УДК 378.147

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Э. ГАРИСТ
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова
Могилев, Беларусь

Фрагменты курса математической логики неявно присутствуют в любом курсе математики: в формулировках теорем используются кванторы, по закону контрапозиции формулируются следствия теорем, многие математические факты уточняются с использованием как прямых, так и обратных теорем. При этом учебные планы некоторых специальностей университета предусматривают изучение либо отдельного курса математической логики, либо ее раздела в рамках курса дискретной математики – правда, в условиях небольшого количества аудиторных занятий. Один из центральных разделов математической логики – булева алгебра. Главные навыки, которые должны сформироваться у студента при изучении этого раздела, – научиться упрощать и(или) устанавливать эквивалентность логических формул. Одним из способов решения указанных задач является составление таблиц истинности. Представляется целесообразным при составлении таких таблиц использовать возможности систем компьютерной математики (СКМ).

Поддержка работы с булевыми переменными – отличительная особенность современных СКМ. Причем эта поддержка касается как численных, так и символьных вычислений и преобразований. Изложение вышесказанного проиллюстрируем с использованием СКМ Smath Studio [1]. Выбор именно этой СКМ обоснован, например, в [2].

Как известно, булева функция n переменных имеет 2^n различных комбинаций аргументов и существует 2^{2^n} различных булевых функций n переменных. При $n=2$, соответственно, четыре различных набора аргументов и 16 различных булевых функций. Часть булевых функций являются встроенными в систему и могут быть вызваны с панели «Булева». Определим недостающие до полного списка из 16 функций как пользовательские (рис. 1) и для контроля выведем в виде таблицы расчётные значения их полного списка (рис. 2).

$$x:=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\quad tab_{1\,j}:=0\quad tab_{2\,j}:=x_{1\,j}\wedge x_{2\,j}\quad tab_{3\,j}:=\left(x_{1\,j}\wedge\neg x_{2\,j}\right)\quad tab_{4\,j}:=x_{1\,j}$$

$$tab_{5\,j}:=\left(x_{2\,j}\wedge\neg x_{1\,j}\right)\quad tab_{6\,j}:=x_{2\,j}\quad tab_{7\,j}:=x_{1\,j}\oplus x_{2\,j}\quad tab_{8\,j}:=x_{1\,j}\vee x_{2\,j}$$

$$tab_{9\,j}:=\neg\left(x_{1\,j}\vee x_{2\,j}\right)\quad tab_{10\,j}:=x_{1\,j}\equiv x_{2\,j}\quad tab_{11\,j}:=\neg x_{2\,j}\quad tab_{12\,j}:=\left(\left(\neg x_{2\,j}\right)\vee x_{1\,j}\right)$$

$$tab_{13\,j}:=\neg x_{1\,j}\quad tab_{14\,j}:=\left(\neg x_{1\,j}\vee x_{2\,j}\right)\quad tab_{15\,j}:=\neg\left(x_{1\,j}\wedge x_{2\,j}\right)\quad tab_{16\,j}:=1$$

Рис. 1. Наборы переменных и определение булевых функций

$$\mathrm{stack}(x;\,tab)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

Рис. 2. Наборы булевых переменных и векторы значений всех булевых функций двух переменных

Для удобства обращения к отдельной функции удобно ввести идентификатор, перекликающийся с устоявшимся названием функции (рис. 3). Для краткости также удобно, чтобы все функции имели одно обозначение F, а различались по номеру F_i (как координаты одного вектора).

