УДК 514.74

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Т. Ю. ОРЛОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Как привить студенту-первокурснику интерес к математике? Как не убить интерес к предмету, если он есть со школы? Можно и нужно работать с такими студентами индивидуально. В каких формах можно организовать эту работу? Это и математический кружок, и индивидуальные домашние задания, и нестандартные индивидуальные задания на практических занятиях. Хочу предложить подборку задач по теме «Аналитическая геометрия», некоторые из которых могут быть использованы не только на занятиях математического кружка технического университета, но и предложены студентам, успешно решающим стандартные задачи, на практических занятиях по данной тематике.

1. Дан треугольник с вершинами $A(0;-4)$, $B(3;0)$, $C(0;6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A [1].

На первый взгляд задача простая, но стандартной ее не назовешь. Уравнения биссектрисы угла составить легко, если знать, что направляющий вектор биссектрисы равен сумме ортов сторон. Перед студентом можно поставить задачу доказать этот факт, если он сам до этого не догадался. Как только найден направляющий вектор биссектрисы, назовем его $\vec{b}$, задача становится стандартной.

$$\vec{b} = \left(\overrightarrow{AB}\right)_0 + \left(\overrightarrow{AC}\right)_0 = \frac{1}{5}(3;4) + \frac{1}{10}(0;10) = \left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right).$$

Уравнение биссектрисы угла A будет иметь вид $3x - y - 4 = 0$, а искомое расстояние найдем как расстояние от точки до прямой по известной формуле:

$$\rho = \frac{|-6-4|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10}.$$

2. Дан эллипс $x^2 + 3y^2 = 4$ и две точки $A(7;5), B(-5;1)$. Найти координаты такой точки C эллипса, чтобы площадь треугольника ABC была минимальной. Найти площадь треугольника ABC.

Площадь треугольника будет минимальной, если высота CH будет минимальной, т. е. расстояние от точки C до прямой AB должно быть минимальным.

Пусть точка $C(x_0; y_0)$. Прямая AB имеет уравнение $x - 3y + 8 = 0$, угловой коэффициент этой прямой равен $\frac{1}{3}$. Касательная к эллипсу в точке C параллельна AB, значит ее угловой коэффициент также равен $\frac{1}{3}$. Дифференцируем уравнение эллипса, получим $y' = -\frac{x}{3y}$. Следовательно, $-\frac{x_0}{3y_0} = \frac{1}{3}$. Из системы $\begin{cases} x_0^2 + 3y_0^2 = 4, \\ x_0 = -y_0 \end{cases}$ находим $C_1(1;-1), C_2(-1;1)$. Выясним без визуализации, какая точка C является вершиной искомого треугольника. Найдем расстояние $\rho(C, AB)$.

$$|C_1H| = \frac{|1+3+8|}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} > |C_2H| = \frac{|-1-3+8|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

Следовательно, $C(-1;1)$.

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot |C_2H| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5-7)^2 + (1-5)^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 8.$$

На занятии по данной теме, кроме разобранных выше, можно рассмотреть со студентами следующие задачи.

1. Прямая, параллельная прямой $3x+4y-12=0$, пересекает положительные полуоси координат, образуя треугольник площадью 54. Написать уравнение этой прямой [1].

Ответ: $3x+4y-36=0$.

2. Дана вершина $(3;5)$ равнобедренного треугольника, уравнение его основания $x-2y+12=0$ и его площадь $S=15$. Составить уравнения боковых сторон [1].

Ответ: $x-y+2=0, \quad x-7y+32=0$.

3. Точка $A(1;-1)-$ вершина равнобедренного треугольника ABC, прямая $2x+y=0$ служит его основанием BC, а точка $M(0;-3)$ лежит на стороне AB. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC [1].

Ответ: $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y+\frac{9}{8}\right)^2=\frac{9}{320}$.

4. Составить уравнения сторон квадрата, если две из них проходят через точку $O(0;0)$, а на двух других сторонах (прямых, содержащих стороны) лежат точки $(3;1),(8;6)$. Чему равна площадь квадрата? [1]

Ответ: $7x+9y=0, \quad 7x+9y-30=0, \quad 9x-7y=0, \quad 9x-7y-30=0$, $S=\frac{90}{13}$.

5. Найти координаты точки M_0 прямой $l: 3x-4y+23=0$, ближайшей к кривой $L: x^2-2x+y^2-24=0$, и кратчайшее расстояние от M_0 до L [1].

Ответ: $M_0\left(-\frac{53}{25};\frac{104}{25}\right)$, $\rho=\frac{1}{5}$.

6. Дана точка M_0 с положительными координатами $(x_0;y_0;z_0)$. Через нее проведена плоскость. Найти наименьший возможный объем пирамиды, ограниченной этой плоскостью и координатными плоскостями.

Ответ: $\frac{9}{2}x_0y_0z_0$.

7. Дан куб с длиной ребра 12. Найти расстояние между диагональю куба и диагональю грани, не пересекающей эту диагональ куба.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

8. На плоскости заданы две точки $A(-1;1), B(1;2,5)$ и взята точка $C(x;y)$ на кривой $x^2-2x+y^2+4y+1=0$. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника ABC? Найти координаты точки C [1].

Ответ: $S_{\max}=7, \quad C\left(\frac{11}{5};-\frac{18}{5}\right)$.

9. Найти координаты точки M_0 прямой $l: x+y+7=0,$ ближайшей к кривой $L: y^2=12x,$ и кратчайшее расстояние от M_0 до L [1].

Ответ: $M_0(1;-8)$, $\rho=2\sqrt{2}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями : учеб. пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 171 с.