МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов всех специальностей заочной формы обучения

Могилев 2026

УДК 517.5
ББК 22.161.5
М93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» января 2026 г., протокол № 5

Составитель канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. Романенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат примеры заданий для аудиторных контрольных работ и их решения, а также необходимые теоретические сведения.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Пример аудиторной контрольной работы с решением по дисциплинам «Математика», «Высшая математика» и «Математический анализ» заочной и заочной сокращенной форм обучения, изучаемых в 1-м семестре

По дисциплине «Математика» заочной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0714-02 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты». Профилизация – технология машиностроения;

– 6-05-0714-03 «Инженерно-техническое проектирование и производство материалов и изделий из них». Профилизация – оборудование и технология сварочного производства;

– 6-05-0715-07 «Эксплуатация наземных транспортных и технологических машин и комплексов». Профилизация – техническая эксплуатация автомобилей.

По дисциплине «Математика» заочной сокращенной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0714-02 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты». Профилизация – технология машиностроения;

– 6-05-0714-03 «Инженерно-техническое проектирование и производство материалов и изделий из них». Профилизация – оборудование и технология сварочного производства;

– 6-05-0715-07 «Эксплуатация наземных транспортных и технологических машин и комплексов». Профилизация – техническая эксплуатация автомобилей;

– 6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы». Профилизация – информационные системы и технологии неразрушающего контроля и диагностики;

– 6-05-1042-01 «Транспортная логистика». Профилизация – региональные транспортно-логистические системы;

– 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Профилизация – промышленное и гражданское строительство.

По дисциплине «Высшая математика» заочной формы обучения для специальности:

– 6-05-0411-02 «Финансы и кредит». Профилизация – банковское дело, налоги и налогообложение.

По дисциплине «Высшая математика» заочной сокращенной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Профилизация – автоматизированные электроприводы;

– 6-05-0311-02 «Экономика и управление». Профилизация – экономика и управление на предприятиях промышленности, торговли и транспорта.

По дисциплине «Математический анализ» (задачи 4–10) заочной и заочной сокращенной форм обучения для специальности 6-05-0612-03 «Системы управления информацией». Профилизация – автоматзированные системы обработки информации.

Задача 1. Проверить невырожденность СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2; \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

и решить ее по формулам Крамера либо матричным методом.

Решение

Выпишем необходимые матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ – основная матрица системы; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов системы.

В случае невырожденных СЛАУ $(\Delta = \det A \neq 0)$ решение системы может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – определитель, который получается из определителя Δ путём замены i-го столбца столбцом свободных членов либо матричным методом $X = A^{-1}B$.

Проверим невырожденность СЛАУ (правило Крамера). Для этого вычислим определитель основной матрицы по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Имеем

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54 - 28 + 120 - 72 + 30 - 84 = 20 \neq 0.$$

Поскольку $\Delta = \det A = 20 \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение. Найдем его по формулам Крамера.

Вычисляем: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 16$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -12$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -16$.

В результате получаем:

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 16 / 20 = 0,8,$$
$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = -12 / 20 = -0,6,$$
$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = -16 / 20 = -0,8.$$

Или $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8; \\ -0,6; \\ -0,8 \end{pmatrix}$ – матричная запись решения.

Проверка. Найденные x_j подставляем в исходные уравнения системы

$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2; \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$ и получаем $\begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2; \\ 3 = 3. \end{cases}$ Верно.

Найдем решения системы матричным методом $X = A^{-1}B$.

Поскольку $\Delta = \det A = 20 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем ее:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -10,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 30,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 50,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 8,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -28.$$

Итак, $A^{-1} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 1 & 8 \\ 30 & 3 & -16 \\ 50 & 9 & -28 \end{pmatrix}.$

Записываем теперь решение в матричной форме $X = A^{-1}B$.

В развернутом виде $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 1 & 8 \\ 30 & 3 & -16 \\ 50 & 9 & -28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \end{pmatrix}.$

Задача 2. Вершины треугольной пирамиды заданы координатами $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$, $D(3;0;2)$. Найти:

а) объем пирамиды;

б) площадь грани ABC;

в) длину высоты пирамиды, опущенную на грань ABC;

г) угол $\angle BAC$.

Решение

Сделаем рисунок пирамиды (рисунок 1). Построим три вектора, выходящие из вершины A, т. е. найдем их координаты, а затем ответим на вопросы задачи.

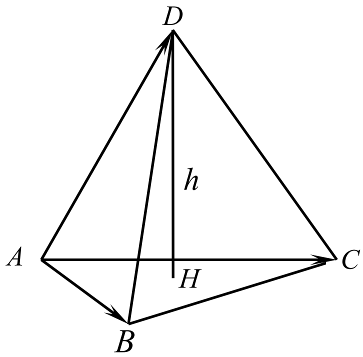

Рисунок 1

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)=\overrightarrow{AB}(-1,-3,-2),$$
$$\overrightarrow{AC}\left(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A\right)=\overrightarrow{AC}(1,3,-1),$$
$$\overrightarrow{AD}\left(x_D-x_A,y_D-y_A,z_D-z_A\right)=\overrightarrow{AD}(2,-2,-1).$$

Для а). Известно, что объем пирамиды равен одной шестой модуля смешанного произведения трех некомпланарных векторов $\vec{a}\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x,b_y,b_z\right)$ и $\vec{c}\left(c_x,c_y,c_z\right)$, выходящих из одной точки, и вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \text{ где } |\ | \text{ – знак определителя.}$$

Воспользуемся этим.

$$V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|(-1)(-40)\right|=\frac{24}{6}=4.$$

Для б). Известно, что площадь треугольника, построенного на двух неколлинеарных векторах $\vec{a}\left(a_x,a_y,a_z\right)$ и $\vec{b}\left(b_x,b_y,b_z\right)$, выходящих из одной точки, равна одной второй модуля векторного произведения и вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|M_{11}i-M_{12}j+M_{13}k\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(M_{11}\right)^2+\left(-M_{12}\right)^2+\left(M_{13}\right)^2},$$

где M_{11}, M_{12}, M_{13} – миноры элементов первой строки определителя.

