УДК 378

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ XV ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Задача 1 [1, с. 130]. Вычислите объём тела, ограниченного поверхностью, заданной уравнением

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=4\left(x^2+y^2-z^2\right).$$

Решение

Из уравнения границы тела T видно, что его точки симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V=8\iiint\limits_{T'}dxdydz,$$

где T' – восьмая часть тела, лежащая в первом октанте.

Заменим в этом интеграле переменные по формулам

$$x=2\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=2\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=2\rho\cos\theta\quad(\rho\geq 0,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi).$$

Якобиан преобразования равен $8\rho^2\sin\theta$. В новых координатах уравнение границы тела принимает вид

$$\rho^2 = \sin^2\theta - \cos^2\theta,$$

откуда заключаем, что $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. После замены переменных и перехода к повторному интегралу получим

$$V = 64\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin^2\theta-\cos^2\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{32\pi}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1-2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} d\cos\theta.$$

Произведем в интеграле замену $\sqrt{2}\cos\theta = \sin t$. Тогда

$$V = \frac{32\pi}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}} d\sin t = \frac{64\pi}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{16\pi}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)^2 dt = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

Ответ: $2\sqrt{2}\pi^2$.

Задача 2 [2, с. 1]. Каждой паре (x, y) целых чисел сопоставили некоторое целое число и обозначили его через $x \circ y$. При этом числа $x \circ y$ и $y \circ x$ могут быть различными. Оказалось, что для любых целых чисел a, b, c и d выполняется равенство $(a \circ b + d) \circ c = (a - b) \circ (c - d) + 1$. Найдите значение $2025 \circ 1991$.

Решение

Подставляя $c + d$ вместо c в равенство из условия задачи, получим

$$(a \circ b + d) \circ (c + d) = (a - b) \circ c + 1. \qquad (1)$$

Заметим, что правая часть равенства (1) не зависит от d. Значит, и левая часть тоже от d не зависит. Тогда при $d = -c$ получаем

$$(a \circ b + d) \circ (c + d) = (a \circ b - c) \circ 0. \qquad (2)$$

Докажем, что выражение $a \circ b$ может принимать произвольное целое значение. Пусть S – множество всех значений, которые может принимать $a \circ b$ при всех возможных целых значениях a и b, и пусть $s \in S$. Выберем a, b и c такими, что $(a - b) \circ c = s$. Тогда из (1) получаем, что $(a \circ b + d) \circ (c + d) = s + 1$, откуда следует, что $s + 1 \in S$. Аналогично можно показать, что $s - 1 \in S$. Таким образом, S – множество всех целых чисел.

Заменяя в равенстве (2) $a \circ b$ на a, получим $(a+d)\circ(c+d)=(a-c)\circ 0$, откуда при $d=0$ получаем

$$a \circ c=(a-c)\circ 0. \tag{3}$$

Пусть $f(x)=x\circ 0$. Тогда, в силу (3), $f(a-b)=(a-b)\circ 0=a\circ b$. Отсюда

$$f(a-b-c+d)=f((a-b)-(c-d))=(a-b)\circ(c-d),$$

$$f(a-b)+d=a\circ b+d,$$

$$f(f(a-b)+d-c)=f((f(a-b)+d)-c)=(a\circ b+d)\circ c.$$

В терминах функции f равенство из условия задачи принимает тогда вид

$$f(f(a-b)+d-c)=f(a-b-c+d)+1.$$

Заменяя здесь $a-b$ на x и $d-c$ на y, для произвольных x и y получаем

$$f(f(x)+y)=f(x+y)+1.$$

В частности, при $y=0$ имеем $f(f(x))=f(x)+1$. Тогда

$$f(x+y)+2=(f(x+y)+1)+1=f(f(x)+y)+1=f(f(f(x)+y)). \tag{4}$$

Откуда следует, что

$$f(f(f(x)+y))=f(f(x)+y)+1=f(x+y+1)+1. \tag{5}$$

После замены $x+y=z$ из равенств (4) и (5) получаем

$$f(z)+2=f(z+1)+1,$$

т. е. $f(z+1)=f(z)+1$. Отсюда следует, что $f(x)=x+C$ для $x\in\mathbb{Z}$, т. е. $a\circ b=a-b+C$ для всех целых a и b. Подставляя в изначальное равенство, найдём $C=1$, которое подходит. Таким образом, $a\circ b=a-b+1$ и, значит, $2025\circ 1991=35$.

Ответ: 35.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочное пособие по высшей математике : в 5 т. Т. 3 : Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай [и др.]. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.

2. Adu.by : нац. образоват. портал. – Мн., 2025. – URL: https://adu.by/images/2025/Respublikanskaa-olimpiada-po-ucebnym-predmetam/2024-2025/Tretij-etap/Matematika/10/Matem-10-Tur-1-Var-1.pdf (дата обращения: 08.01.2026).