УДК 378.1:517

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: СТРУКТУРНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАК МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПОИСКА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

Воображение важнее, чем знание.
А. Эйнштейн

Целью теории решения задач (ТРЗ) является исследование закономерностей процесса поиска решения задач (ППРЗ) с последующей их формализацией. В [1] представлена новая формализация ППРЗ, которую я называю структурная схема решения задач (ССРЗ). Действие ССРЗ в [1] проиллюстрировано на простых примерах. В статье продолжены исследования, начатые в [1]. В частности, показано, как работает ССРЗ в более сложных ситуациях.

Задача 1. В треугольной пирамиде *SABC* (рис. 1) все плоские углы при вершине *S* прямые, *SO* – высота пирамиды. Известно, что отношение площади ΔAOB к площади ΔBOC равно 49. Найдите отношение площади ΔASB к площади ΔBSC.

Решение

Условимся в следующем: треугольные пирамиды с тремя прямыми плоскими углами при вершине *S* будем называть прямоугольными.

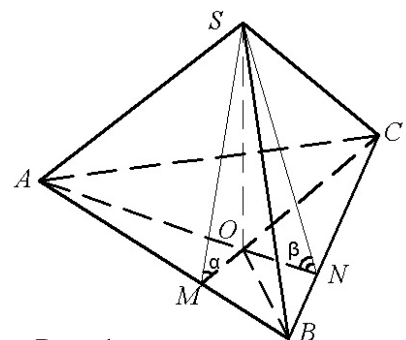

Рис. 1

Сразу понятно, что объекты, между которыми следует установить связь, – это ΔAOB и ΔASB, а также ΔBOC и ΔBSC. Качественная связь между указанными парами треугольников известна: ΔAOB является ортогональной проекцией ΔASB на плоскость ABC, а ΔBOC – проекция ΔBSC на ту же плоскость ABC. Но нам нужно количественное соотношение между ними. Ничего не остается как «прогуляться» в информационную базу задачи (ИБЗ) и поискать там нужный инструмент-факт. К счастью, таковой имеется:

– лемма 1 (о площади ортогональной проекции). Площадь проекции плоской фигуры равна площади самой этой фигуры, умноженной на абсолютную величину косинуса двугранного угла между плоскостями.

Увы, для дальнейшего продвижения леммы 1 недостаточно: нам потребуется еще один факт, которого, по-видимому, в стандартной ИБЗ нет;

– лемма 2. В прямоугольной пирамиде вершина пирамиды проектируется в ортоцентр основания.

Доказательство. Пусть CM – высота ΔABC, опущенная на сторону AB. Соединим точки S и M. Поскольку $CS \perp (ASB)$ (это сразу вытекает из того, что пирамида прямоугольная), то SM есть проекция CM на плоскость ASB. По теореме о трех перпендикулярах $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp SM \Rightarrow AB \perp (SCM)$. Значит, $(ABC) \perp (SCM)$, ибо плоскость ABC проходит через перпендикуляр AB к плоскости SCM. Опустим теперь из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Из факта $(ABC) \perp (SCM)$ следует, что этот перпендикуляр целиком принадлежит плоскости SCM, т. е. точка O находится на высоте CM основания. Дальнейшее очевидно.

Этап 1.

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ASB} \cos\alpha; \tag{1}$$

$$S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BSC} \cos\beta. \tag{2}$$

Этап 2.

$$S_{\Delta ASB} = S_{\Delta ABC} \cos\alpha; \tag{3}$$

$$S_{\Delta BSC} = S_{\Delta ABC} \cos\beta. \tag{4}$$

Этап 3.

$$\text{Из (1) и (3)} \Rightarrow S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABC} \cos^2\alpha. \tag{5}$$

$$\text{Из (2) и (4)} \Rightarrow S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} \cos^2\beta. \tag{6}$$

Разделив (5) на (6), получим

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2 = 49 \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 7. \tag{7}$$

Из (3), (4), (7) окончательно имеем

$$\frac{S_{\Delta ASB}}{S_{\Delta BSC}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 7.$$

Замечание. При решении этой задачи фактически использовали так называемый принцип «наоборот» (см. [3, с. 87], принцип № 13), причем он является ключевым моментом в ППРЗ. Действительно, стандартной для нас является ситуация, когда боковые грани пирамиды проектируются с помощью высоты на ее основание. Оказалось, что для прямоугольной пирамиды каждая боковая грань является ортогональной проекцией основания пирамиды.

Задача 2. Дан ΔABC единичной площади (рис. 2 и 3). На его сторонах выбраны точки K, L, M так, что $AK = 1/4AB$, $BL = 1/4BC$, $CM = 1/4CA$. Отрезки CK и AL пересекаются в точке P, BM и AL – в точке Q, CK и BM – в точке R. Найти площадь ΔPQR.