Воспользуемся этим.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|M_{11}i - M_{12}j + M_{13}k\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|9i - 3j + 0k\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Для в). Известно, что объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е. $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\left|DH\right| = \frac{1}{3}S_{ABC}h$. Отсюда

$$h = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Для г). Известно, что косинус угла между двумя векторами $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ и $\vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Воспользуемся этим.

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot 1 + (-3)\cdot 3 + (-2)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2}\sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-1)^2}} = -\frac{8}{\sqrt{154}}.$$

Поскольку косинус отрицательный, то угол тупой, т. е. больше 90 град. При необходимости, пользуясь калькулятором, находим угол

$$\angle BAC = \arccos\left(-\frac{8}{\sqrt{154}}\right) = \arccos(-0{,}6446) = 130{,}14^\circ.$$

Задача 3. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(2;3)$, $B(5;1)$. Найти направляющий и нормальный векторы прямой, угловой коэффициент прямой и точки пересечения с осями координат.

Решение

Уравнение прямой через две точки имеет вид $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$. При этом вектор $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A, y_B - y_A\right)$ является одним из направляющих. Запишем уравнение

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-2}.$$

Вектор $\vec{s}=\overrightarrow{AB}(3,-2)$ – направляющий вектор.

Найдем нормальный вектор прямой. Для этого найденное уравнение прямой запишем в общем виде $Ax+By+C=0$, где коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора.

$$-2(x-2)=3(y-3) \text{ или } 2x+3y-13=0.$$

Вектор $\vec{n}(2,3)$ – нормальный вектор.

Для нахождения углового коэффициента прямой запишем уравнение в виде $y=kx+b$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент, α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox, а точка с координатами $(0,b)$ есть точка пересечения прямой с осью Oy. Из последнего уравнения получаем

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}.$$

Таким образом, $k=\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{2}{3}$ – угловой коэффициент прямой, а точка с координатами $\left(0,\dfrac{13}{3}\right)$ есть точка пересечения оси Oy. Найдем координаты точки пересечения прямой с осью Ox. Для этого в последнем уравнении положим $y=0$ и найдем x. Очевидно, $x=\dfrac{13}{2}$, точка с координатами $\left(\dfrac{13}{2},0\right)$ есть точка пересечения прямой оси Ox. Сделаем рисунок и наглядно убедимся в правильности решения.

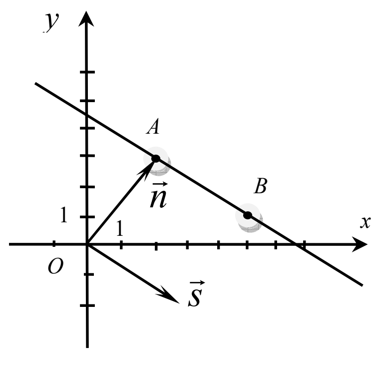

Рисунок 2

Из рисунка 2 видно, что вектор $\vec{s}$ параллелен прямой, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен прямой и ортогонален вектору $\vec{s}$, а угловой коэффициент прямой отрицателен. Координаты точек пересечения осей координат совпадают с точностью до построения.

Производная функций одной действительной переменной. На основании определения производной найдены производные **от основных элементарных функций** и составлена таблица таких производных (она приведена ниже), а нахождение производных от функций, полученных с помощью конечного числа алгебраических операций над **основными элементарными функциями**, основано на свойствах производной, которые называют **правилами дифференцирования** (они также приведены ниже).

Таблица производных основных элементарных функций:

1) $C'=0$, $C=\text{const}$;

2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in R)$.

В частности:

– при $\alpha = 1$ имеем $x' = 1$;

– при $\alpha = -1$ имеем $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

– при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, в частности, при $a = e$ имеем $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, в частности, при $a = e$ имеем $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

6) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

7) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования (суммы, разности, произведения и частного). Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \text{const}$, $v(x) \neq 0$. Тогда:

1) $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$ – справедливо для любого конечного числа слагаемых;

2) $\left(uv\right)' = u'v + uv'$, в частности, $\left(Cu\right)' = Cu'$ – постоянный множитель можно выносить за знак производной;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$.

Производная сложной функции. Сложная функция – это функция от функции (вложение функций), например $y = f\left(\varphi(x)\right)$. Ее можно записать в виде цепочки основные элементарные функции, производные от которых есть в таблице производных $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. В результате, если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную f'_u в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$ имеет производную по x, которая находится по формуле $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Заметим, что таких вложений может быть больше двух. После нахождения производных по новым переменным, следует в обратном порядке по цепочке вернуться к переменной x. Подробности ниже на примерах.

Примечание – Таблицу производных и правила дифференцирования следует **знать наизусть**.

Задача 4. Найти производные следующих функций:

а) $y=7x^3+\dfrac{3}{x^2}-\sqrt[7]{x^3}-\dfrac{5}{x}$, б) $y=x^4\ln x$, в) $y=\dfrac{\cos x}{x^3}$, г) $y=\sin x^3$,

д) $y=\sin^3 x$, е) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^3+2x+6}$.

