УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗНАМЕНИТОГО ЗАДАЧНИКА Б. П. ДЕМИДОВИЧА В СИСТЕМЕ ОЛИМПИАДНОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ

А. Б. ВАКАЕВА[1, 2], М. Р. БОРТКОВСКАЯ[1], Л. А. ЛЕВИЦКИЙ[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Санкт-Петербург, Россия

При работе со студентами, стремящимися к решению нестандартных задач и участию в математических олимпиадах, преподаватели используют специализированные учебные пособия и сборники олимпиадных задач [1–4], а также материалы, размещенные на официальных сайтах олимпиад. Такие источники позволяют ознакомить студентов с форматом олимпиадных задач, их уровнем сложности и характерными методами решения.

Однако широко известные классические задачники, традиционно применяемые на обычных практических занятиях, также могут служить эффективной основой для олимпиадной подготовки. Особое место среди них занимает «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича [3]. Данный задачник хорошо известен как пособие, содержащее большое количество задач различного уровня сложности, однако его потенциал в контексте олимпиадной подготовки часто недооценивается.

Задачник Б. П. Демидовича [3] содержит значительное число задач, которые по своему характеру близки к олимпиадным: они требуют нетривиального анализа условий, умения выявлять скрытые закономерности, использовать идеи монотонности, ограниченности, предельного перехода и аналогий между различными задачами. Такие задачи не могут быть использованы непосредственно на олимпиадах в силу их широкой известности, однако они полезны для формирования у студентов олимпиадного стиля мышления и отработки ключевых приемов решения.

Проиллюстрируем сказанное на примере одной из типичных сквозных тем олимпиадных задач – нахождения предела последовательности, заданной рекуррентным соотношением. Задачи такого типа регулярно встречаются на студенческих олимпиадах различного уровня и допускают разнообразные подходы: использование монотонности, оценку разностей соседних членов, применение теоремы Штольца, анализ подпоследовательностей и предельного перехода в функциональных соотношениях.

Рассмотрим одну из таких задач, встречавшуюся на студенческой олимпиаде в Казани 2003 г., где требовалось исследовать поведение рекуррентно заданной последовательности (в [1] приведено разобранное решение). Пусть

$x_n = \dfrac{(n-1)\,x_{n-1} + x_{n-2}}{n}$ при $n \ge 2,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1$. Найти предел этой последовательности. Поскольку решение достаточно краткое, приведем его здесь, чтобы использовать в дальнейшем.

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \frac{1}{n(n-1)}(x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x_1 - x_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!},$$

тогда

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = x_{n-2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \ldots = x_0 + 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Получаем, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots$ С другой стороны, используя ряд Тейлора, получаем $e^{-1} = 1 - 1 + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!} + \ldots = 1 - x$, так что $x = 1 - \dfrac{1}{e}$.

Рассмотрим следующий пример – задачу из олимпиады студентов СПбПУ 2020 г. (решение приведено в [2]). В задаче исследуется последовательность, заданная рекуррентным соотношением $x_n = 1 - x_{n-1}^2$, и требуется найти пределы ее четной и нечетной подпоследовательностей в зависимости от начального значения. Вначале рассматривается частный случай, при котором все члены последовательности совпадают. Это приводит к исследованию алгебраического уравнения, решения которого определяют возможные постоянные значения последовательности. Далее показано, что среди этих решений существует единственное, лежащее в рассматриваемом промежутке, – именно оно соответствует существованию общего предела.

В общем случае вводится подпоследовательность, состоящая из членов с нечетными индексами. Для данной подпоследовательности устанавливаются ограниченность и монотонность. Основным инструментом при этом является анализ поведения вспомогательной функции, определяющей рекуррентное соотношение, а также исследование знака разности соседних членов подпоследовательности – это позволяет доказать существование конечного предела. Далее, используя связь между четными и нечетными членами исходной последовательности, находятся пределы обеих подпоследовательностей.

Аналогичные идеи лежат в основе ряда задач из [3]. В частности, в задаче № 637.4 требуется исследовать поведение рекуррентной последовательности с использованием анализа вспомогательных выражений и свойств монотонности.

$$x_0 = 1; \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}. \tag{1}$$

Если докажем, что существует конечный предел x_n, то, переходя к пределу в равенстве (1), этот предел будет найден. Заметим, что для любого n справедливо $x_n > 0$. Исследуем монотонность данной последовательности:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1 - x_{n-1} - x_{n-1}^2}{1 + x_{n-1}} = -\frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1} - 1}{1 + x_{n-1}}.$$

Квадратный трехчлен в числителе имеет корни $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Выделяя четную и нечетную подпоследовательности, проверяем при помощи метода математической индукции, что четная подпоследовательность строго убывает, а нечетная – возрастает. В результате простых математических выкладок получим, что обе подпоследовательности с разных сторон стремятся к конечному пределу $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Как видим, по своей идейной структуре данная задача близка к рассмотренному выше алгоритму решения и может использоваться как эффективный тренировочный материал при подготовке к решению олимпиадных задач подобного типа. Это лишь один пример в рамках конкретной темы; при этом в каждом разделе знаменитого задачника [3], наряду с типовыми задачами разной сложности, можно найти целую россыпь такого рода «типичных», но не типовых олимпиадных задач.

Согласимся с автором пособия [4], утверждающим, что «любой достаточно большой массив нестандартных задач можно проклассифицировать, выделив в нем типичные черты».

Таким образом, [3] может рассматриваться не только как классическое учебное пособие, но и как эффективный инструмент олимпиадной подготовки студентов. Его использование в рамках олимпиадных кружков и факультативов позволяет наработать навыки решения нестандартных задач и чувство аналогий. Тем самым задачник [3] позволяет органично сочетать углубленное изучение математического анализа с развитием нестандартного мышления, необходимого для успешного участия в математических олимпиадах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Григорьева, И. С.** Казанские студенческие олимпиады по математике. Сборник задач : учеб.-метод. пособие / И. С. Григорьева. – Казань : Казан. ун-т, 2011. – 48 с.

2. Математика. Задачи студенческих олимпиад СПбПУ по математике : учеб. пособие / В. И. Антонов, М. Р. Бортковская, А. В. Одинцов, А. В. Ястребов. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 129 с.

3. **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие / Б. П. Демидович. – М. : АСТ ; Астрель, 2010. – 558 с.

4. **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики : учеб. пособие / И. Ю. Попов. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.