## МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

### Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2026

## Содержание

Введение.....	4
1 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность.....	5
2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при сов- местном действии изгиба и кручения.....	7
3 Расчеты при сложном изгибе.....	10
4 Расчет колонны на внецентренное растяжение-сжатие.....	13
5 Построение ядра сечения при внецентренном приложении про- дольной силы .....	17
6 Расчеты сжатых стержней на устойчивость .....	19
7 Расчет составного сечения продольно сжатого стержня.....	24
8 Определение перемещений с использованием интегралов Мора.....	26
9 Определение перемещений способом Верещагина.....	29
10 Расчет простейших статически неопределимых стержневых систем методом сил.....	32
11 Расчеты при продольном ударе.....	34
12 Расчеты при поперечном ударе.....	35
13 Колебания систем с одной степенью свободы.....	38
14 Расчет толстостенных труб.....	40
15 Расчет тонкостенных объектов.....	43
Список литературы.....	45

## Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 6-05-0722-05 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» изучают дисциплину «Механика материалов и конструкций» на протяжении 3-го и 4-го семестров. Методические рекомендации выполнены в объеме практических занятий 4-го семестра.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов компетенции:

- владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;
- выбирать конструктивные материалы и формы элементов конструкций, расчетные схемы, производить расчеты технических конструкций и их элементов на прочность, устойчивость, жесткость.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–11], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

## 1 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность

**Пример 1** – Проверить прочность и жесткость стального бруса (рисунок 1.1). Исходные данные:  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ ;  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $[\varphi] = 0,03 \text{ рад}$ .

*Решение*

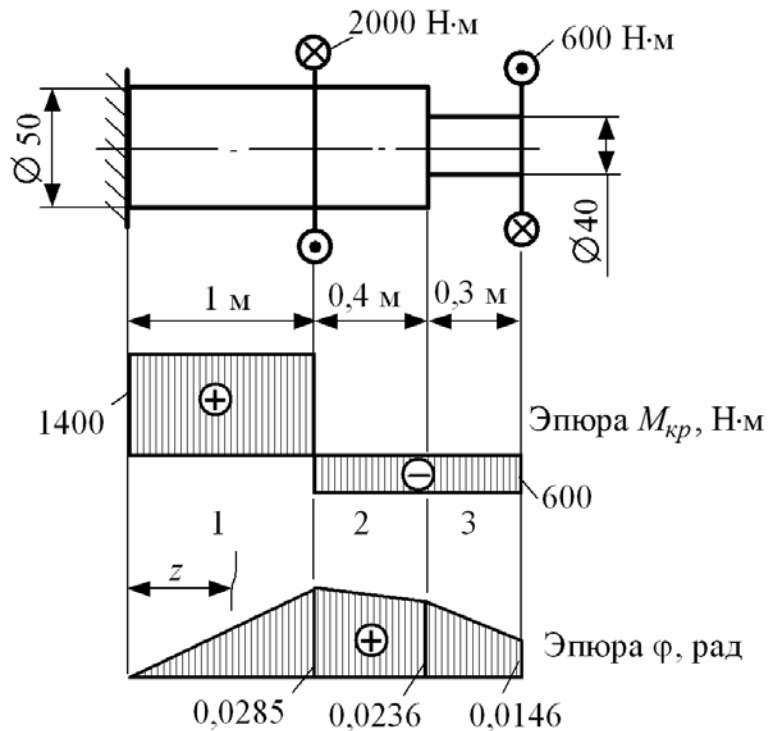


Рисунок 1.1

Геометрические характеристики вала следующие:

$$I_{\rho 1} = I_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4 = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4 = 25,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_{\rho 1} = W_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,53 \text{ см}^3 = 24,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3 = 12,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Строим эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$  (см. рисунок 1.1).

Проверка прочности вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 1}} = \frac{1400}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 57,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 57,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 2}} = \frac{600}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 3}} = \frac{600}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 57,1 \text{ МПа} < [\tau] = 60 \text{ МПа}.$$

Построение эпюры углов закручивания и проверка жесткости вала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр i} \cdot \ell_i}{G_i \cdot I_{\rho i}};$$

$$z = 0 \text{ м}; \quad \varphi = 0 \text{ рад};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 = \frac{1400 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0285 \text{ рад};$$

$$z = 1,4 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0285 - \frac{600 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0236 \text{ рад};$$

$$z = 1,7 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_3 = 0,0236 - \frac{600 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,12 \cdot 10^{-8}} = 0,0146 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\max} = 0,0285 \text{ рад} < [\varphi] = 0,03 \text{ рад}.$$

**Пример 2** – Определить минимальный диаметр стального вала (рисунок 1.2), если  $[\tau] = 90 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\Theta] = 0,03 \text{ рад/м}$ .

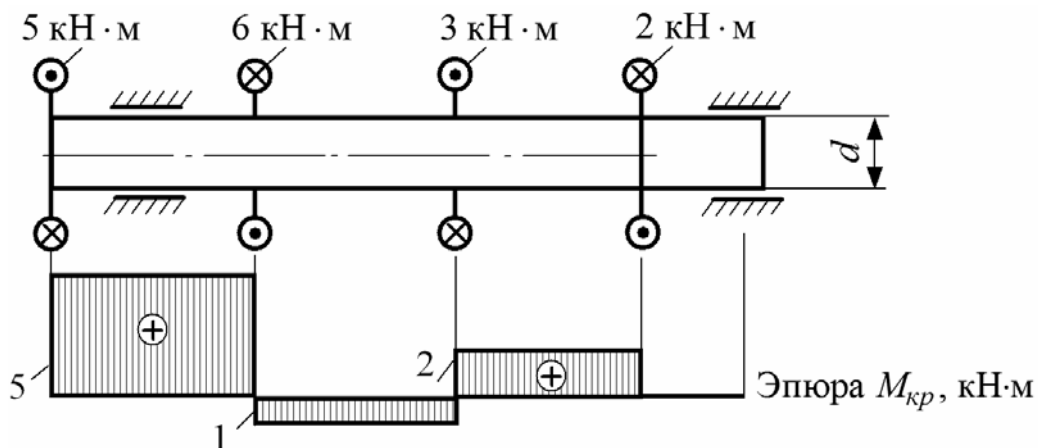


Рисунок 1.2

*Решение*

По эпюре  $M_{кр}$  определим опасный участок, на котором действует максимальный крутящий момент 5 кН·м.

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,03}} = 0,0679 \text{ м}.$$

В качестве минимального диаметра вала выбираем значение

$$d = 0,0679 \text{ м} = 67,9 \text{ мм}.$$

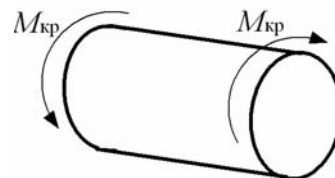
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите формулу для расчета максимальных касательных напряжений при кручении:

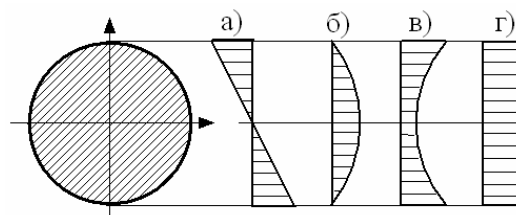
$$\text{а) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{W_{\rho}}; \quad \text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_{\rho}}; \quad \text{в) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}}; \quad \text{г) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}.$$

2 Определите из расчета на прочность допустимое значение момента  $[M_{кр}]$ , если диаметр вала 2 см, а допустимое напряжение  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ :

- а)  $50 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  
 б)  $60 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  
 в)  $40 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  
 г)  $30 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$ .



3 Как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении?



## 2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

**Пример** – На вал круглого сплошного сечения диаметром  $d = 68 \text{ мм}$  насажены шестерня средним диаметром  $D_1 = 0,23 \text{ м}$  и шкив ременной передачи диаметром  $D_2 = 0,39 \text{ м}$  и весом  $G = 600 \text{ Н}$  (рисунок 2.1, а). Вал делает 660 об/мин и передает мощность 40 кВт. Допускаемое напряжение материала вала  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ . Проверить прочность вала в опасном сечении по четвертой теории прочности.

*Решение*

Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив,

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

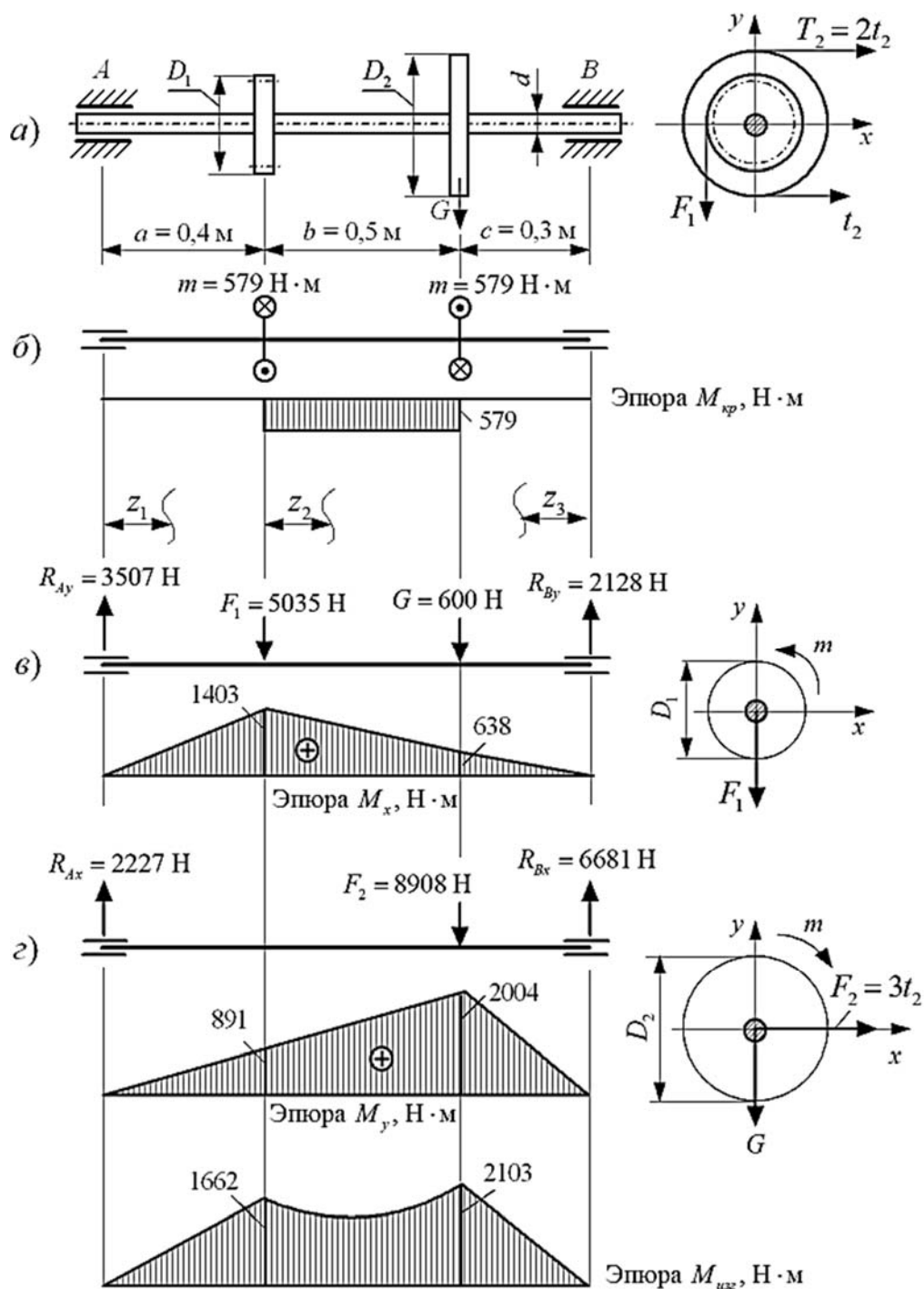


Рисунок 2.1

Схема действия крутящих моментов и эпюра  $M_{кр}$  показаны на рисунке 2.1, б.