Решение

Для а). Воспользуемся правилами дифференцирования и производной от степенной функции, а также свойствами степенной функции, которые приведем в качестве справки:

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n},\quad x^n\cdot x^m=x^{n+m},\quad \left(x^n\right)^m=x^{n\cdot m},\quad \sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}},\ \text{где } n,m\in Z.$$

А теперь производные.

$$y'=\left(7x^3+\frac{3}{x^2}-\sqrt[7]{x^3}-\frac{5}{x}\right)'=\left(7x^3\right)'+\left(\frac{3}{x^2}\right)'-\left(\sqrt[7]{x^3}\right)'-\left(\frac{5}{x}\right)'=$$

$$=\left(7x^3\right)'+\left(\frac{3}{x^2}\right)'-\left(\sqrt[7]{x^3}\right)'-\left(\frac{5}{x}\right)'=7\left(x^3\right)'+3\left(x^{-2}\right)'-\left(x^{\frac{3}{7}}\right)'-5\left(x^{-1}\right)'=$$

$$=21x^2-6x^{-3}-\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}-1}+5x^{-2}=21x^2-\frac{6}{x^3}-\frac{3}{7}\sqrt[7]{x^4}+\frac{5}{x^2}.$$

Для б). Воспользуемся правилом дифференцирования произведения

$$y'=\left(x^4\ln x\right)'=\left(x^4\right)'\ln x+x^4\left(\ln x\right)'=4x^3\ln x+x^4\frac{1}{x}=4x^3\ln x+x^3=x^3\left(1+4\ln x\right).$$

Для в). Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^3}\right)'=\frac{\left(\cos x\right)'x^3-\cos x\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-\sin x\cdot x^3-\cos x\cdot 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2\left(-x\sin x-3\cos x\right)}{x^6}=\frac{-x\sin x-3\cos x}{x^4}.$$

В заданиях г), д), е) имеем сложную функцию. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

Для г). Функцию $y=\sin x^3$ представим в виде цепочки основных элементарных функций $y=\sin u$, а $u=x^3$. Дифференцируем по правилу сложной функции:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=(\sin u)'_u\cdot\left(x^3\right)'_x=\cos u\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3.$$

Для д). Функцию $y=\sin^3 x=(\sin x)^3$ представим ее в виде цепочки основных элементарных функций $y=u^3$, а $u=\sin x$. Дифференцируем:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=\left(u^3\right)'_u\cdot(\sin x)'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

Для е). Функцию $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^3+2x+6}$ представим в виде цепочки основных элементарных функций $y=\operatorname{arcctg} u$, $u=\sqrt{w}$, $w=x^3+2x+6$. Теперь дифференцируем

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_w(w)\cdot w'_x(x)=(\operatorname{arcctg} u)'_u\left(\sqrt{w}\right)'_w\left(x^3+2x+6\right)'_x=-\frac{1}{1+u^2}\frac{3x^2+2}{2\sqrt{w}}=\otimes,$$

а теперь в обратном порядке возвращаемся к переменной x и получаем

$$\otimes=-\frac{1}{1+\left(\sqrt{w}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x+6}}\cdot\left(3x^2+2\right)=-\frac{1}{1+x^3+2x+6}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x+6}}\cdot\left(3x^2+2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{3x^2+2}{\left(x^3+2x+7\right)\sqrt{x^3+2x+6}}.$$

Задача 5. Найти уравнения касательной и нормали к плоской кривой $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$. Построить графики: кривой $y=x^2$, касательной и нормали.

Решение

Уравнения касательной и нормали имеют вид $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$, $y=y_0-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ соответственно. Неизвестными в искомых уравнениях являются значения $y_0=f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Найдем их.

$$y_0=f(x_0)=x_0^2=1^2=1,\qquad f'(x)=\left(x^2\right)'=2x,\qquad f'(x_0)=2x_0=2\cdot 1=2.$$

Подставляем найденные значения в уравнения и получаем

$y = 1 + 2(x-1)$ или $y = 2x - 1$ – уравнение касательной;

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$ или $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ – уравнение нормали.

Графики функции, касательной и нормали изображены на рисунке 3.

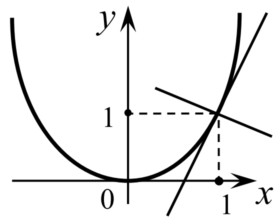

Рисунок 3

Производные высших порядков. Если функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$, а как нам известно, эта производная сама является функцией, то от нее можно снова брать производную т. е. $(y')'$. Эту производную называют производной второго порядка и обозначают y'' или $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично $(y'')' = y'''$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ – производная третьего порядка и т. д.

Задача 6. Найти производную второго порядка.

Решение:

а) $y = \ln x$. Находим производную (производную первого порядка)

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Теперь находим производную второго порядка (вторую производную)

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

б) $y = e^{3x}$. Первая производная $y' = \left(e^{3x}\right)' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$. Теперь вторую производную $y'' = (y')' = \left(3e^{3x}\right)' = 3e^{3x} \cdot (3x)' = 9e^{3x}$.

Применение производных к раскрытию неопределенностей при нахождении пределов. Правило Лопиталя. Пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ находятся непосредственной подстановкой предельного значения $x = x_0$ в выражение под знаком предела. При этом могут возникать выражения вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, которые называют основными неопределенностями. Для их раскрытия (снятие неопределенностей) используют правило Лопиталя, которое записывается в виде

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \overset{если}{=} \left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{то}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \overset{если}{=} \left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{то}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т. д.}$$

до получения определенного значения предела.

Задача 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{3x^2+6x+7}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}$, г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}$, д) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}$.

Решение

Для а). $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(x^2-5x+6\right)'}{\left(x-3\right)'}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{1}=\frac{2\cdot 3-5}{1}=1$.

Для б). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4}{3x^2+6x+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^2+3x+4\right)'}{\left(3x^2+6x+7\right)'}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{6x+6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+3)'}{(6x+6)'}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Для в). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(7x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{7}=\frac{5}{7}$.

Для г). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=\frac{1}{\ln 1+1}=1$,
поскольку $\ln 1=0$.

