УДК 519.1

ПРЕПОДАВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ ВО ВТУЗЕ: ПОИСК ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

А. А. МАСТИХИНА
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Москва, Россия

Теорема Эйлера является критерием существования в графе эйлерова цикла [1, 2]. Данная тема является стандартной в разделе «Теория графов» дискретной математики. Доказательство же не всегда приводится конструктивное, дающее непосредственный способ построения цикла. К тому же стоит заметить, что существует несколько таких алгоритмов построения. Например, в [3] приводится алгоритм построения эйлерова цикла из простых циклов, а разложение графа на простые циклы и существование эйлерова цикла указываются в формулировке теоремы Эйлера как эквивалентные утверждения. Построение эйлерова цикла из простых является распространённым методом, т. к. имеет умеренную вычислительную сложность.

Алгоритм Флёри был предложен в конце XIX в. [4]. Его вычислительная сложность не является оптимальной, но, помимо того, что он представляет исторический интерес, этот алгоритм удобен тем, что строит путь последовательно, а необходимые проверки связности могут быть реализованы различными методами, как правило, рассмотренными в курсе ранее. Также затрагиваются свойства степеней графа и возможное количество мостов в ходе работы алгоритма.

Рассмотрим неориентированный граф $G=(V,E)$. Эйлеров цикл определим как замкнутый путь $v_{i_1},\ e_1,\ v_{i_2},\ e_2,\ \ldots,\ v_{i_m},\ e_m,\ v_{i_1}$, где $e_j=\{v_{i_j},v_{i_{j+1}}\}$; $e_m=\{v_{i_m},v_{i_1}\}$, содержащий все ребра графа $E=\{e_1,\ \ldots,\ e_m\}$. Считаем, что ребра в пути не могут повторяться.

Назовем граф эйлеровым, если в нем существует эйлеров цикл. Степенью вершины считаем количество ребер, исходящих из нее.

Теорема Эйлера. *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть в графе существует замкнутый путь $v_{i_1},\ e_1,\ v_{i_1},\ e_2,\ \ldots,\ v_{i_m},\ e_m,\ v_{i_1}$, $\{e_1,\ \ldots,\ e_m\}=E$. Покажем, что степени всех его вершин четные. Действительно, т. к. каждое ребро пройдено, причем ровно один раз, степень каждой вершины есть сумма количества соседних с ней в этой последовательности ребер. Для каждого вхождения вершины таких ребер два, в том числе для v_{i_1}.

Для доказательства ***достаточности*** приведем алгоритм, строящий эйлеров цикл или цепь. Введем необходимые определения.

Связным назовем граф, все вершины которого достижимы друг из друга, т. е. существует путь между любыми двумя вершинами.

Подграфом графа $G=(V,E)$ назовем граф $G'=(V',E')$, такой что $V'\subseteq V,\ E'\subseteq E$.

Связная компонента графа – максимальный по включению связный подграф.

Ребро в связном графе, при удалении которого граф перестает быть связным, назовем *мостом*.

Алгоритм Флёри.

Назначим произвольную вершину v_0 начальной, путь должен закончиться в той же вершине. Начальная вершина является текущей на первом шаге. В процессе обхода будет построена последовательность вершин и ребер, являющаяся эйлеровым циклом. В начале это одна вершина v_0.

Шаг алгоритма. Из текущей вершины v проходим по любому исходящему из нее ребру $\{v,u\}$, если оно не является мостом. Добавим в последовательность $\{v,u\},u$. Пройденные ребра за собой удаляем. Если при удалении ребра $\{v,u\}$ пройденная вершина v оказалась изолированной (нулевой степени), она также удаляется. Вершина u становится текущей на следующем шаге.

Алгоритм заканчивает работу, когда ребер больше нет.

Обоснование корректности. Сначала обратим внимание на то, что при удалении (прохождении) ребра $\{u, v\}$ вершины u, v меняют свою четность. Алгоритм начинается из вершины с четной степенью. После первого шага появляются две нечетные величины, одна из них будет текущей на следующем шаге. Так как ребра проходятся последовательно, при удалении следующего ребра текущая вершина снова получает четную степень, а новая текущая – нечетную, а если новая текущая имела нечетную степень, все степени снова становятся четными.

Таким образом, в процессе работы алгоритма Флёри в графе имеется не более двух вершин с нечетной степенью, причем одна из них – текущая. Заметим также, что граф остается связным. Покажем, что алгоритм заканчивает работу только в том случае, если все ребра пройдены.

Пусть обход заканчивается в вершине, у которой больше нет исходящих ребер, но не все ребра удалены. Значит, непройденная часть графа не связна с текущей вершиной. Раз граф перестал быть связным, было прохождение по мосту, что в алгоритме происходить не должно.

Покажем, что шаг алгоритма всегда возможен, т. е. найдется ребро, не являющееся мостом. Пусть все ребра, выходящие из текущей вершины, – мосты. Случай со степенью 1 тривиален, пусть степень не меньше 2. Покажем, что в процессе работы алгоритма из текущей вершины v не может выходить более одного ребра, являющегося мостом.

Пусть при удалении двух ребер, исходящих из v, назовем их $\{v, v_1\}$ и $\{v, v_2\}$, граф становится несвязным. При удалении $\{v, v_1\}$ возникают связная компонента $G_1 = (V_1, E_1)$, где V_1 содержит вершину v_1, а при удалении $\{v, v_2\}$ возникает $G_2 = (V_2, E_2)$, где $v_2 \in V_2$. Рассмотрим отдельно каждую связную компоненту. Сумма степеней вершин компоненты G_1, как и в любом графе, четная (лемма о рукопожатиях), значит, в исходном графе сумма степеней тех же вершин V_1 на единицу больше (т. к. присутствует ребро $\{v, v_1\}$), т. е. нечетная. Значит, среди вершин V_1 исходного графа G есть нечетная вершина.

Те же рассуждения верны для V_2.

Таким образом, нечетных вершин в графе получается, помимо текущей, по крайней мере, две, что противоречит построениям в ходе алгоритма. Значит, двух мостов быть не может. Следовательно, шаг алгоритма всегда возможен. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дискретная математика : учеб. пособие / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 744 с.

2. **Оре, О.** Теория графов: пер. с англ. / О. Оре. – М. : Либроком, 2009. – 354 с.

3. **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов : учебник / Ф. А. Новиков. – 3-е изд. – СПб. : Питер, 2009. – 384 с.

4. **Fleury, M.** Deux problèmes de Géométrie de situation / M. Fleury // Journal de mathématiques élémentaires [et spéciales]. – 1883. – Vol. 2, livr. 2nd ser. – P. 257–261.