Окружное усилие  $F_1$ , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Изгибающая сила  $F_2$  от ременной передачи на шкиве, действующая на вал



в горизонтальной плоскости,

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия изгибающих сил в вертикальной плоскости показана на рисунке 2.1, в. Опорные реакции  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов  $M_x$ .

Схема действия изгибающих сил в горизонтальной плоскости показана на рисунке 2.1, г. Опорные реакции  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$  определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов  $M_y$ .

Значения суммарных изгибающих моментов  $M_{изг}$  в характерных сечениях вала определим по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По эпюре полных изгибающих моментов  $M_{изг}$  и эпюре крутящих моментов  $M_{кр}$  определим опасное сечение вала, в котором действуют наибольший изгибающий момент  $M_{изг} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и крутящий момент  $M_{кр} = 579 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно четвертой теории прочности

$$M_{эkv}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Осевой момент сопротивления вала

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^3}{32} = 30,85 \text{ см}^3.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{эkv} = \frac{M_{эkv}^{IV}}{W_x} = \frac{2162}{30,85 \cdot 10^{-6}} = 70,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,1 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

1 Какая теория прочности применяется для расчета стальных валов на совместное действие изгиба и кручения:

- а)  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\tau]$ ;      в)  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\tau]$ ;  
 б)  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \kappa \cdot \sigma_3 \leq [\tau]$ ;      г)  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq [\tau]$ .

2 Как определить эквивалентный момент по третьей теории прочности:

- а)  $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}$ ;      в)  $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2}$ ;  
 б)  $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ ;      г)  $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{изг}}^2}$ .

3 Как определить суммарный изгибающий момент:

- а)  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x + M_y}$ ;      в)  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x \cdot M_y}$ ;  
 б)  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ ;      г)  $M_{\text{изг}} = M_x + M_y$ .

### 3 Расчеты при сложном изгибе

**Пример 1** – Стальная балка двутаврового поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 3.1). Проверить прочность балки.

Дано: двутавр № 30 ( $W_x = 472 \text{ см}^3$ ;  $W_y = 49,9 \text{ см}^3$ );  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

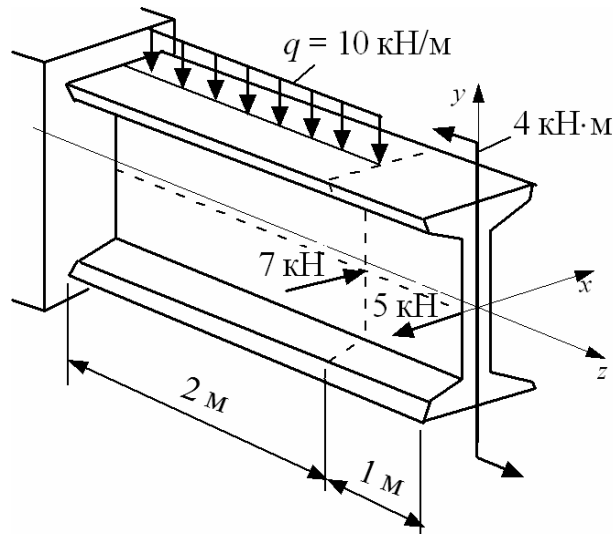


Рисунок 3.1

#### Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. Вертикальные силы изгибают балку в вертикальной плоскости, создавая момент  $M_x$ . Горизонтальные силы изгибают балку в горизонтальной плоскости, создавая момент  $M_y$ . Промежуточные расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 3.2.

Выполним проверку прочности в предполагаемых опасных сечениях по условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

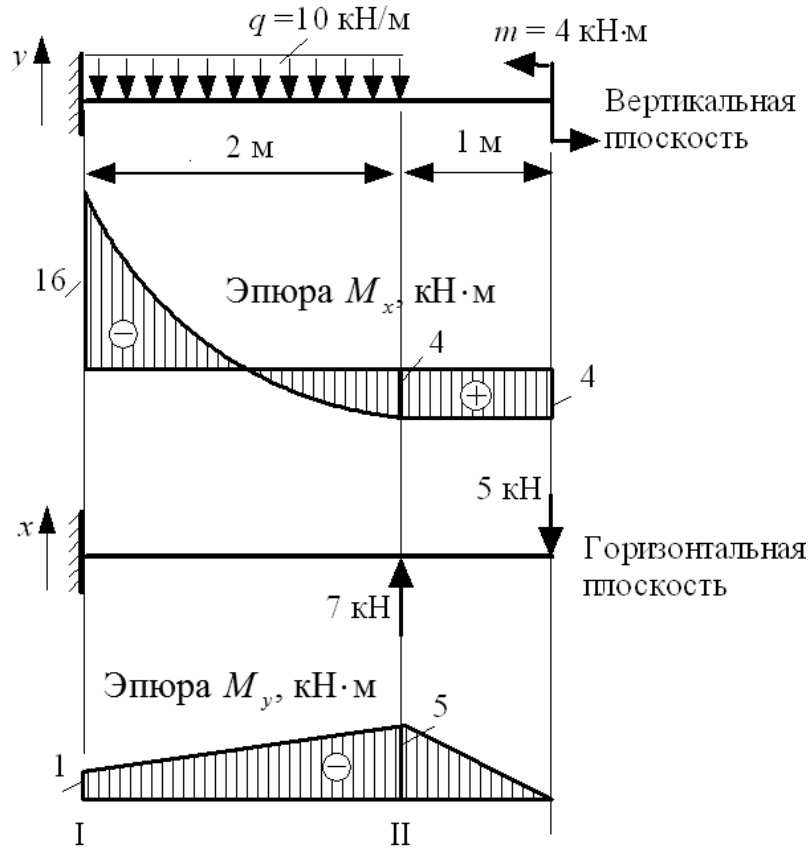


Рисунок 3.2

Напряжение в сечении I

$$\sigma_I = \frac{16 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{1 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 54 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Напряжение в сечении II

$$\sigma_{II} = \frac{4 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Наиболее опасным оказалось сечение II. Условие прочности выполняется:

$$\sigma_{\max} = 109 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

**Пример 2** – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 3.3). Определить минимальные размеры поперечного сечения ( $b_{\min}$ ), если  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .

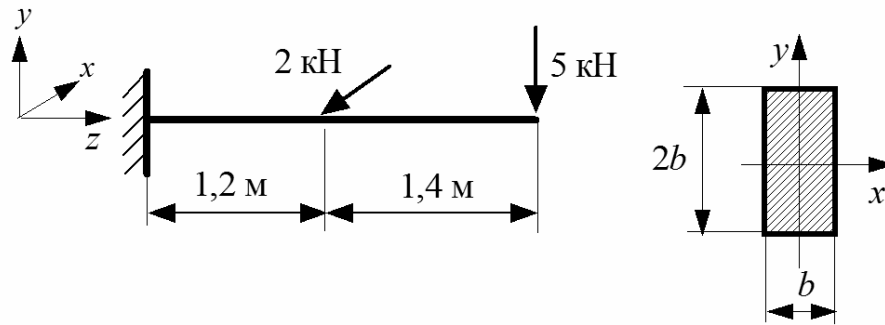


Рисунок 3.3

*Решение*

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. От силы, действующей в вертикальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$ . От силы, действующей в горизонтальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (рисунок 3.4).

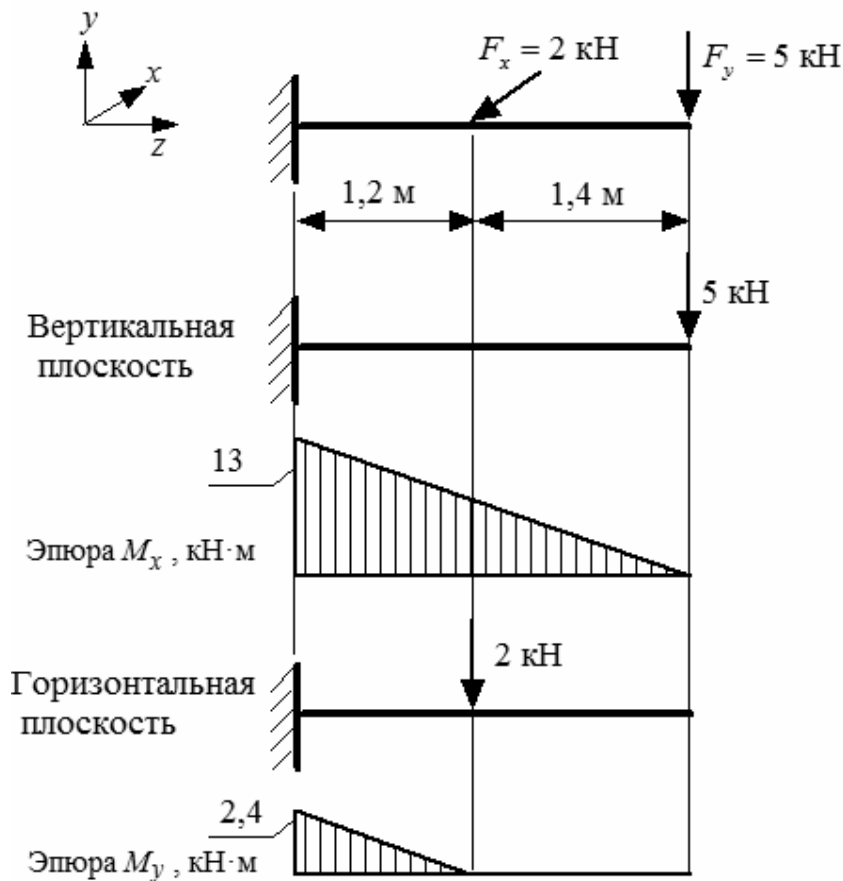


Рисунок 3.4

Осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения выразим через размер  $b$ :

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3}; \quad W_y = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Условие прочности для опасного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{13 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{2,4 \cdot 10^3 \cdot 3}{b^3} = \frac{26,7 \cdot 10^3}{b^3} = [\sigma] = 10 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Определим размер  $b_{\min}$ :

$$b_{\min} = \sqrt[3]{\frac{26,7 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,1387 \text{ м} \approx 140 \text{ мм}.$$

Вывод: для заданной балки следует использовать деревянный брус с минимальными размерами  $140 \times 280 \text{ мм}$ .

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

1 При косом изгибе нулевая линия:

- а) перпендикулярна плоскости суммарного изгибающего момента;
- б) перпендикулярна плоскости суммарного прогиба;
- в) совпадает с плоскостью суммарного изгибающего момента;
- г) совпадает с плоскостью суммарного прогиба.

2 По какой формуле определяются максимальные напряжения при косом изгибе для сечений, которые вписываются в прямоугольник:

$$\text{а) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y}; \quad \text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}; \quad \text{в) } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \quad \text{г) } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}.$$

3 Для каких поперечных сечений косой изгиб невозможен:

- а) двутавр и прямоугольник;
- б) квадрат и равносторонний треугольник;
- в) швеллер и равнобедренный треугольник;
- г) равнополочный уголок.