Для д). $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\cos x/\sin x}{1/x}=$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{(x\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

Экстремумы функции одной переменной. Если функция $f(x)$ на промежутке (a,b) возрастает, то $f'(x)>0$, а если убывает, то $f'(x)<0$. Верно и обратное. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции, если существует δ окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ в этой окрестности выполняются условия $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$. Значения функции в точках максимума (минимума) функции называют **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум функции называют, одним словом, «**экстремум**» функции. Из приведенного можно заключить, что производная в экстремальных точках равна нулю, поскольку при переходе через нее она меняет знак (рисунок 4). Однако производная в некоторых точках может быть равна нулю, а экстремума в этих точках нет. Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю, называют критическими точками первого рода (точками возможного экстремума функции). Для однозначного определения наличия и характера экстремума в критических точках формулируются так называемые **достаточные условия**, которые позволяют ответить на вопрос о его существовании и характере.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_i и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_i – точка минимума, если с «+» на «–», то x_i – точка максимума. Наглядное геометрическое доказательство видно из рисунка 4.

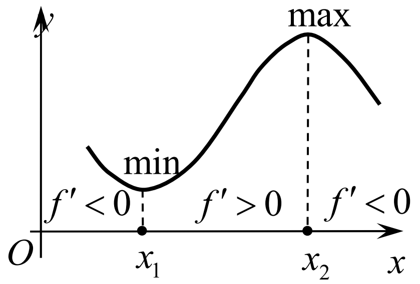

Рисунок 4

Из изложенного следуют ***правила исследования функции на экстремум, промежутки возрастания и убывания***.

1 Из условия $f'(x)=0$ (решая уравнение) найти критические точки.

2 Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из найденных критических точек.

3 В соответствии с достаточными условиями установить наличие экстремума и его характер.

4 Вычислить значения функции в критических точках и схематически построить график функции.

Задача 8. Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремумов функции.

Решение:

1) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}$. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную: $y'=\left(x^4/4-x^2/2\right)'=x^3-x$. Ищем точки, в которых $y'=0$, т. е. $x^3-x=0 \Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow x=0, \quad x=\pm 1$.

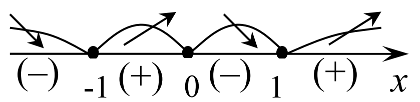

Рисунок 5

Имеем три критические точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Отмечаем их на числовой оси (рисунок 5).

Точки разбивают область определения на четыре интервала: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. Исследуем знак первой производной $y'(x)$ слева и справа от каждой из критических точек.

Для интервала $(-\infty,-1)$. Пусть $x=-2$, тогда $y'(-2)<0$. Функция в интервале $(-\infty,-1)$ убывает. Для интервала $(-1,0)$. Пусть $x=-0,5$, тогда $y'(-0,5)>0$. Функция в интервале $(-1,0)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_1=-1$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(-1)=-0,25$.

Для интервала $(0,1)$. Пусть $x=0,5$, имеем $y'(0,5)<0$. Следовательно, функция в интервале $(0,1)$ убывает.

Производная при переходе точки $x_2=0$ слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, в точке $x_2=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=0$.

Для интервала $(1,\infty)$. Пусть $x=2$, тогда $y'(2)>0$. Функция в интервале $(1,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_3=1$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_3=1$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(1)=-0,25$. Схематически построим график (рисунок 6);

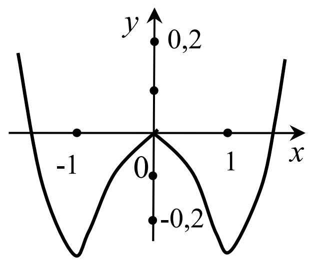

Рисунок 6

2) $y=x-\operatorname{arctg}x$. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y'=(x-\operatorname{arctg}x)'=1-\dfrac{1}{1+x^2}$. Ищем точки, в которых $y'=0$, т. е. $1-\dfrac{1}{1+x^2}=0 \;\Rightarrow\; 1+x^2=1 \;\Rightarrow\; x=0$. Имеем одну критическую точку $x_0=0$. Отметим ее на числовой оси (рисунок 7). Точка разбивает область определения функции на два интервала $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Исследуем знак производной $y'(x)$ слева и справа от нее.

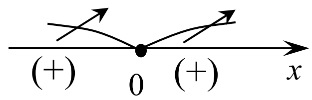

Рисунок 7

Для интервала $(-\infty,0)$. Пусть $x=-1$, тогда $y'(-1)>0$. Функция в интервале $(-\infty,0)$ возрастает.

Для интервала $(0,\infty)$. Пусть $x=1$, тогда $y'(1)>0$. Функция в интервале $(0,\infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_0=0$ слева направо **не меняет знак**.

Следовательно, в точке $x_0=0$ **экстремума нет**, т. е. функция монотонно возрастает во всей области определения от $-\infty$ до $+\infty$.

Частные производные функции многих переменных (ФМП). Частные производные функций многих переменных находятся по формулам и правилам нахождения производных функции одной переменной при условии, что при нахождении производной по одной из переменных все остальные переменные считаются постоянными.

Задача 9. Найти частные производные функций.

Решение:

а) $z = x^2y^3 + x + \dfrac{1}{y}$,

$$z'_x = \left(x^2y^3 + x + \frac{1}{y}\right)'_x = \left(x^2y^3\right)'_x + \left(x\right)'_x + \left(\frac{1}{y}\right)'_x = y^3\left(x^2\right)'_x + 1 + 0 = 2xy^3 + 1,$$

$$z'_y = \left(x^2y^3 + \frac{1}{y} + x\right)'_y = \left(x^2y^3\right)'_y + \left(\frac{1}{y}\right)'_y + \left(x\right)'_y = x^2\left(y^3\right)'_y - \frac{1}{y^2} + 0 = 3y^2x^2 - \frac{1}{y^2};$$

б) $z = x^y$.

$$z'_x = \left(x^y\right)'_x = \begin{vmatrix} y = \alpha = \text{const} \\ \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \end{vmatrix} = yx^{y-1}, \quad z'_y = \left(x^y\right)'_y = \begin{vmatrix} x = a = \text{const} \\ \left(a^y\right)' = a^y \ln a \end{vmatrix} = x^y \ln x;$$

в) $z = e^{xy}$. $z'_x = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy}\left(xy\right)'_x = ye^{xy}$, $z'_y = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy}\left(xy\right)'_y = xe^{xy}$.

