УДК 51.74

ВЫВОД ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КУРСЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

А. В. МАСТИХИН
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Москва, Россия

В учебниках по аналитической геометрии [1] редко приводятся доказательства оптических свойств эллипса, гиперболы, параболы, что связано с некоторой их изощренностью. Однако можно свести их к простому вычислению, сопровождающемуся важным геометрическим свойством директрис, объединяющим все эти кривые, и тогда заполняется брешь в восприятии данного материала студентами. Изучить математику по методическим указаниям к решению типовых расчетов невозможно, математика – наука о вычислениях, часто теоретических [2].

В вузовских программах по аналитической геометрии изучение векторного произведения предшествует теории кривых второго порядка. В работе предлагается рассмотреть оптические свойства этих кривых как набор простых задач на доказательство с одинаковым алгоритмом решения. Применим для их вывода метод векторов [1, 3]. Способ же состоит в вычислении синусов углов, образованных фокальными радиусами, и вектора касательной к кривой, как отношении модуля векторного произведения соответствующих векторов к произведению их модулей. Причем различные положения точки на кривой дают немного различную картину вывода, что порождает некоторый набор задач для самостоятельного решения, приведенный ниже. Разберем три типа таких задач для эллипса, гиперболы и параболы.

Для **эллипса** обозначим полуоси, фокальное расстояние и эксцентриситет a, b, c, e. Введем стандартную систему координат, связанную с центром эллипса и полуосями. Для точки $M\left(x_0, y_0\right)$, лежащей на эллипсе, вычислим синусы углов между векторами касательной и вектором фокального радиуса как отношений модулей векторных произведений к произведению длин. Пусть, для простоты, M лежит в первой четверти, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Координаты касательного вектора возьмем из известного уравнения $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, $\vec{l} = \left(y_0 a^2; -x_0 b\right)$, в трехмерном пространстве $\vec{l} = \left(y_0 a^2; -x_0 b; 0\right)$.

Проверим равенство

$$\sin\alpha_1 \left|\vec{l}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{F_1 M} \times \vec{l}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1 M}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{F_2 M} \times \vec{l}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2 M}\right|} = \sin\alpha_2 \left|\vec{l}\right|.$$

Вычислим

$$\overrightarrow{F_1M}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0-c & y_0 & 0\\ y_0a^2 & x_0b^2 & 0\end{vmatrix}=\vec{k}\left(-x_0^2b^2-y_0^2a^2+x_0b^2c\right)=\vec{k}a^2b^2\left(\frac{x_0c}{a^2}-1\right)=$$

$$=\vec{k}a^2b^2\left(\frac{ex_0-a}{a}\right)=\vec{k}a\mathrm{b}^2\left(ex_0-a\right),$$

где воспользовались каноническим уравнением эллипса и определением эксцентриситета.

По свойству директрис фокальный радиус $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ равен произведению эксцентриситета на расстояние от точки M до директрисы $\left(\mathrm{MD}_1\right)$:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=e\left|\overrightarrow{\mathrm{MD}_1}\right|=e\left|\frac{a}{e}-x_0\right|=\left|a-ex_0\right|.$$

Тогда

$$\sin\alpha_1\left|\vec{l}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{F_1M}\times\vec{l}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1M}\right|}=\frac{\left|b^2\left(ex_0-a\right)\right|}{\left|a-ex_0\right|}=ab^2.$$

Аналогичные вычисления для второго фокуса и второй директрисы дают

$$\overrightarrow{F_2M}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0+c & y_0 & 0\\ y_0a^2 & x_0b^2 & 0\end{vmatrix}=\vec{k}\left(-x_0^2b^2-y_0^2a^2-x_0b^2c\right)=$$

$$=-\vec{k}a^2b^2\left(\frac{x_0c}{a^2}+1\right)=-\vec{k}a\mathrm{b}^2\left(ex_0+a\right),$$

свойство директрисы

$$\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=e\left|\overrightarrow{\mathrm{MD}_2}\right|=e\left|\frac{a}{e}+x_0\right|=a+ex_0,$$

получаем

$$\sin\alpha_2\left|\vec{l}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{F_2M}\times\vec{l}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2M}\right|}=\frac{\left|ab^2\left(ex_0+a\right)\right|}{\left|a+ex_0\right|}=ab^2.$$

Окончательно, синусы двух углов равны, угол падения равен углу отражения.

Гипербола. При тех же обозначениях, при том же положении точки, все вычисления полностью совпадают, $\sin\alpha_1\left|\vec{l}\right| = \sin\alpha_2\left|\vec{l}\right| = ab^2$.

Парабола. Для параболы с уравнением $y^2 = 2px$ воспользуемся уравнением $yy_0 = p\left(x + x_0\right)$ ее касательной в точке $M\left(x_0; y_0\right)$, $x > 0, y > 0$. Касательный вектор имеет координаты $\vec{l} = \left(y_0; p\right)$ на плоскости, $\vec{l} = \left(y_0; p; 0\right)$ в пространстве. Тангенс угла наклона касательной к оси OX равен $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{p}{y_0}$. Покажем, что его синус, $\sin\alpha_1 = \dfrac{p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}$, равен синусу угла α_2 между касательным вектором $\vec{l}$ и вектором фокального радиуса $\overrightarrow{FM}$. Вычислим его при помощи векторного произведения:

$$\overrightarrow{F_1M} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - \dfrac{p}{2} & y_0 & 0 \\ y_0 & p & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\left(x_0 p - y_0^2 - \frac{p^2}{2}\right) = -\vec{k}\left(x_0 p + \frac{p^2}{2}\right) = -\vec{k}p\left(x_0 + \frac{p}{2}\right).$$

По определению параболы, $\left|\overrightarrow{\mathrm{FM}}\right| = e\left|\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right| = x_0 + \dfrac{p}{2}$.

$$\sin\alpha_2 = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{FM}} \times \vec{l}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{FM}}\right|\left|\vec{l}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{FM}} \times \vec{l}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DM}}\right|\left|\vec{l}\right|} = \frac{p\left(x_0 + \dfrac{p}{2}\right)}{\left(x_0 + \dfrac{p}{2}\right)\sqrt{y_0^2 + p^2}} = \frac{p}{\sqrt{y_0^2 + p^2}},$$

что и требовалось доказать.

Задачи

Доказать оптическое свойство эллипса для точки, лежащей во второй, третьей и четвертой четвертях (три задания). Проделать то же для гиперболы (три задания). Для параболы $y^2 = 2px$ доказать оптическое свойство для точки из четвертой четверти и рассмотреть оставшиеся три канонических уравнения для разных положений точки M (семь заданий). Провести те же вычисления для произвольной точки на каждой из кривых (три задания). Всего 16 задач без учета рассмотренных трех.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канатников, А. Н.** Аналитическая геометрия : учебник / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 388 с.

2. **Кузнецов, В. В.** Аксиоматика Вейля – Рашевского в курсах аналитической геометрии и линейной алгебры / В. В. Кузнецов, А. В. Мастихин // Наука и инновации. – 2013. – С. 10.

3. **Кузнецов, В. В.** Векторы в пространстве : учеб.-метод. пособие по стереометрии / В. В. Кузнецов, Н. Г. Окромешко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 55 с.