## **4 Расчет колонны на внецентренное растяжение-сжатие**

**Пример 1** – Проверить прочность бетонной колонны, если  $F = 7 \text{ кН}$ ,  $[\sigma]_{\text{раст}} = 0,6 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{\text{сж}} = 6 \text{ МПа}$  (рисунок 4.1, а).

*Решение*

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны.

Площадь  $A = 20 \cdot 18 = 360 \text{ см}^2$ .

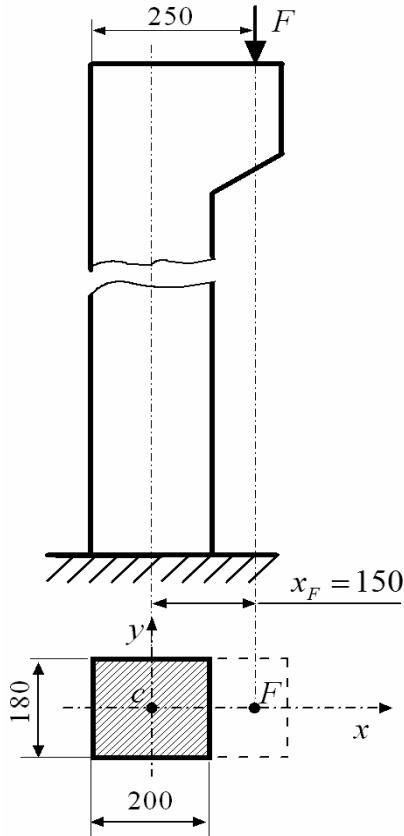
Координаты точки приложения силы следующие:  $x_F = 15 \text{ см}$ ;  $y_F = 0$ .

Положение нейтральной оси определяется по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (рисунок 4.1, б):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{33,3}{15} = -2,2 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{27}{0} = -\infty.$$

а)



б)

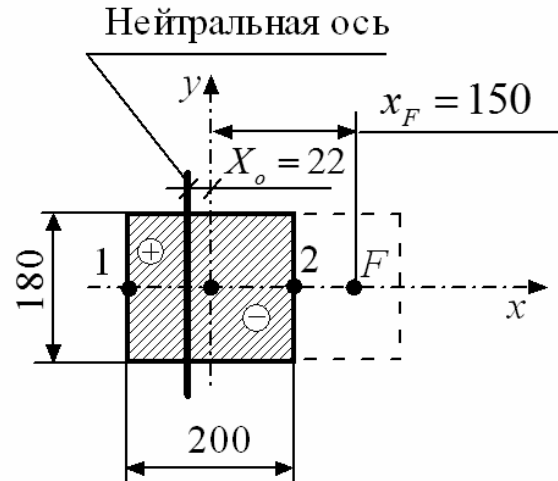


Рисунок 4.1

Нейтральная ось разделила колонну на две части. Определим координаты *опасных точек*.

В *растянутой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например точку 1:  $x_1 = -10 \text{ см}$ ;  $y_1 = 0$ .

В *сжатой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например точку 2:  $x_2 = 10 \text{ см}$ ;  $y_2 = 0$ .

Проверим прочность колонны по условию

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_{on}}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_{on}}{i_x^2} \right) \leq [\sigma],$$

где  $x_{on}$ ,  $y_{on}$  — координаты опасных точек поперечного сечения.

Проверка прочности в растянутой области (точка 1):

$$\sigma_{\max}^{расм} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left( 1 + \frac{15 \cdot (-10)}{33,3} + 0 \right) = 0,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,68 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = 0,68 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{раст}} = 0,6 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{0,68 - 0,6}{0,6} \cdot 100 \% = 13,3 \% > 5 \%,$$

что недопустимо.

Проверка прочности в сжатой области (точка 2):

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left( 1 + \frac{15 \cdot (10)}{33,3} + 0 \right) = -1,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = 1,07 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}} = 6 \text{ МПа}.$$

Вывод: так как условие прочности на растяжение не выполняется, то прочность колонны не обеспечена.

**Пример 2** – Определить минимальный диаметр стального стержня, к которому приложена растягивающая сила  $F = 30 \text{ кН}$  (рисунок 4.2), если допустимое напряжение материала  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ .

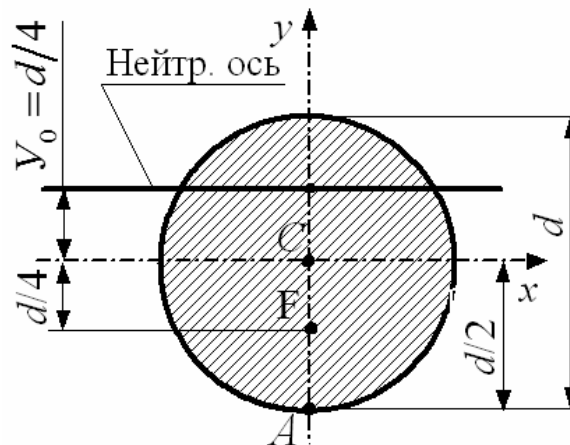


Рисунок 4.2

*Решение*

Площадь поперечного сечения стержня  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,785 \cdot d^2$ .

Квадрат радиуса инерции  $i_x^2 = i_y^2 = d^2/16$ .

Координаты точки приложения силы следующие:  $x_F = 0$ ;  $y_F = -d/4$ .

Отрезки, которые отсекает нейтральная линия на осях координат,

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{d^2/16}{0} = -\infty;$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{d^2/16}{-d/4} = \frac{d}{4}.$$

Опасной является точка  $A$  как самая удаленная точка от нейтральной оси (см. рисунок 4.2). Ее координаты следующие:  $x_A = 0$ ;  $y_A = -d/2$ .

Определим минимальный диаметр стержня из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{0 \cdot 0}{d^2/16} + \frac{(-d/4) \cdot (-d/2)}{d^2/16} \right) = \frac{F}{0,785 \cdot d^2} \cdot 3 = [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt{\frac{F \cdot 3}{[\sigma] \cdot 0,785}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{180 \cdot 10^6 \cdot 0,785}} = 0,025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

**Пример 3** – Определить допустимую сжимающую силу для чугунного стержня коробчатого поперечного сечения (рисунок 4.3), если допустимое напряжение материала  $[\sigma]_{\text{раст}} = 60 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{\text{сж}} = 150 \text{ МПа}$ . Построить ядро сечения. Размеры на рисунке 4.3 показаны в миллиметрах.

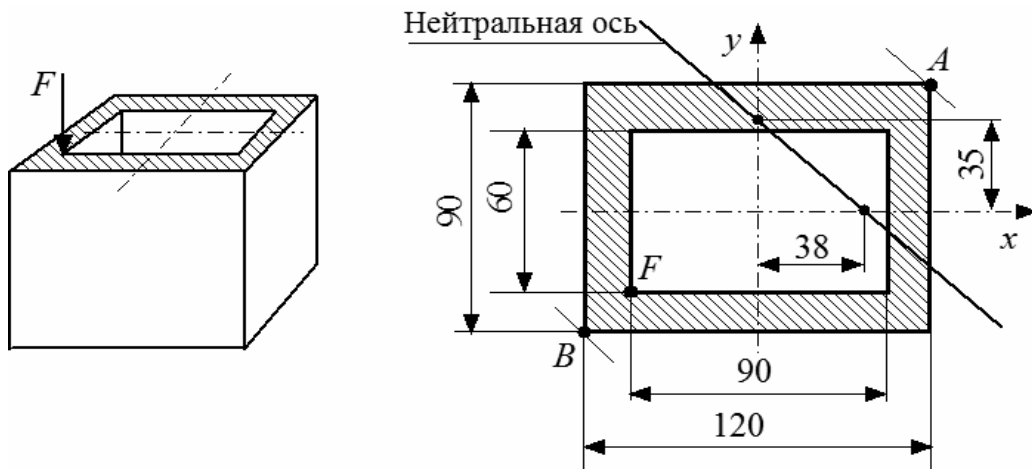


Рисунок 4.3

*Решение*

Площадь поперечного сечения  $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$ .

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931,5}{54} = 17,25 \text{ см}^2.$$



Координаты точки приложения силы следующие:  $x_F = -4,5$  см;  $y_F = -3$  см.

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (см. рисунок 4.3):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17,25}{-4,5} = 3,8 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,5}{-3} = 3,5 \text{ см}.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части.

В *растянутой области* составим условие прочности для опасной точки  $A$  с координатами  $x_A = 6$  см;  $y_A = 4,5$  см:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{(-4,5) \cdot 6}{17,25} + \frac{(-3) \cdot 4,5}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot (-1,85)}{A} \leq [\sigma]_{раст} = 60 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]_{раст}}{1,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,85} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

В *сжатой области* составим условие прочности для опасной точки  $B$  с координатами  $x_B = -6$  см;  $y_B = -4,5$  см:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{(-4,5) \cdot (-6)}{17,25} + \frac{(-3) \cdot (-4,5)}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot 3,85}{A} \leq [\sigma]_{сж} = -150 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]_{сж}}{3,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{3,85} = 210 \cdot 10^3 \text{ Н} = 210 \text{ кН}.$$

Допустимой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил:  $[F] = 175 \text{ кН}.$

## 5 Построение ядра сечения при внецентренном приложении продольной силы

**Пример** – Для чугунного стержня, показанного на рисунке 4.3, построить ядро сечения.

*Решение*

Для построения ядра сечения нужно провести касательные линии к контуру сечения (рисунок 5.1) и определить координаты угловых точек ядра по сле-

дующим формулам:

$$x_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_x^2}{Y_0}.$$

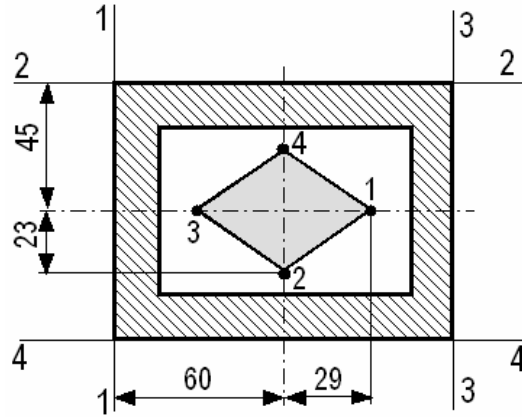


Рисунок 5.1

Касательная 1–1:  $X_0 = -6$  см;  $Y_0 = \infty$ .

Точка 1:  $x_1 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{-6} = 2,9$  см;  $y_1 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0$ .

Касательная 2–2:  $X_0 = \infty$ ;  $Y_0 = 4,5$  см.

Точка 2:  $x_2 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0$ ;  $y_2 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{4,5} = -2,3$  см.

Касательная 3–3:  $X_0 = 6$  см;  $Y_0 = \infty$ .

Точка 3:  $x_3 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{6} = -2,9$  см;  $y_3 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0$ .

Касательная 4–4:  $X_0 = \infty$ ;  $Y_0 = -4,5$  см.

Точка 4:  $x_4 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0$ ;  $y_4 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{-4,5} = 2,3$  см.

Найденные точки соединяются прямыми линиями (см. рисунок 5.1).

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии:

а) продольная сила и поперечная сила;

- б) только продольная сила;
- в) только изгибающие моменты;
- г) изгибающие моменты и продольная сила.