$$\begin{bmatrix} f\_'FALSE'(x1;x2) \\ f\_'AND'(x1;x2) \\ f\_'coimpl\_left'(x1;x2) \\ f\_'arg\_1'(x1;x2) \\ f\_'coimpl\_right'(x1;x2) \\ f\_'arg\_2'(x1;x2) \\ f\_'XOR'(x1;x2) \\ f\_OR(x1;x2) \\ f\_Pirs\_'NOR'(x1;x2) \\ f\_equival\_'XNOR'(x1;x2) \\ f\_not\_arg2(x1;x2) \\ f\_imlic\_right(x1;x2) \\ f\_not\_arg1(x1;x2) \\ f\_imlic\_left(x1;x2) \\ f\_Sheffer\_'NAND'(x1;x2) \\ f\_'TRUE'(x1;x2) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ x1 \wedge x2 \\ x1 \wedge \neg x2 \\ x1 \\ x2 \wedge (\neg x1) \\ x2 \\ x1 \oplus x2 \\ x1 \vee x2 \\ \neg(x1 \vee x2) \\ x1 = x2 \\ \neg x2 \\ (\neg x2) \vee x1 \\ \neg x1 \\ (\neg x1) \vee x2 \\ \neg(x1 \wedge x2) \\ 1 \end{bmatrix} \quad F(x1;x2) := \begin{bmatrix} f\_'FALSE'(x1;x2) \\ f\_'AND'(x1;x2) \\ f\_'coimpl\_left'(x1;x2) \\ f\_'arg\_1'(x1;x2) \\ f\_'coimpl\_right'(x1;x2) \\ f\_'arg\_2'(x1;x2) \\ f\_'XOR'(x1;x2) \\ f\_OR(x1;x2) \\ f\_Pirs\_'NOR'(x1;x2) \\ f\_equival\_'XNOR'(x1;x2) \\ f\_not\_arg2(x1;x2) \\ f\_imlic\_right(x1;x2) \\ f\_not\_arg1(x1;x2) \\ f\_imlic\_left(x1;x2) \\ f\_Sheffer\_'NAND'(x1;x2) \\ f\_'TRUE'(x1;x2) \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Идентификация булевых функций двух переменных

Для работы с булевыми функциями трех переменных учтем новую область определения – восемь трехкоординатных наборов (понадобятся и их отрицания), структурированных в виде вектор-столбцов (рис. 4), и снабдим описание введенных выше функций комментариями (рис. 5).

$$X1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\neg X1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\neg X2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\neg X3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 4. Область определения булевых функций трех переменных

Теперь легко можно построить вектор значений произвольной булевой функции трех переменных. Проиллюстрируем сказанное конкретными вычислениями. Построим вектор значений булевой функции $\overline{(x \downarrow y) \vee (x \leftrightarrow z)}$ (рис. 6).

$$SPISOK(x1;\ x2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{"тождественный ноль"} \\ 1 & x1 \wedge x2 & \text{"конъюнкция"} \\ 2 & x1 \wedge \neg x2 & \text{"коимпликация левая"} \\ 3 & x1 & \text{"дублирование x1"} \\ 4 & x2 \wedge \neg x1 & \text{"коимпликация правая"} \\ 5 & x2 & \text{"дублирование x2"} \\ 6 & x1 \oplus x2 & \text{"исключающее или"} \\ 7 & x1 \vee x2 & \text{"дизъюнкция"} \\ 8 & \neg(x1 \vee x2) & \text{"стрелка Пирса или эл. Вебба"} \\ 9 & x1 \equiv x2 & \text{"эквивалентность"} \\ 10 & \neg x2 & \text{"не x2"} \\ 11 & \neg x2 \vee x1 & \text{"импликация прав"} \\ 12 & \neg x1 & \text{"не x1"} \\ 13 & \neg x1 \vee x2 & \text{"импликация лев"} \\ 14 & \neg(x1 \wedge x2) & \text{"штрих Шеффера"} \\ 15 & 1 & \text{"тождественная единица"} \end{bmatrix}$$

Рис. 5. Список булевых функций двух переменных с комментариями

$$\overrightarrow{\neg(X1 \vee X2)}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \overrightarrow{X1 \equiv X3}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\neg(X1 \vee X2)} \vee \overrightarrow{X1 \equiv X3}}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\neg\overrightarrow{\overrightarrow{\neg(X1 \vee X2)} \vee \overrightarrow{X1 \equiv X3}}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Рис. 6. Вычисление вектора значений конкретной булевой функции трех переменных

При расчетах необходимо использовать встроенную функцию векторизации (стрелочка сверху). Операция векторизации распространяет однотипные действия логических операций над отдельными координатами на все координаты векторов. Очевидно, что предложенная техника работы может быть распространена и на функции с большим числом переменных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт программы SMath Studio. – URL: https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/резюме.

2. **Гарист, В. Э.** Элементы аналитической геометрии в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 18 февр. 2021 г. – Могилев : Бел.-Рос. ун-т, 2021. – С. 35–37.