УДК 372.851

ПОДГОТОВКА ЗАДАЧ МЕЖДУНАРОДНОЙ ОЛИМПИАДЫ RUDN MATH OLYMP – 2025

В. И. ВОЙТИЦКИЙ
Математический институт
Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Москва, Россия

Международная студенческая олимпиада по математике RUDN Math Olymp проводится в Российском университете дружбы народов с 2023 г. Олимпиада состоит из индивидуального и командного туров. Особенностью олимпиады является то, что командный тур проходит в виде турнира математических боев, где в играх участвуют тройки команд с дополнительной ролью наблюдателей (см. правила на официальном сайте *math-battle-ru-2025.pdf*). Девять сильнейших команд образуют три полуфинальные тройки. Команда-победитель из каждой тройки выходит в открытый суперфинал, который является ярким завершением олимпиады. Остальные сборные одновременно с полуфиналом участвуют в дружеских играх. Абсолютные победители индивидуального и командного туров получают денежные призы от спонсоров олимпиады и льготы на продолжение учебы в РУДН.

Описанная специфика олимпиады накладывает определенную ответственность и специфику при составлении задач индивидуального и командного туров. В последние годы индивидуальный тур состоит из шести разноплановых задач (задачи индивидуального тура RMO-2024 доступны для скачивания по ссылке *https://math-olymp.rudn.ru/doc/individual-criteria-2024.pdf*).

Подбор задач индивидуального тура является наиболее трудоемким и сложным этапом в организации международной олимпиады. Можно выделить пять основных принципов, которыми руководствовалась группа по подготовке задач RMO-2025. На наш взгляд, все эти факторы являются необходимыми условиями удачной подборки заданий студенческой олимпиады.

1. Задания должны быть, по возможности, авторскими и новыми, чтобы исключить известные задачи, которые часто дублируются в различных задачниках.

2. Несколько задач должны быть существенно сложными (в идейном или техническом плане), чтобы выявить наиболее достойных абсолютных победителей олимпиады.

3. Олимпиада должна содержать не очень сложные задачи, практически школьного уровня, чтобы проявить себя смогли различные участники, в том числе первокурсники.

4. Олимпиада должна содержать задания по разным математическим дисциплинам, чтобы раскрыть талант студентов, имеющих разные виды мышления.

5. Задания должны быть достаточны интересными, чтобы студенты могли мотивировать себя на освоение дополнительной информации и самостоятельный научный поиск.

В 2025 г. было предложено шесть авторских задач по следующим темам (в порядке следования).

1. Функциональное уравнение.
2. Коммутируемость матриц.
3. Стереометрия.
4. Теория чисел и определители.
5. Поведение решений дифференциального уравнения.
6. Свойства повторных интегралов.

Задачи были условно упорядочены по возрастанию сложности. Наиболее простые задачи (первая и вторая) были доступны первокурсникам, и их решили многие участники. Остальные задачи оказались гораздо более трудоемкими. Отдельные студенты справились с решением третьей, четвертой и шестой задач. Пятую задачу полностью не удалось решить ни одному участнику. Сформулируем ее условие (предложена И. В. Асташовой).

Пусть $y(x)$ *и* $z(x)$ *– заданные в левой полуокрестности нуля и стремящиеся при* $x \to -0$ *к* $+\infty$ *решения, соответственно, уравнений* $y^{(20)}(x) = y^{25}(x)$ *и* $z^{(20)}(x) = z^{25}(x)$.

1. Вычислите значение предела $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\ln y(x)}{\ln z(x)}$ *для некоторых частных решений.*

2. Найдите все возможные значения этого предела.

Оказывается, что частными решениями здесь являются степенные функции $y(x)=c(-x)^{-\frac{5}{6}}$, $z(x)=d(-x)^{-\frac{25}{19}}$ при некоторых числах c и d. Непосредственная подстановка приводит к ответу $\frac{19}{30}$. Других значений предела здесь не возникает, что доказать достаточно трудно.

При оценивании решения каждой задачи олимпиады RMO используется 10-балльная шкала. Абсолютный победитель RMO-2025 (студент МФТИ) набрал 43 балла из 60 возможных. Критерии оценки каждой задачи окончательно формулируются в процессе проверки работ участников олимпиады. Например, в пятой задаче за первый пункт можно получить до трех баллов (за обоснование вида частных решений и найденную величину предела), за второй пункт – до 7 баллов, из которых 3 балла даются за доказательство того, что каждое решение имеет производные, стремящиеся к бесконечности при $x \to -0$. Такая накопительная система оценивания используется довольно часто.

В командном туре задачи имеют несколько иную специфику. Так как параллельно с полуфиналами те же задачи разбирают все команды-участники, то уровень сложности полуфинальных задач является средним. Задачи выбираются с учетом «подводных камней», чтобы докладчик оставлял место для коварных вопросов оппонента. На наш общий взгляд, умение доказывать и отстаивать свою точку зрения, презентовать решение, вести полемику не менее важно, чем умение оформлять решения сложных задач. Именно этими факторами объясняется выбор командного соревнования в виде математического боя.

Например, в полуфинале RMO-2025 была предложена следующая задача (предложена Л. Е. Россовским).

Непрерывная функция $f: R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *удовлетворяет уравнению* $f\left(f(x)\right)=x^2-x+\frac{3}{4}$, $x \neq \frac{1}{2}$. *Найдите* $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Несмотря на кажущуюся простоту, в этой задаче существенно используется то, что функция не определена в точке $x=\frac{1}{2}$ (на самом деле функция имеет в ней вертикальную асимптоту). Правильный ответ в задаче $\frac{3}{2}$, по ходу решения возникает постороннее значение $-\frac{1}{2}$.

В финальном бое предлагаются более сложные задачи, предполагающие проведение маленького исследования. В финале RMO-2025 была предложена следующая задача (предложена В. И. Войтицким).

Описать все упорядоченные четверки действительных чисел a, b, c, , для которых дробно-линейное рекуррентное преобразование $x_{n+1} = f\left(x_n\right) = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$ *является периодическим для всех* $x_0 \in R \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. *Как определить длину периода*? *В каком случае период равен двум, т. е.* $x_{n+2} \equiv x_n$?

В этой задаче непосредственной подстановкой можно установить, что период равен двум лишь в случае $a + d = 0$. Общее решение существенно опирается на свойства собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а также на использование экспоненциальной формы записи комплексных чисел. Период в этой задаче может быть любой длины L в случае, если $\dfrac{\left(a+d\right)^2}{ad - bc} = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi K}{L}\right)$ при натуральных K и L.

Подводя итог вышесказанному, можно отметить, что подбор задач международной олимпиады требует значительных методических усилий и командной работы в связи с большим числом предъявляемых к задачам требований. Кроме 6 задач индивидуального тура и 10 задач для математических боев, подбирается около 15 простых задач для конкурса капитанов и возможных блиц-раундов, которые нужно решить за 2–3 мин. Весь этот большой набор задач подбирает команда из 8–10 человек более чем за 3 месяца.