2 По какой формуле определяются напряжения при внецентренном растяжении-сжатии:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; & \text{в) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x}{i_x^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_y^2} \right); \\ \text{б) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y}; & \text{г) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right). \end{array}$$

3 При внецентренном растяжении-сжатии нулевая линия:

- а) проходит через центр тяжести поперечного сечения;
- б) проходит через точку приложения силы;
- в) находится за центром тяжести поперечного сечения напротив силы;
- г) находится между центром тяжести и точкой приложения силы.

4 При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения максимальны:

- а) в точке, наиболее удаленной от приложенной силы;
- б) в точке, наиболее удаленной от нулевой линии;
- в) в точке приложения силы;
- г) в центре поперечного сечения.

5 Какой закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении-сжатии:

- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный.

6 Если сила приложена на границе ядра сечения, то нулевая линия ...:

- а) проходит за пределами поперечного сечения;
- б) проходит через точку приложения силы;
- в) касается поперечного сечения;
- г) пересекает поперечное сечение.

## 6 Расчеты сжатых стержней на устойчивость

**Пример 1 (проверочный расчет)** – Проверить устойчивость стального стержня (рисунок 6.1), определить его критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

*Исходные данные:*  $[\sigma] = 160$  МПа (Ст 3); коэффициент приведения длины  $\mu = 0,7$ ; коэффициенты  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

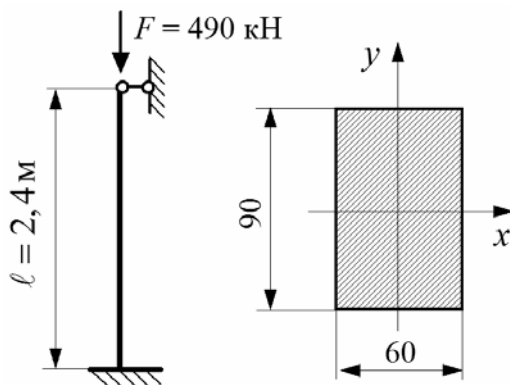


Рисунок 6.1

*Решение*

Площадь сечения  $A = 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$ .

Минимальный осевой момент инерции  $I_y = I_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 162 \text{ см}^4$ .

Минимальный радиус инерции  $i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{162}{54}} = 1,73 \text{ см}$ .

Максимальная гибкость стержня  $\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 97,1$ .

Определяем коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3]: при  $\lambda = 90$   $\varphi = 0,69$ ; при  $\lambda = 100$   $\varphi = 0,6$ .

$$\varphi = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{100 - 90} \cdot (97,1 - 90) = 0,626.$$

Проверяем устойчивость стержня по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma];$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{490 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^{-4}} = 90,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,74 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = \\ &= 0,626 \cdot 160 = 100,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Критическую силу определяем по формуле Ясинского, т. к. гибкость стержня меньше предельной гибкости для стали ( $97,1 < 100$ ):

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 97,1) \cdot 54 \cdot 10^{-4} = 1076 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1076}{490} = 2,2.$$

**Пример 2 (проектировочный расчет)** – Подобрать размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 6.2).

Исходные данные:  $[\sigma] = 200$  МПа (сталь 14Г2); коэффициент приведения длины стержня, закрепленного жестко с одной стороны,  $\mu = 2$ .

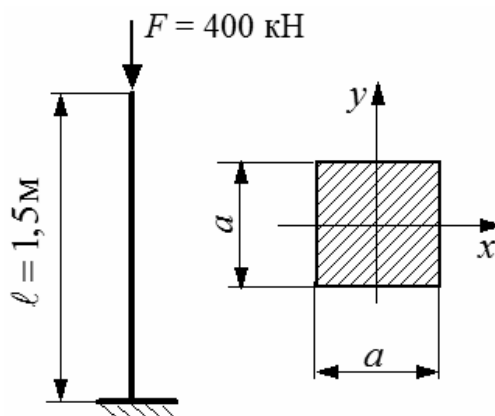


Рисунок 6.2

### Решение

Расчет ведется методом последовательного приближения.

*Первое приближение.*

Задаёмся начальным коэффициентом продольного изгиба  $\varphi_1 = 0,5$ .

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{40 \cdot 10^{-4}} = 0,063 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_y = i_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{3,46} = \frac{0,063}{3,46} = 0,0182 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0182} = 164,8.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при  $\lambda = 160$   $\varphi = 0,21$ ; при  $\lambda = 170$   $\varphi = 0,19$ .

$$\varphi'_1 = 0,21 - \frac{0,21 - 0,19}{170 - 160} \cdot (164,8 - 160) = 0,2.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба первого приближения:  $\varphi'_1 \neq \varphi_1$ .

*Второе приближение.*

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,2}{2} = 0,35.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 200 \cdot 10^6} = 57,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{57,14 \cdot 10^{-4}} = 0,076 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_{\min} = \frac{a_2}{3,46} = \frac{0,076}{3,46} = 0,022 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,022} = 136,4.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3]: при  $\lambda = 130$   $\varphi = 0,29$ ; при  $\lambda = 140$   $\varphi = 0,25$ .

$$\varphi'_2 = 0,29 - \frac{0,29 - 0,25}{140 - 130} \cdot (136,4 - 130) = 0,264.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба второго приближения:  $\varphi'_2 \neq \varphi_2$ .

*Третье приближение.*

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,35 + 0,264}{2} = 0,307.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,307 \cdot 200 \cdot 10^6} = 65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{65,4 \cdot 10^{-4}} = 0,081 \text{ м.}$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_{\min} = \frac{a_3}{3,46} = \frac{0,081}{3,46} = 0,0234 \text{ м.}$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_3 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0234} = 128,2.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3]: при  $\lambda = 120$   $\varphi = 0,33$ ; при  $\lambda = 130$   $\varphi = 0,29$ .

$$\varphi'_3 = 0,33 - \frac{0,33 - 0,29}{130 - 120} \cdot (128,2 - 120) = 0,3.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба третьего приближения:  $\varphi'_3 \approx \varphi_3$ .

Принимаем квадратное поперечное сечение стержня со стороной 81 мм.

**Пример 3 (определение несущей способности)** – Определить допустимое значение сжимающей силы  $[F]$  стального стержня двутаврового поперечного сечения (рисунок 6.3), его критическую силу  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

**Исходные данные:** коэффициент приведения длины  $\mu = 0,5$ ; допустимое напряжение на сжатие  $[\sigma] = 160$  МПа (Ст 3); модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

*Решение*

Площадь и минимальный радиус инерции двутавра № 10 следующие:  $A = 12 \text{ см}^2$ ;  $i_y = i_{\min} = 1,22 \text{ см}$ .

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 163,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  методом линейной интер-

поляции, используя данные [2, таблица А.3]: при  $\lambda = 160$   $\varphi = 0,29$ ; при  $\lambda = 170$   $\varphi = 0,26$ .

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{170 - 160} \cdot (163,9 - 160) = 0,278.$$

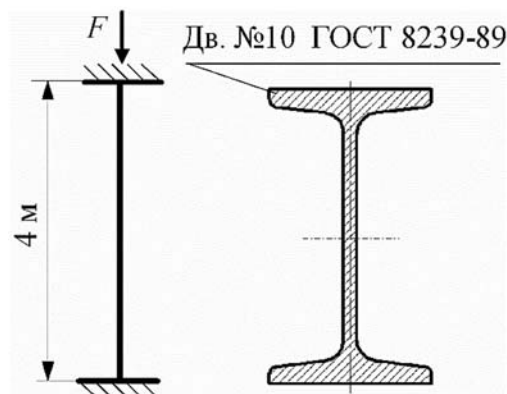


Рисунок 6.3

Из условия устойчивости найдем допустимое значение сжимающей силы:

$$[F] = A\varphi[\sigma] = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0,278 \cdot 160 \cdot 10^6 = 53,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 53,4 \text{ кН}.$$

Критическую силу определяем по формуле Эйлера, т. к. гибкость стержня больше предельной гибкости для стали ( $163,9 > 100$ ):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{163,9^2} \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 88,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 88,1 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{88,1}{53,4} = 1,65.$$

## 7 Расчет составного сечения продольно сжатого стержня

**Пример** – Определить максимальную гибкость составного сечения колонны, состоящего из двух швеллеров № 18, показанного на рисунке 7.1, а. Условия закрепления колонны показаны на рисунке 7.1, б.

*Исходные данные:* коэффициент приведения длины  $\mu = 0,5$ .

*Решение*

Геометрические характеристики швеллера № 18 следующие:  
 $A = 20,7 \text{ см}^2$ ;  $I_{x_1} = 1090 \text{ см}^4$ ;  $I_{y_1} = 86 \text{ см}^4$ ;  $z_o = 1,94 \text{ см}$ .

Осевые моменты инерции составного сечения



$$I_x = 2 \cdot I_{x_1} = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \cdot (I_{y_1} + b^2 \cdot A) = 2 \cdot (86 + (1,94 + 4)^2 \cdot 20,7) = 1632,7 \text{ см}^4.$$

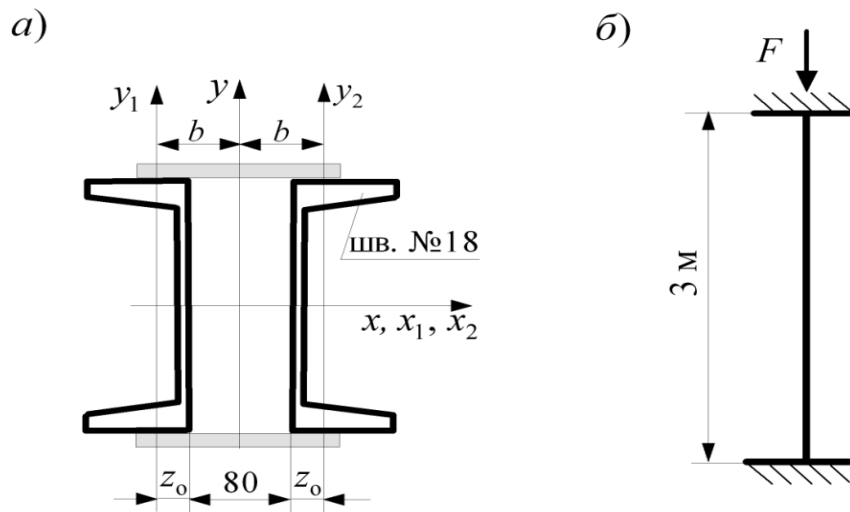


Рисунок 7.1

Определяем радиусы инерции поперечного сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{2 \cdot A}} = \sqrt{\frac{2180}{2 \cdot 20,7}} = 7,26 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{2 \cdot A}} = \sqrt{\frac{1632,7}{2 \cdot 20,7}} = 6,28 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость относительно материальной оси \$x\$:

$$\lambda_{mat} = \lambda_x = \frac{\mu \cdot \ell}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 6}{7,26 \cdot 10^{-2}} = 41,3.$$

Находим гибкость относительно свободной оси \$y\$:

$$\lambda_{cs} = \lambda_y = \sqrt{40^2 + \left( \frac{\mu \cdot \ell}{i_y} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left( \frac{0,5 \cdot 6}{6,28 \cdot 10^{-2}} \right)^2} = 62,3.$$

Максимальная гибкость \$\lambda\_{max} = 62,3\$.

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие устойчивости:

а)  $\sigma = A/F \leq \varphi[\sigma];$

в)  $\sigma = F/A \leq [\sigma];$

б)  $\sigma = \varphi F/A \leq [\sigma];$

г)  $\sigma = F/A \leq \varphi[\sigma].$

2 Формула Ясинского для стального стержня справедлива при:

- а)  $0 < \lambda \leq 40$ ;                      в)  $40 < \lambda \leq 100$ ;  
б)  $100 < \lambda \leq 140$ ;                    г)  $\lambda \geq 100$ .