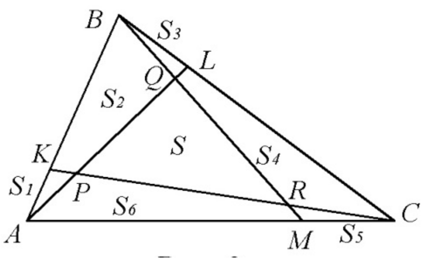

Рис. 2

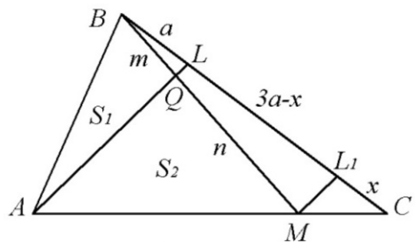

Рис. 3

Решение

Этап 1. Рассмотрим типичный фрагмент конфигурации, присутствующий в нашей задаче. Из точки M проведем прямую, параллельную AL, и пусть L_1 – точка пересечения этой прямой с отрезком BC. Пусть $BL = a$. Тогда $LC = 3a$. Пусть $CL_1 = x$. Тогда $LL_1 = 3a - x$. По обобщенной теореме Фалеса имеем

$$\frac{x}{3a-x} = \frac{CM}{AM} = \frac{1}{3}; \quad 3x = 3a - x \Rightarrow 4x = 3a \Rightarrow x = \frac{3a}{4}.$$

Пусть $BQ = m$, $MQ = n$. Тогда по той же теореме имеем

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m}{n} = \dfrac{a}{3a-x}; \\ x = \dfrac{3a}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{3a - \dfrac{3a}{4}} = \frac{4}{9}.$$

Далее приходим к системе

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \dfrac{3}{4}; \\ \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \dfrac{3}{4} \\ 9S_1 = 4S_2 \end{cases} \Rightarrow 9S_1 = 4\left(\frac{3}{4} - S_1\right) \Rightarrow 13S_1 = 3 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{13}.$$

$$S_{\Delta BQL} = S_{\Delta ABL} - S_{\Delta BAQ} = \frac{1}{4} - S_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{13} = \frac{1}{52}.$$

Этап 2. Поскольку в нашей конфигурации присутствует круговая (циклическая) симметрия, то площади всех «малышей» равны между собой и равны $\frac{1}{52}$, т. е. $S_{\Delta BQL} = S_{\Delta CRM} = S_{\Delta AKP} = \frac{1}{52}$.

Далее имеем

$$S_{\Delta ABL} = \frac{1}{4} \cdot 1 = S_1 + S_2 + S_3; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{52} \cdot 2 + S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{11}{52}.$$

Легко видеть (симметрия), что $S_2 = S_4 = S_6 = \frac{11}{52}$. Окончательно получаем

$$S + 3S_2 + 3S_3 = 1 \Rightarrow \; S + 3 \cdot \frac{11}{52} + 3 \cdot \frac{1}{52} = 1 \Rightarrow S = \frac{4}{13}.$$

Комментарии.

1. В литературе имеется другой подход к решению задачи 2 [4, с. 389, 391, 392].

2. Решение приведенных в статье задач по моей просьбе осуществил старший преподаватель кафедры Н. Н. Бородин, за что хочу ему выразить искреннюю благодарность.

3. ССРЗ будем называть некоторую совокупность структурных единиц, объединенных общей целью достижения ТКР и соединенных последовательно или параллельно.

Теперь поговорим о строении самой структурной единицы. Она включает четыре элемента (в авторской терминологии): объект, челнок, стрела, мешок (рис. 4):

а) t_1, t_2, … – инструменты (объекты-посредники);

б) 1, 2, 3, 4 – базовые объекты;

в) I_1, I_2, … – информация (удобно представлять, что мы складываем ее в мешки).

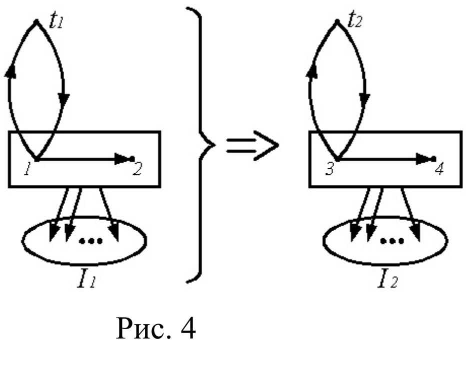

Рис. 4

Детальный анализ приведенных решений задач с позиций ССРЗ предоставляется читателю (алгоритм см. в [1]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: структурная схема решения задач и другие смежные вопросы / Л. Л. Великович // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 31 окт. 2025 г. – Гомель : БелГУТ, 2025. – С. 65–69.

2. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач : новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков : студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

3. **Альтшуллер, Г. С.** Творчество как точная наука / Г. С. Альтшуллер. – М. : Совет. радио, 1976. − 175 с.

4. **Подгорная, И. И.** Уроки математики : учеб. пособие для поступающих в вузы / И. И. Подгорная. – М. : Моск. лицей, 2006. – 692 с.