Производные высших порядков ФМП. Частные производные первого порядка $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = f\left(x, y\right)$ в произвольной точке сами являются функциями $\left(x, y\right)$. От них также можно брать производные. Производная от производной первого порядка есть производная второго порядка. В частности, для функции двух переменных производных второго порядка четыре:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \left(z'_y\right)'_y = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

При этом $z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют смешанными производными второго порядка. Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков.

Задача 10. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных: а) $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$, б) $z = e^{xy}$.

Решение

Для а). Находим первые производные:

$$z'_x = \left(x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1\right)'_x = 4x^3 - 4xy^3,\ z'_x = \left(x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1\right)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4.$$

Находим вторые производные:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_x = 12x^2 - 4y^3,$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(4x^3 - 4xy^3\right)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_y = -12x^2y + 20y^3,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, $z''_{xy} = z''_{yx}$. Этот результат не случаен.

Теорема Шварца. Если частные производные высших порядков непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f\left(x, y\right)$ имеем $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Убедимся в этом еще на одном примере.

Для б). Находим первые производные:

$$z'_x = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy}\left(xy\right)'_x = ye^{xy},\ z'_y = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy}\left(xy\right)'_y = xe^{xy}.$$

Находим вторые производные:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(ye^{xy}\right)'_x = y\left(e^{xy}\right)'_x = y^2e^{xy},$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(ye^{xy}\right)'_y = y'_ye^{xy} + y\left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} + xye^{xy} = \left(1 + xy\right)e^{xy},$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(xe^{xy}\right)'_y = x'_xe^{xy} + x\left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy} + xye^{xy} = \left(1 + xy\right)e^{xy},$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(xe^{xy}\right)'_y = x\left(e^{xy}\right)'_y = x^2e^{xy}.$$

Видно, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2 Пример аудиторной контрольной работы с решением по дисциплинам «Математика», «Высшая математика» и «Математический анализ» заочной и заочной сокращенной форм обучения, изучаемых во 2-м семестре

По дисциплине «Математика» заочной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0714-02 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты». Профилизация – технология машиностроения;

– 6-05-0714-03 «Инженерно-техническое проектирование и производство материалов и изделий из них». Профилизация – оборудование и технология сварочного производства;

– 6-05-0715-07 «Эксплуатация наземных транспортных и технологических машин и комплексов». Профилизация – техническая эксплуатация автомобилей;

– 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Профилизация – промышленное и гражданское строительство.

По дисциплине «Математика» заочной сокращенной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0714-02 «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты». Профилизация – технология машиностроения;

– 6-05-0715-07 «Эксплуатация наземных транспортных и технологических машин и комплексов». Профилизация – техническая эксплуатация автомобилей;

– 6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы». Профилизация – информационные системы и технологии неразрушающего контроля и диагностики;

– 6-05-1042-01 «Транспортная логистика». Профилизация – региональные транспортно-логистические системы;

– 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Профилизация – промышленное и гражданское строительство.

По дисциплине «Высшая математика» заочной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Профилизация – автоматизированные электроприводы;

– 6-05-0411-02 «Финансы и кредит». Профилизация – банковское дело, налоги и налогообложение.

По дисциплине «Высшая математика» заочной сокращенной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Профилизация – автоматизированные электроприводы;

– 6-05-0311-02 «Экономика и управление». Профилизация – экономика и управление на предприятиях промышленности, торговли и транспорте.

По дисциплине «Математический анализ» заочной формы обучения для специальностей:

– 6-05-0612-03 «Системы управления информацией». Профилизация – автоматизированные системы обработки информации;

– 6-05-0611-04 «Электронная экономика». Профилизация – электронный маркетинг.

Первообразная и неопределенный интеграл (НИ). Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, в результате можем записать таблицу НИ от основных элементарных функций путем обращения соответствующих формул таблицы производных.

Таблица НИ от основных элементарных функций:

1) $\int 0dx = C, \quad C = \text{const}$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$.

В частности:

– при $\alpha = 0$ имеем $\int 1dx = x + C$,

– при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$,

– при $\alpha = -2$ имеем $\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + C$;

3) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$. При $a = e$, $\int e^x dx = e^x + C$, поскольку $\ln e = 1$;

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C$.

В частности, при $a = 1$ имеем $\int \dfrac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

10) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$.

В частности, при $a = 1$ имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$;

13) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

Примечание – Таблицу интегралов и свойства НИ следует **знать наизусть**.

Основные методы и приемы интегрирования. Суть всех методов и приемов интегрирования заключается в том, чтобы свести интеграл к табличному. В связи с этим актуальным является **знание наизусть свойств НИ и таблицы НИ** от основных элементарных функций, чтобы знать или предполагать, как и к какому(им) интегралу(ам) сводить. Рассмотрим основные методы и приемы интегрирования на конкретных примерах. Результат интегрирования проверяется дифференцированием.

Задача 1. Найти НИ:

а) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$, б) $\int\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$, в) $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx$.

В данных примерах при нахождении НИ следует воспользоваться преобразованиями подынтегральной функции и таблицей НИ.