3 Формула Эйлера для стального стержня справедлива при:

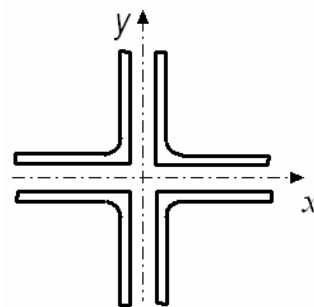
- а)  $0 < \lambda \leq 40$ ;                      в)  $40 < \lambda \leq 100$ ;  
б)  $80 < \lambda \leq 140$ ;                    г)  $\lambda \geq 100$ .

4 Коэффициент приведения длины  $\mu$  зависит от:

- а) гибкости стержня;                      в) величины критической силы;  
б) условий закрепления стержня;    г) формы поперечного сечения.

5 Укажите свободные оси для поперечного сечения:

- а) только  $x$ ;  
б) только  $y$ ;  
в) нет свободных осей;  
г)  $x$  и  $y$ .



6 Свободная ось составного сечения:

- а) не проходит через центр тяжести поперечного сечения;  
б) является главной центральной осью инерции;  
в) проходит через зазор между отдельными частями составного сечения;  
г) пересекает поперечное сечение по материалу составных частей.

## 8 Определение перемещений с использованием интегралов Мора

**Пример** – Для балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 8.1, а), определить интегралом Мора:

- 1) прогиб в точке  $K$  (вертикальное перемещение точки  $EI y_K$ );
- 2) прогиб в точке  $C$  (вертикальное перемещение точки  $EI y_C$ );
- 3) угол поворота точки  $C$  ( $EI \theta_C$ ).

*Решение*

Определяем вертикальные реакции в шарнирах  $A$  и  $B$  для заданной системы (см. рисунок 8.1, а).

Для определения перемещений воспользуемся формулой Мора, применяемой для стержней, испытывающих преимущественный изгиб:

$$\Delta_i = \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot \bar{M}_1(z) \cdot dz}{EI},$$

где  $M_p(z)$  – функция изгибающего момента от заданной внешней нагрузки;  
 $\bar{M}_1(z)$  – функция изгибающего момента от единичной нагрузки;  
 $EI$  – жесткость балки при изгибе.

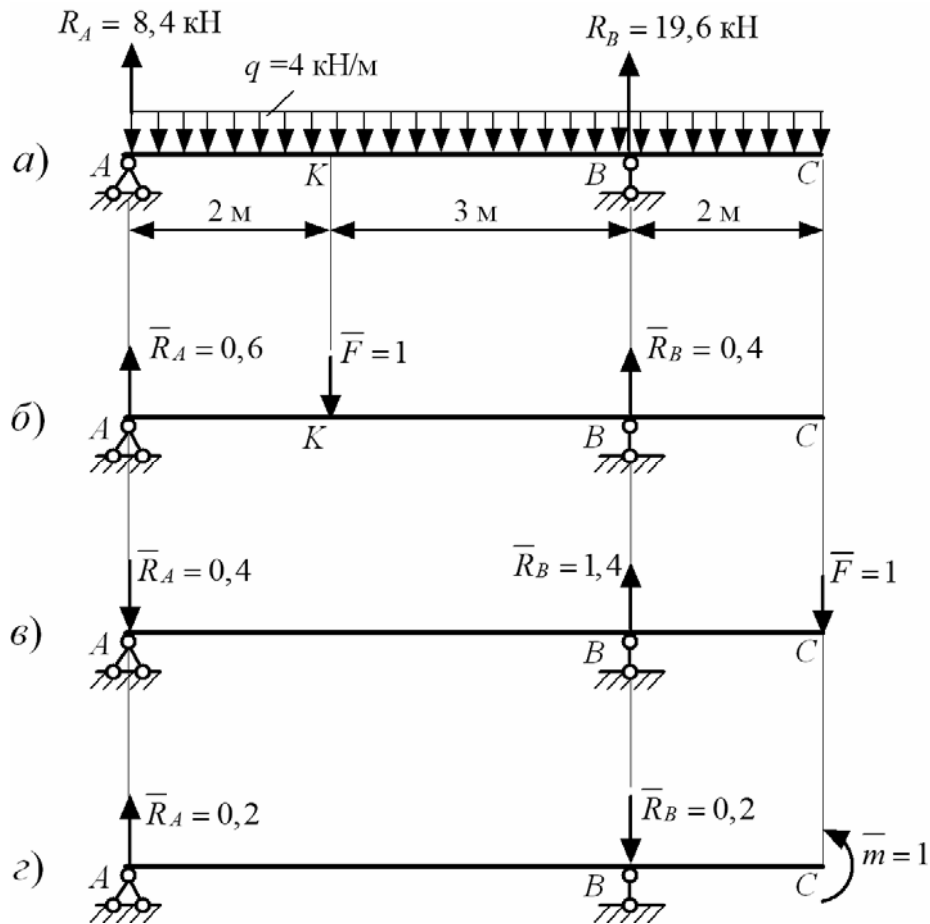


Рисунок 8.1

Для расчета прогиба в точке  $K$  составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке  $K$  единичную силу и определим реакции на опорах (рисунок 8.1, б). Заданная и вспомогательная системы делятся на три участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1) участок  $(AK)$ :  $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$ :

$$M_p(z) = 8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2; \quad \bar{M}_1(z) = 0,6 \cdot z_1;$$

2) участок  $(KB)$ :  $0 \leq z_2 \leq 3 \text{ м}$ :

$$M_p(z) = 8,4 \cdot (2 + z_2) - 0,5 \cdot 4 \cdot (2 + z_2)^2 = 8,8 + 0,4z_2 - 2z_2^2;$$

$$\bar{M}_1(z) = 0,6 \cdot (2 + z_2) - 1 \cdot z_2 = 1,2 - 0,4z_2;$$

3) участок (CB):  $0 \leq z_3 \leq 2$  м:

$$M_p(z) = -0,5 \cdot 4 \cdot z_3^2; \quad \overline{M}_1(z) = 0.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} EIy_K &= \int_0^2 (8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2) \cdot 0,6 \cdot z_1 dz_1 + \int_0^3 (8,8 + 0,4z_2 - 2z_2^2)(1,2 - 0,4 \cdot z_2) dz_2 = \\ &= 8,64 + 11,16 = 19,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Для расчета прогиба в точке C составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке C единичную силу и определим реакции на опорах (рисунок 8.1, в). Заданная и вспомогательная системы делятся на два участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1) участок (AB):  $0 \leq z_1 \leq 5$  м:

$$M_p(z) = 8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2; \quad \overline{M}_1(z) = -0,4 \cdot z_1;$$

2) участок (CB):  $0 \leq z_2 \leq 2$  м:

$$M_p(z) = -0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2; \quad \overline{M}_1(z) = -1 \cdot z_2.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} EIy_C &= \int_0^5 (8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2) \cdot (-0,4 \cdot z_1) dz_1 + \int_0^2 (-0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2) \cdot (-1 \cdot z_2) dz_2 = \\ &= -15 + 8 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Для расчета угла поворота в точке C составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке C единичный изгибающий момент и определим реакции на опорах (рисунок 8.1, з). Заданная и вспомогательная системы делятся на два участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1) участок (AB):  $0 \leq z_1 \leq 5$  м:

$$M_p(z) = 8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2; \quad \overline{M}_1(z) = 0,2 \cdot z_1;$$

2) участок (CB):  $0 \leq z_2 \leq 2$  м:

$$M_p(z) = -0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2; \quad \overline{M}_1(z) = 1.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} EI\theta_C &= \int_0^5 (8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2) \cdot 0,2 \cdot z_1 dz_1 + \int_0^2 (-0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2) \cdot 1 dz_2 = \\ &= 7,5 - 5,33 = 2,17 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

## Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Формула Мора для изгиба:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{\overline{M}_1(z) \cdot \overline{M}_1(z) \cdot dz}{EI}; & \text{в) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot \overline{M}_1(z) \cdot dz}{EI}; \\ \text{б) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot M_p(z) \cdot dz}{EI}; & \text{г) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot \overline{M}_1(z) \cdot dz}{EA}. \end{aligned}$$

2 Формула Мора справедлива:

- а) для стержней любой жесткости;
- б) только для прямолинейных стержней;
- в) только для изгиба в балках;
- г) только для стержней постоянного поперечного сечения.

3 Формула Мора не применяется:

- а) для стержней малой кривизны;
- б) для стержней большой кривизны;
- в) для стержней, испытывающих кручение;
- г) для стержней переменного поперечного сечения.

## 9 Определение перемещений способом Верещагина

**Пример** – Для балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 9.1, а), определить способом Верещагина:

- 1) прогиб в точке К (вертикальное перемещение точки  $EI y_K$ );
- 2) прогиб в точке С (вертикальное перемещение точки  $EI y_C$ );
- 3) угол поворота точки С ( $EI \theta_C$ ).

*Решение*

Перемещение (линейное и угловое) по способу Верещагина определяется по формуле

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_p \cdot \overline{y}_C}{EI_x},$$

где  $n$  – число участков на балке;

$\omega_p$  – площадь грузовой эпюры  $M_p$  на участке;

$\overline{y}_C$  – ордината единичной эпюры  $\overline{M}_1$  под центром тяжести грузовой на этом же участке;

$EI_x$  – жесткость поперечного сечения на участке.

Напоминаем правило знаков при перемножении: знак произведения поло-

жительный, если обе координаты эпюр моментов располоены по одну сторону от оси стержня.

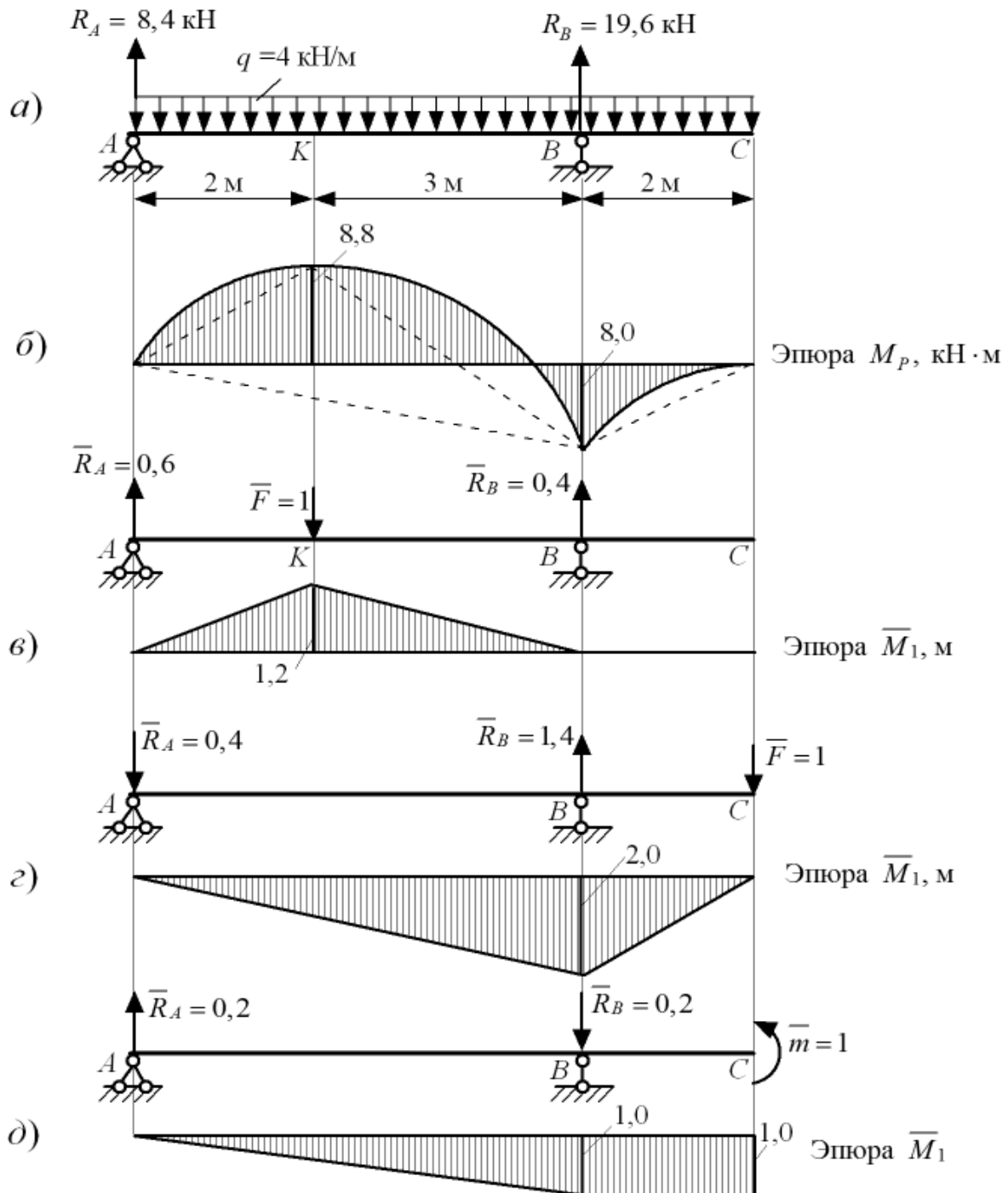


Рисунок 9.1

Воспользуемся вспомогательными системами, построенными для такой же задачи, решенной интегралами Мора (см. рисунок 8.1, б–г).

Для заданной и вспомогательных систем построим эпюры изгибающих моментов (рисунок 9.1, б–д).

Для определения  $EI y_K$  перемножим эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_1$  по трем участкам (AK, KB и BC), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (треугольники

и сегменты) (см. рисунок 9.1, б, в).

$$EIy_K = \frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{8,8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{8,8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 -$$

$$- \frac{8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,2 = 19,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Для определения  $EIy_C$  перемножим эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_1$  по двум участкам ( $AB$  и  $BC$ ), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (треугольники и сегменты) (см. рисунок 9.1, б, г).

$$EIy_C = \frac{5 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Знак «минус» указывает, что перемещение точки  $C$  не совпало с направлением единичной силы. Балка прогнулась вверх, а не вниз, как предполагалось.

Для определения  $EI\theta_C$  перемножим эпюры  $M_P$  и  $\overline{M}_1$  по двум участкам ( $AB$  и  $BC$ ), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (треугольники и сегменты) (см. рисунок 9.1, б, д).

$$EI\theta_C = -\frac{5 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{2 \cdot 8}{2} \cdot 1 + \frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot 1 = 2,17 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

1 Площадь сегмента равна:

- а)  $\omega = q\ell^3/12$ ;      в)  $\omega = q\ell^3/6$ ;  
 б)  $\omega = q\ell^2/12$ ;      г)  $\omega = q\ell^3/2$ .

2 Правило Верещагина справедливо:

- а) для стержней большой кривизны;  
 б) только для прямолинейных стержней;  
 в) для стержней малой кривизны;  
 г) только для стержней постоянного поперечного сечения.

3 Для определения угла поворота во вспомогательной системе следует приложить:

- а) единичный крутящий момент;  
 б) единичную поперечную силу;  
 в) единичную продольную силу;  
 г) единичный изгибающий момент.

## 10 Расчет простейших статически неопределимых стержневых систем методом сил

**Пример** – Решить статически неопределимую балку (рисунок 10.1) методом сил. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

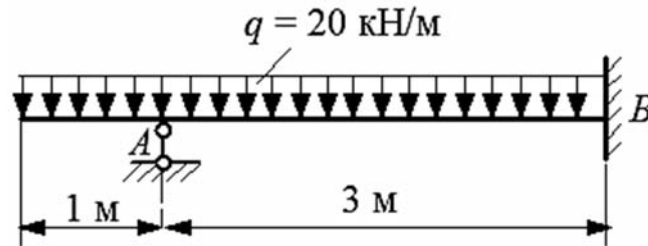


Рисунок 10.1

### Решение

Заданная балка один раз статически неопределима, т. е. она имеет одну лишнюю связь. Выбираем основную систему, отбрасывая одну связь, например опору  $A$  (рисунок 10.2,  $a$ ).



Рисунок 10.2



Составляем эквивалентную систему (рисунок 10.2, б).

Каноническое уравнение метода сил один раз статически неопределимой системы имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для определения коэффициентов канонического уравнения строим эпюры изгибающих моментов в грузовой (рисунок 10.2, в) и единичной (рисунок 10.2, з) системах.

Определяем коэффициент при неизвестной силе  $X_1$  перемножением эпюры  $M_1$  на  $M_1$ :

$$\delta_{11} = \sum \frac{M_1 y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 3 \right) = \frac{9}{EI} \text{ м}^3.$$

Определяем свободный коэффициент  $\Delta_{1p}$  перемножением эпюры  $M_1$  на эпюру  $M_p$ :

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{M_p y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} 3 - \frac{1}{2} 160 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 3 + \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 3 \right) = -\frac{427,5}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{9}{EI} \cdot X_1 - \frac{427,5}{EI} = 0; \quad X_1 = R_A = 47,5 \text{ кН}.$$

После определения реакции  $R_A$  можно построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов обычным образом (рисунок 10.3).

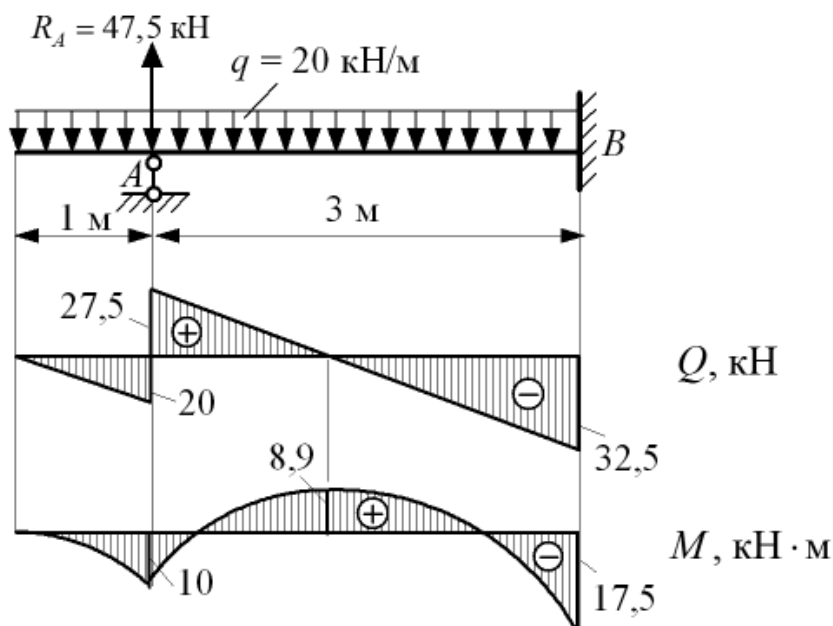
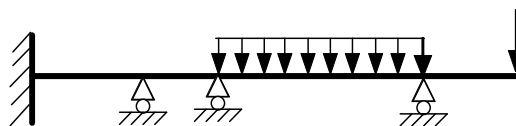


Рисунок 10.3

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Сколько раз статически неопределима балка:

- а) один;                      в) три;  
б) два;                      г) четыре.



2 Основная система получается из заданной системы:

- а) удалением внешней нагрузки;  
б) удалением лишних связей;  
в) удалением внешней нагрузки и лишних связей;  
г) удалением шарнирных закреплений.

3 Сколько канонических уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой системы:

- а) один;                      б) два;                      в) три;                      г) четыре.

## 11 Расчеты при продольном ударе

**Пример** – Груз весом  $G = 10$  кН падает с высоты  $h = 10$  см на двутавровую стойку № 20 ( $A = 26,8$  см<sup>2</sup>) длиной  $l = 4$  м (рисунок 11.1, а). Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Определить нормальное напряжение и укорочение стойки при ударе, если стойка не теряет устойчивость.

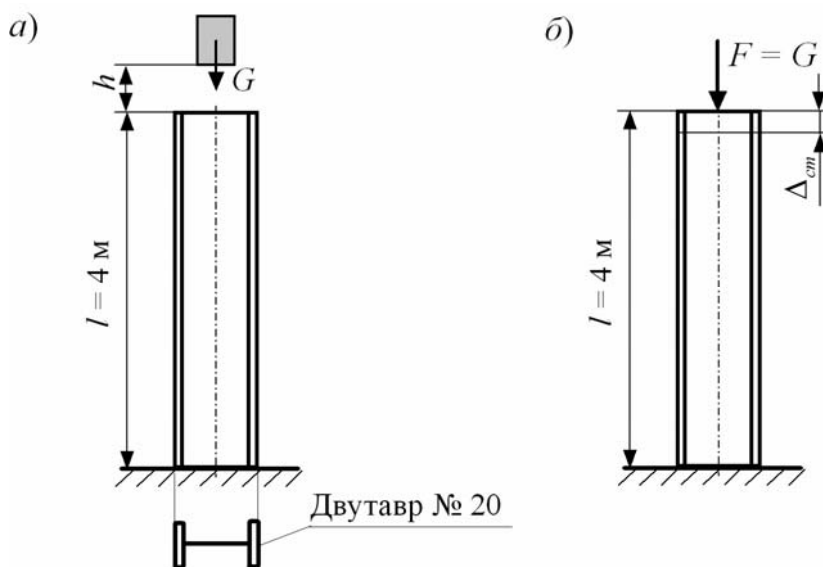


Рисунок 11.1

### Решение

Определим нормальное напряжение и укорочение стойки, соответствующие статическому способу приложения силы (рисунок 11.1, б):

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 3,73 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\Delta_{cm} = \frac{Fl}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 26,8 \cdot 10^{-4}} = 0,746 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,746 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Динамический коэффициент

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,746 \cdot 10^{-2}}} = 1 + 51,8 = 52,8.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{cm} = 52,8 \cdot 3,73 = 193 \text{ МПа.}$$

Укорочение стойки при ударе

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{cm} = 52,8 \cdot 0,746 \cdot 10^{-2} = 0,394 \text{ см.}$$

## 12 Расчеты при поперечном ударе

**Пример** – На двутавровую балку № 20 длиной  $l = 9$  м, свободно лежащую на двух шарнирных опорах, с высоты  $h = 45$  мм падает груз  $G = 1,2$  кН (рисунок 12.1). Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, осевой момент инерции двутавра  $I_x = 1840$  см<sup>4</sup>, осевой момент сопротивления  $W_x = 184$  см<sup>3</sup>.

Определить наибольшее нормальное напряжение и прогиб в месте падения груза.