Решение:

а) $$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\int(1+\sin x)dx=\int 1dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C.$$

Проверка: $(F(x)+C)'=(x-\cos x+C)'=1+\sin x=f(x)$;

б) $$\int\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt[3]{x}}{x}\,dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=2\sqrt{x}+\ln x-\frac{x^{(-2/3)+1}}{(-2/3)+1}=2\sqrt{x}+\ln x-3\sqrt[3]{x}+C;$$

в) $$\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\left|\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\right|=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

Задача 2. Найти НИ:

а) $\int\cos(2x+1)\,dx$, б) $\int\sqrt{x-3}dx$, в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx$, г) $\int\frac{1}{9x^2+1}dx$.

В данных примерах, для сведения интегралов к табличным, следует воспользоваться методом замены переменной. Суть метода заключается во введении новой переменной, после чего интеграл с новой переменной может быть табличным или сводится к табличным. Переменную x заменяем на некоторую функцию $x=\varphi(t)$. Соответственно, $dx=d(\varphi(t))=\varphi'(t)dt$. В результате получаем формулу замены переменной в НИ:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \psi(t)dt.$$

После нахождения НИ, т. е. первообразной по переменной t следует вернуться к переменной x по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$, т. е. найдя обратную функцию.

Замечание – Общих методов выбора подстановки нет. Умение выбирать подстановку приобретается многократными упражнениями, т. е. практикой.

Решение:

а) $\int \cos(2x+1)\,dx = \left| 2x+1=t,\ x=\frac{1}{2}(t-1),\ dx=\left(\frac{1}{2}(t-1)\right)'_t dt=\frac{1}{2}dt \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = |t = 2x+1| = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$$

Проверка: $(F(x)+C)' = \left(\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C\right)' = \cos(2x+1) = f(x)$;

б) $\int \sqrt{x-3}dx = \left| x-3=t,\ x=t+3,\ dx=(t+3)'_t\,dt=dt \right| = \int \sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt =$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = |t = x-3| = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + C;$$

в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \frac{x}{4}=t,\quad x=4t,\quad dx=(4t)'_t\,dt=4dt \right| = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C$;

г) $\int \frac{1}{9x^2+1}dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1}dx = \left| 3x=t,\quad x=\frac{t}{4},\quad dx=\left(\frac{t}{4}\right)'_t dt=\frac{1}{4}dt \right| =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t = |\ t = 3x| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C.$$

Задача 3. Найти НИ: а) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$, б) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$, в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}\,dx$.

В данных примерах, для сведения интегралов к табличным, целесообразно воспользоваться приемом подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала с последующей очевидной заменой.

Решение:

а) $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = \left|\sin x = t\right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$;

б $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \, d(\ln x) = \left|\ln x = t\right| = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$;

в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg}^5 x \, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6} + C$.

Задача 4. Найти НИ: а) $\int (2x+5)e^{3x} \, dx$, б) $\int x \ln x \, dx$.

В данных примерах, для сведения интегралов к табличным, следует воспользоваться методом интегрирования по частям, т. е. использовать формулу

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du .$$

Она дает возможность нахождения интеграла $\int u dv$ свести к нахождению интеграла $\int v du$. Суть ее в том, что при удачном разбиении подынтегрального выражения на части u и dv, второй интеграл должен быть проще.

Решение:

$$\text{а) } \int (2x+5)e^{3x} \, dx = \begin{vmatrix} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+5)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C = \frac{4}{9}(x+2)e^{3x} + C;$$

$$\text{б) } \int x \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}x^2 dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Задача 5. Найти НИ: а) $\int \frac{1}{x^2+2x+10}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

В данных примерах, для сведения интегралов к табличным, следует выделить полный квадрат в знаменателе $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, и воспользоваться подстановкой $t = x + \frac{p}{2}$, $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = d\left(t - \frac{p}{2}\right) = dt$.

Решение:

а) $\int \frac{1}{x^2+2x+10}dx = \left| x^2+2x+1+9=\left(x+1\right)^2+3^2 \right| = \int \frac{1}{\left(x+1\right)^2+3^2}dx =$

$= \left| x+1=t,\ x=t-1,\ dx=dt \right| = \int \frac{1}{t^2+3^2}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C = \left| t=x+1 \right| = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \left| x^2+4x+4+1=\left(x+2\right)^2+1 \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+2\right)^2+1}} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left| t+\sqrt{t^2+1} \right| + C = \left| t=x+2 \right| = \frac{1}{2}\ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x+5} \right| + C.$

Определенный интеграл (ОИ). Неопределенный интеграл – это функция. Определенный интеграл – это число, которое находится по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

Эта формула называется формулой **Ньютона – Лейбница** и она считается основной формулой интегрального исчисления, где $F\left(x\right)$ одна из первообразных для $f\left(x\right)$, т. е. $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Задача 6. Вычислить ОИ.

Решение:

а) $\int_0^1 \left(x^2+5x-7\right)dx = \int_0^1 x^2dx + 5\int_0^1 xdx - 7\int_0^1 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + 5\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - 7x\Big|_0^1 =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-7x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + 5\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 7\cdot 1 - 0 = -\frac{25}{6};$$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}0\right) = \left(1-0\right) = 1;$

в) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx = \left| 2x-1=t,\quad x=\frac{1}{2}\left(t+1\right),\quad dx=d\left(\frac{1}{2}\left(t+1\right)\right)=\frac{1}{2}dt \right| = \otimes.$

Найдем новые пределы $\begin{cases} 2\cdot 1-1=\alpha, \\ 2\cdot 2-1=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=3. \end{cases}$ Следовательно,

$$\otimes=\int_1^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\ln t\Big|_1^3=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3,$$ поскольку $\ln 1=0$.