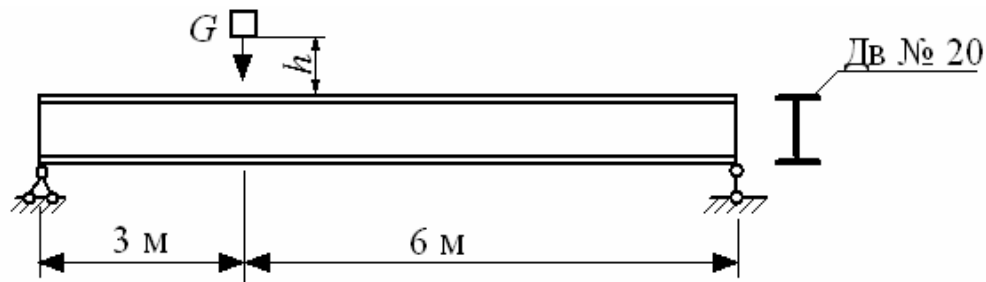


Рисунок 12.1

*Решение*

Рассчитываем балку на действие статической нагрузки:  $F = G = 1,2$  кН (рисунок 12.2, а).

Реакции на опорах

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot 3 - R_B \cdot 9 = 0; \quad R_B = \frac{F \cdot 3}{9} = \frac{1,2 \cdot 3}{9} = 0,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 6 - R_A \cdot 9 = 0; \quad R_A = \frac{F \cdot 6}{9} = \frac{1,2 \cdot 6}{9} = 0,8 \text{ кН}.$$

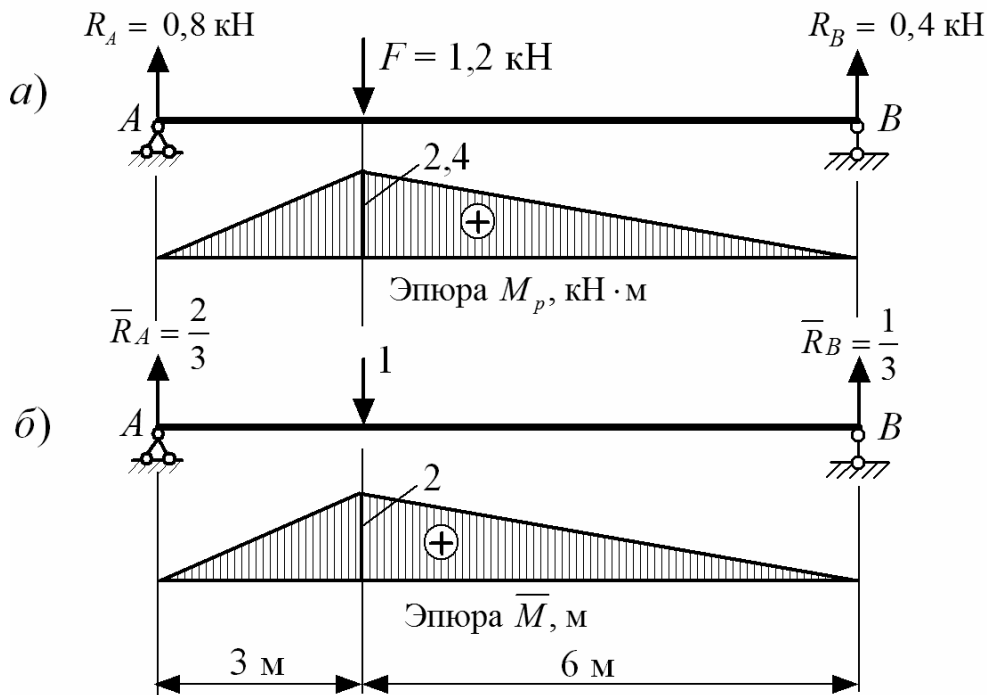


Рисунок 12.2

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_p$ , по которой определяем максимальный момент:  $M_{\max} = 2,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Определим максимальное нормальное напряжение, соответствующие статическому способу приложения силы:

$$\sigma_{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 13 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13 \text{ МПа}.$$

Для определения прогиба  $\Delta_{cm}$  составим вспомогательную систему, в которой к балке прикладывается единичная сила (рисунок 12.2, б).

Реакции на опорах

$$\sum M_A = 0; \quad 1 \cdot 3 - \bar{R}_B \cdot 9 = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{1 \cdot 3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$\sum M_B = 0; \quad 1 \cdot 6 - \bar{R}_A \cdot 9 = 0; \quad \bar{R}_A = \frac{1 \cdot 6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}$ .

Определяем прогиб балки при статическом действии нагрузки, перемножая эпюры  $\bar{M}$  и  $M_p$  по правилу Верещагина:

$$\Delta_{cm} = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{14,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,9 \text{ мм.}$$

Определяем динамический коэффициент:

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 45}{3,9}} = 5,9.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке при ударе

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{cm} = 5,9 \cdot 13 = 76,7 \text{ МПа.}$$

Прогиб в месте падения груза

$$\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{cm} = 5,9 \cdot 3,9 = 23,01 \text{ мм.}$$

### ***Тестовые вопросы для самопроверки***

1 Динамический коэффициент при ударе вычисляется по формуле:

а)  $k = 1 + \frac{a}{q}$ ;

в)  $k = 1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_{\max}}$ ;

б)  $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}}$ ;

г)  $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma_m}{\sigma_{\max}}}$ .

2 Теория удара предполагает, что удар:

- а) абсолютно упругий;
- б) абсолютно неупругий;
- в) упругопластический;
- г) вязкий.

3 Динамические напряжения равны:

а)  $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} (1 + k)$ ;

в)  $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} / k$ ;

б)  $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} (1 + \sqrt{k})$ ;

г)  $\sigma_{дин} = \sigma_{cm} \cdot k$ .

### 13 Колебания систем с одной степенью свободы

**Пример** – На двутавровой балке № 20 установлен электродвигатель весом  $G = 6$  кН, скорость вращения которого  $n = 300$  об/мин (рисунок 13.1, а). Из-за дисбаланса вращающихся частей возникает вертикальная центробежная сила  $F(t) = 2\sin\theta t$ , амплитудное значение которой равно 2 кН. Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, осевой момент инерции двутавра  $I_x = 1840$  см<sup>4</sup>, осевой момент сопротивления  $W_x = 184$  см<sup>3</sup>. Определить наибольшие нормальные напряжения и прогиб.

*Решение*

Определим наибольшее статическое напряжение от силы  $G$  в среднем сечении балки с максимальным изгибающим моментом 9 кН·м (рисунок 13.1, б):

$$\sigma_{cm}(G) = \frac{M_{cm \max}(G)}{W_x} = \frac{9 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 48,91 \text{ МПа.}$$

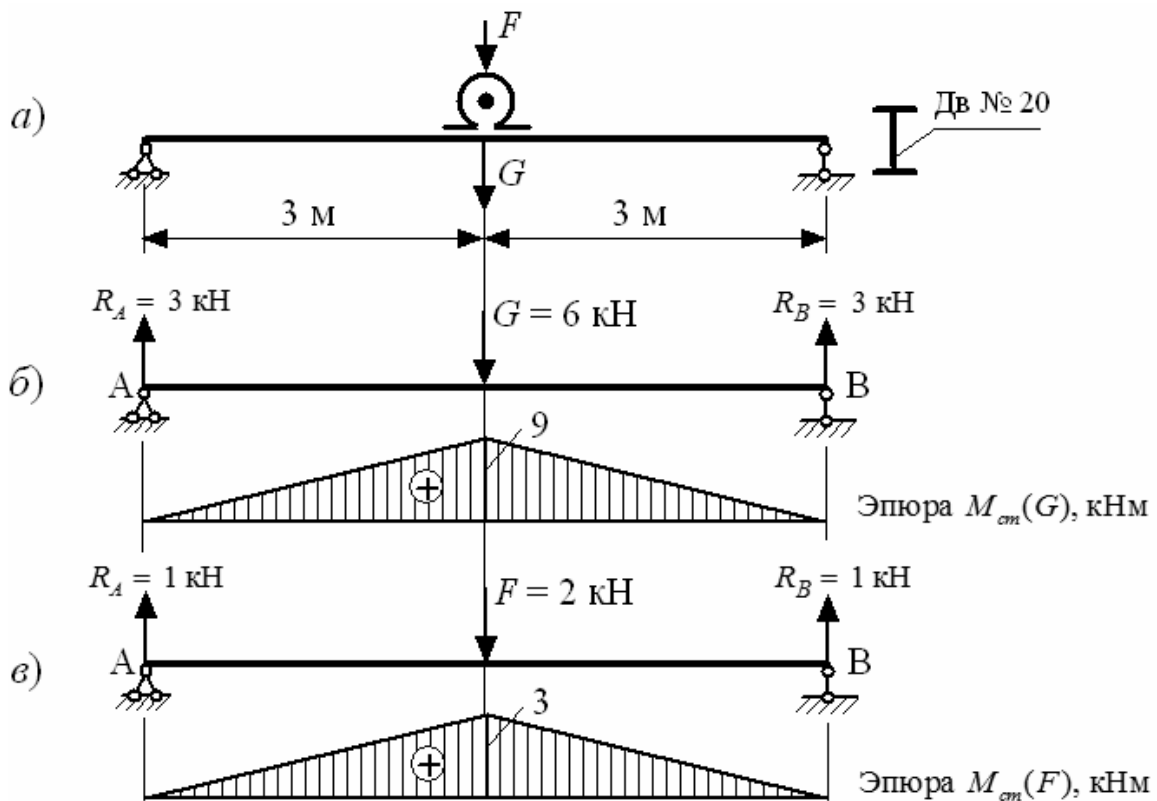


Рисунок 13.1

Прогиб середины пролета для балки, лежащей на двух опорах, вычислим и по известной формуле

$$\Delta_{cm}(G) = \frac{G \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,00734 \text{ м.}$$

Определим круговую частоту собственных (свободных) колебаний системы по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,00734}} = 36,56 \text{ с}^{-1},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;

$\Delta_{cm}$  – перемещение точки расположения колеблющейся массы (в данном случае двигателя) от собственного веса  $\Delta_{cm}(G)$ .

Определим динамический коэффициент при действии вибрационной нагрузки по формуле

$$k = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{31,4}{36,56}\right)^2} = 3,81,$$

где  $\theta$  – круговая частота действия вибрационной нагрузки,

$$\theta = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Определим нормальное напряжение от наибольшей величины вибрационной нагрузки  $F = 2 \text{ кН}$ , приложенной статическим образом, в среднем сечении балки с максимальным изгибающим моментом  $3 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (рисунок 13.1, в):

$$\sigma_{cm}(F) = \frac{M_{cm}(F)}{W_x} = \frac{3 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 16,30 \text{ МПа}.$$

Прогиб середины пролета двухопорной балки от силы  $F$

$$\Delta_{cm}(F) = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,00245 \text{ м}.$$

Тогда динамические значения напряжения и прогиба

$$\sigma_{дин}(F) = k \cdot \sigma_{cm}(F) = 3,81 \cdot 16,30 = 62,103 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{дин}(F) = k \cdot \Delta_{cm}(F) = 3,81 \cdot 0,00245 = 0,00934 \text{ м}.$$

$\Delta_{дин}(F)$  представляет собой амплитуду колебаний массы (двигателя), т. е. наибольшее отклонение от положения статического равновесия. Поэтому суммарный прогиб в середине пролета балки

$$\Delta_{max} = \Delta_{cm}(G) + \Delta_{дин}(F) = 0,00734 + 0,00934 = 0,01668 \text{ м}.$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}}(G) + \sigma_{\text{дин}}(F) = 48,91 + 62,103 = 111,013 \text{ МПа.}$$

### **Тестовые вопросы для самопроверки**

1 Число циклов колебаний системы, происходящих в 1 с, называется:

- а) периодом колебаний;
- б) частотой колебаний;
- в) круговой частотой колебаний;
- г) угловой скоростью.