Геометрические приложения ОИ. Из геометрического смысла ОИ следует, что если $f(x)\geq 0$ (рисунок 8, *а*), то $\int_a^b f(x)dx=S$ – площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $f(x)$, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, а если $f(x)\leq 0$ (рисунок 8, *б*), то $\int_a^b f(x)dx<0$, а площадь соответствующей криволинейной трапеции будет равна $S=-\int_a^b f(x)dx$. Если требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ и $f(x)\geq g(x)$ (рисунок 8, *в*), то, рассматривая эту площадь как разность площадей соответствующих криволинейных трапеций, можем записать $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$, где $f(x)-g(x)\geq 0$.

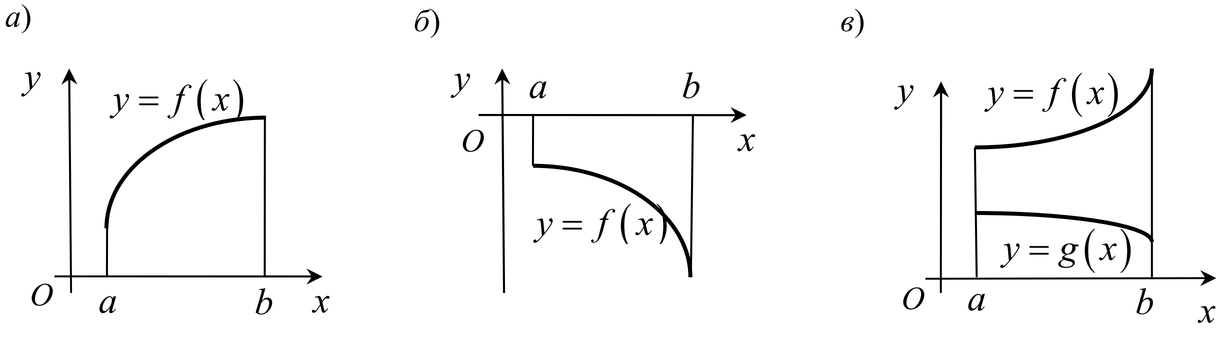

Рисунок 8

Задача 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Решение:

а) $y=x$, $y=3x$, $x=1$. Сделаем рисунок фигуры (рисунок 9). Найдем площадь.

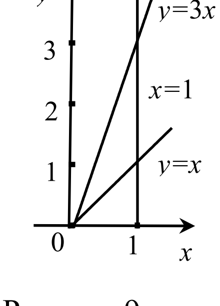

Рисунок 9

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1\left(3x-x\right)dx=2\int_0^1 xdx=x^2\Big|_0^1=1.$$

Замечание – В правильности ответа легко убедиться, используя формулу для вычисления площади треугольника (сообрази и проверь);

б) $y=x^2$, $y=-x^2+2$. Сделаем рисунок фигуры (рисунок 10). Для установления пределов интегрирования найдем координаты концевых точек проекции фигуры на ось Ox, которые являются координатами точек пересечения кривых, описывающих эту фигуру. Для этого решим систему уравнений

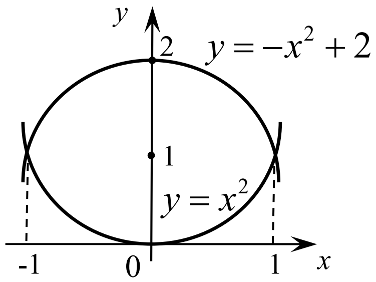

Рисунок 10

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ y=1. \end{cases}$$ Следовательно,

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^1\left(2-x^2-x^2\right)dx=\int_{-1}^1\left(2-2x^2\right)dx=$$

$$=2\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)dx=2\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)dx=2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1=\frac{8}{3}.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Общих методов решения (интегрирования) произвольных дифференциальных уравнений нет. Уравнения подразделяются на типы (виды), для которых придуманы методы решения. В этой связи, приступая к поиску решения ДУ, необходимо установить его тип и взять рекомендованную методику его решения.

Задача 8. Найти общий и частный интегралы уравнения (или решить задачу Коши) $\begin{cases} y'=-\dfrac{x}{y}, \\ y(3)=4. \end{cases}$

Решение

Видно, что имеем уравнение в разделяющихся переменных. Обозначение производной y' меняем на $\dfrac{dy}{dx}$, т. е. $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и получаем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Умножив обе части уравнения на ydx получаем $ydy=-xdx$. Переменные разделены, интегрируем $\int ydy=-\int xdx$. В результате получаем общий интеграл уравнения

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C.$$

Переписав его в виде $x^2 + y^2 = C$, можно заключить, что общим интегралом уравнения является семейство концентрических окружностей радиусом $R = \sqrt{C} = \sqrt{2c}$ с центром в начале координат.

Получим частное решение, т. е. решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(3) = 4$. Эти условия означают, что интегральная кривая должна пройти через точку $x_0 = 3$, $y_0 = 4$. Подставляем их в общий интеграл и находим значение константы C.

$$3^2 + 4^2 = C, \text{ т. е. } C = 25.$$

Следовательно, частный интеграл имеет вид

$$x^2 + y^2 = 5^2.$$

Геометрически это окружность радиусом $R = 5$ с центром в начале координат, и она проходит через точку $M_0(3;4)$.