2 Колебания системы, вызванные начальным возмущением и совершаемые за счет энергии деформации при отсутствии постоянного внешнего воздействия, называются:

- а) периодическими колебаниями;
- б) свободными колебаниями;
- в) вынужденными колебаниями;
- г) автоколебаниями.

3 На какую числовую характеристику гармонических свободных колебаний системы с одной степенью свободы влияет учет сил сопротивления:

- а) амплитуда колебаний;
- б) частота колебаний;
- в) период колебаний;
- г) начальная фаза колебаний.

## **14 Расчет толстостенных труб**

**Пример 1** – Определить, пользуясь третьей теорией прочности (наибольших касательных напряжений), необходимую толщину стенки трубы, наружный радиус которой равен 100 мм (рисунок 14.1).

Труба подвержена внутреннему давлению  $p_B = 80$  МПа, допустимое напряжение материала  $[\sigma] = 200$  МПа.

### **Решение**

Материал толстостенной трубы испытывает плоскую деформацию. Наиболее напряженными являются точки на внутренней поверхности, в которых радиальное и окружное главные напряжения одновременно достигают наибольшей величины. В этих точках окружное напряжение  $\sigma_t$  больше, чем радиальное  $\sigma_r$ , а радиальное – сжимающее и равно внутреннему давлению  $p_B$ :

$$\sigma_1 = \sigma_t = p_B \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma_r = -p_B.$$



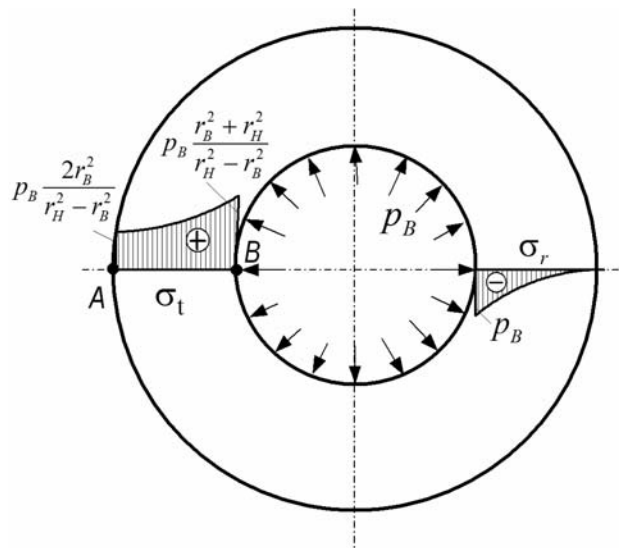


Рисунок 14.1

Эпюры распределения напряжений показаны на рисунке 14.1.

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

После преобразований

$$\sigma_{\text{экв}} = p_B \frac{2}{1 - \frac{r_B^2}{r_H^2}} \leq [\sigma] = 200 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв}} = 80 \cdot 10^6 \frac{2}{1 - \frac{r_B^2}{(100 \cdot 10^{-3})^2}} = [\sigma] = 200 \cdot 10^6.$$

Откуда  $r_B = 44$  мм, а толщина стенки трубы  $\delta = 100 - 44 = 56$  мм.

**Пример 2** – Проверить прочность стальной трубы по третьей теории прочности, если наружный радиус равен 70 мм, а внутренний радиус равен 65 мм. Труба находится под внешним давлением  $p_B = 20$  МПа, допустимое напряжение материала  $[\sigma] = 160$  МПа (рисунок 14.2).

*Решение*

В результате внешнего давления опасными являются точки внутренней поверхности (точки В), которые находятся в условиях одноосного сжатия под действием напряжений (см. рисунок 14.2):

$$\sigma_r = 0 = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_t = -p_H \frac{2r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} = \sigma_3.$$

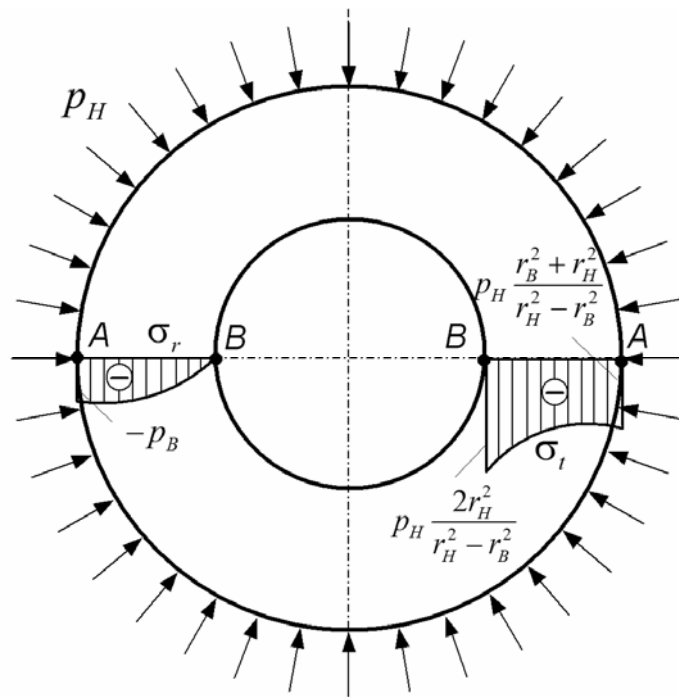


Рисунок 14.2

Эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = p_H \frac{2r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв}} = 20 \cdot 10^6 \frac{2 \cdot 0,07^2}{0,07^2 - 0,06^2} = 150,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 150,7 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

### Тестовые вопросы для самопроверки

1 Толстостенными называются оболочки, у которых отношение толщины стенки  $\delta$  к внутреннему радиусу  $r_B$ :

- а) больше 0,1;
- б) больше 0,2;
- в) больше 0,3;
- г) больше 0,4.

2 Какое напряжение в толстостенном цилиндре постоянно по толщине стенки:

- а) окружное напряжение;
- б) радиальное напряжение;
- в) осевое напряжение;
- г) главное напряжение.

## 15 Расчет тонкостенных объектов

**Пример** – Рассчитать коническую часть тонкостенной оболочки вращения с толщиной стенки  $h = 0,03$  м (рисунок 15.1). Давление внутри оболочки  $P_{вн} = 0,3$  МПа, удельный вес жидкости  $\gamma = 1,5 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>.

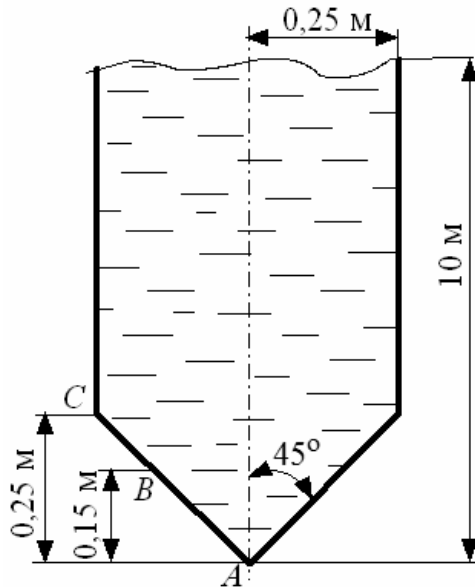


Рисунок 15.1

### Решение

Рассмотрим отсеченную часть с действующими на нее силовыми факторами (см. рисунок 15.1).

Проводим первое сечение через точку  $A$ .

$$\rho_m = 0; \quad \rho_t = 0; \quad \sigma_m = 0; \quad \sigma_t = 0.$$

Второе сечение проводим через точку  $B$  на расстоянии  $y = 0,15$  м.

Высота столба жидкости над этим сечением  $v = H - y = 10 - 0,15 = 9,85$  м.

Давление

$$p = P_{вн} + v \cdot \gamma = 0,3 \cdot 10^6 + 9,85 \cdot 1,5 \cdot 10^4 = 447750 \text{ Па.}$$

В соответствии с уравнением Лапласа  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}$  для сечения  $B$  имеем

$$\rho_m = \frac{R_t}{\cos \alpha} = \frac{0,15}{0,707} = 0,212 \text{ м.}$$

Радиус кривизны  $R_2$  для конуса равен бесконечности, отсюда

$$\frac{\sigma_t}{0,212} = \frac{447750}{0,03}; \quad \sigma_t = \frac{0,212 \cdot 447750}{0,03} = 3,16 \text{ МПа.}$$

Третье сечение проведем через точку  $C$  ( $y = 0,25$  м).

Высота столба жидкости над сечением  $v = 10 - 0,25 = 9,75$  м.

Давление  $p = P_{\text{вн}} + v \cdot \gamma = 0,3 \cdot 10^6 + 9,75 \cdot 1,5 \cdot 10^4 = 446250$  Па.

В соответствии с уравнением равновесия нижней отсеченной части оболочки имеем

$$\sigma_m 2\pi r_t h \cos \alpha - \gamma \frac{1}{3} \pi R_t^2 y - p \pi r_t^2 = 0;$$

$$\sigma_m 2\pi \cdot 0,25 \cdot 0,03 \cdot \cos 45^\circ - 1,5 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 0,25^3 - 446250 \cdot \pi \cdot 0,25^2 = 0;$$

$$\sigma_m = 2,64 \text{ МПа.}$$

В соответствии с уравнением Лапласа  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}$  для сечения  $C$  имеем

$$\rho_{m1} = \frac{R_t}{\cos \alpha} = \frac{0,25}{0,707} = 0,354 \text{ м.}$$

Радиус кривизны  $R_2$  для конуса равен бесконечности, отсюда

$$\frac{\sigma_t}{0,354} = \frac{446250}{0,03}; \quad \sigma_t = 5,27 \text{ МПа.}$$

### ***Тестовые вопросы для самопроверки***

1 В тонкостенных оболочках отношение толщины к наименьшему диаметру кривизны меньше...:

- а)  $\frac{1}{5}$ ;      б)  $\frac{1}{10}$ ;      в)  $\frac{1}{15}$ ;      г)  $\frac{1}{20}$ .

2 Окружное и радиальное напряжения определяются:

- а) по формуле Журавского;  
б) по формуле Эйлера;  
в) по формуле Ляме;  
г) по формуле Ясинского.

## Список литературы

- 1 **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 2 **Кузменко, И. М.** Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.
- 3 **Бажанов, В. Л.** Механика деформируемого твердого тела : учеб. пособие / В. Л. Бажанов. – М. : Юрайт, 2021. – 178 с.
- 4 **Валишвили, Н. В.** Сопротивление материалов и конструкций: учебник / Н. В. Валишвили, С. С. Гаврюшин. – М. : Юрайт, 2022. – 530 с.
- 5 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов : учебник / П. А. Степин. – 13-е изд., стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2022. – 320 с. : ил.
- 6 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп., репринт. изд. – М. : Альянс, 2018. – 624 с.
- 7 **Беляев, Н. М.** Сопротивление материалов : учеб. пособие / Н. М. Беляев. – 15-е изд., перераб. и стер. – М. : Альянс, 2015. – 608 с.
- 8 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Мн. : Выш. шк., 2007. – 797 с.
- 9 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учебник / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 10 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций : учебник / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – М. : Машиностроение, 2002. – 436 с.