Задача 9. Найти общий и частный интегралы уравнения (или решить задачу Коши) $\begin{cases} y' - y = 2e^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Решение

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка $y' + p(x)y = q(x)$, в нем $p(x) = -1$, $q(x) = 2e^x$. Его решение находим методом Бернулли (методом подстановки), суть которого заключается в использовании подстановки $y = u \cdot v$ (произведения двух функций), которая приводит к системе уравнений относительно функций u и v: $\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$

В данном случае имеем систему $\begin{cases} v' - 1 \cdot v = 0, \\ u'v = 2e^x. \end{cases}$

Первое уравнение системы $v' - v = 0$ или $\dfrac{dv}{dx} = v$ является уравнением с разделяющими переменными x и v. Разделяем переменные $\dfrac{dv}{v} = dx$ и интегрируем

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx, \quad \text{т. е.} \quad \ln v = x, \quad \text{или} \quad v = e^x.$$

Постоянную интегрирования C при решении первого уравнения берем равной нулю. Теперь, найденную функцию $v = e^x$ подставляем в второе уравнение системы и получаем уравнение с разделяющими переменными x и u

$$u'e^x = 2e^x \text{ или } u' = 2 \text{ или } \frac{du}{dx} = 2 \text{ или } du = 2dx.$$

Переменные разделены, интегрируем обе части, т. е.

$$\int du = 2\int dx, \quad \text{т. е.} \quad u = 2x + C.$$

Решение для функции u найдено, здесь уже добавляем константу C. Теперь записываем общее решение

$$y = u \cdot v = \left(2x + C\right)e^x, \ C = \mathrm{const}.$$

Найдём теперь частное решение, т. е. решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y\left(0\right) = 1$. Подставляем $x = 0,\ y = 1$ в общее решение

$$1 = \left(2 \cdot 0 + C\right)e^0$$

и получаем $C = 1$. Следовательно, частное решение исходного ДУ имеет вид

$$y = \left(2x + 1\right)e^x.$$

Проверка. Берём полученный ответ $y = \left(2x + C\right)e^x$, находим производную y' и подставляем в исходное уравнение. Уравнение должно превратиться в верное равенство. Проверить самостоятельно.

Задача 10. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$, б) $y'' - 4y' + 4y = 0$, в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение

Данные уравнения являются линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами, которые имеет общий вид

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – числа и их называют коэффициентами уравнения. Для таких уравнений доказана теорема о структуре общего решения.

Если два решения $y_1\left(x\right)$ и $y_2\left(x\right)$ уравнения второго порядка на некотором интервале $\left(a, b\right)$ линейно-независимы и образуют фундаментальную систему, то общим решением уравнения является функция

$$y = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Для нахождения $y_1\left(x\right)$ и $y_2\left(x\right)$ составляется характеристическое уравнение, формальной заменой y'' на k^2, y' на k, y на $k^0 = 1$ и оно является алгебраическим

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Каждому из корней этого уравнения соответствует решения $\{y_1(x), y_2(x)\}$, которые зависят от вида корней.

Если корни k_1 и k_2 действительны и различны, то $\{y_1(x)=e^{k_1x}, y_2(x)=e^{k_2x}\}$.

Если корни k_1 и k_2 действительны и равны, т. е. $k_1=k_2=k$, то $\{y_1(x)=e^{kx}, y_2(x)=xe^{kx}\}$.

Если корни k_1 и k_2 комплексные, т. е. $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то $\{y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x\}$.

Доказано, что эти решения образуют фундаментальную систему.

Для а). Составляем характеристическое уравнение

$$k^2-5k+6=0.$$

Его корни $k_1=2$, $k_1=3$ – действительны и различны, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$\{y_1=e^{2x},\ y_2=e^{3x}\},$$

а общее решение –

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

Для б). Составляем характеристическое уравнение

$$k^2-4k+4=0.$$

Его корни $k_1=k_2=2$ – действительны и равны, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$\{y_1=e^{2x},\ y_2=xe^{2x}\},$$

а общее решение –

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}=(c_1+c_2x)e^{2x}.$$

Для в). Составляем характеристическое уравнение

$$k^2-6k+25=0.$$

Его корни $k_{1/2}=3\pm 4i$ – комплексные, причем $\alpha=3$, $\beta=4$, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$\{y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x=e^{3x}\cos 4x,\ \ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{3x}\sin 4x\},$$

а общее решение –

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{3x}\cos 4x+c_2e^{3x}\sin 4x=(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)e^{3x}.$$

3 Пример аудиторной контрольной работы с решением по дисциплинам «Математика», «Высшая математика» заочной и заочной сокращенной форм обучения и дисциплине «Математический анализ» заочной формы обучения изучаемых в 3-м семестре

По дисциплине «Математика» заочной форме обучения для специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Профилизация – промышленное и гражданское строительство.

По дисциплине «Высшая математика» заочной формы обучения для специальности 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств». Профилизация – автоматизированные электроприводы.

По дисциплине «Математический анализ» (задачи 1–6) заочной формы обучения для специальности 6-05-0611-04 «Электронная экономика». Профилизация – электронный маркетинг.

Числовые ряды. Основной вопрос в теории числовых рядов является вопрос о его сходимости. Ряд сходится, если его сумма является конечным числом. Для этих целей сформулированы специальные признаки, следуя которым можно ответить на основной вопрос теории рядов.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, т. е. предел формулы общего слагаемого ряда равен нулю.

Однако **обратное не всегда верно,** т. е. если о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ничего неизвестно, но $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то это не означает, что исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Достаточный признак расходимости. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Задача 1. На основании необходимого признака сходимости и достаточного признака расходимости ответить на вопрос о сходимости рядов.

Решение:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$. $u_n = \frac{n}{2n+1}$. $\lim_{x\to\infty} u_n = \lim_{x\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Ряд расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$. $u_n=\frac{n}{(n+1)^3}$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{(n+1)^3}=0$. Ответа нет;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{5n+9}$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5n}{5n+9}=1$. Ряд расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{n^2}=\cos 0=1$. Ряд расходится;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin 0=0$. Ответа нет;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin\frac{1}{n}$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}n\arcsin\frac{1}{n}=1$. Ряд расходится;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\simeq 2,72$. Ряд расходится;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n+5}$. $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3n+2}{n+5}=3$. Ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости числовых знакопостоянных рядов. Поскольку необходимый признак не дает возможность судить о сходимости ряда, то сформулированы и используются так называемые достаточные признаки.

Признаки сравнения. Согласно им, сходимость (расходимость) ряда устанавливают путем сравнения (в неравенствах или в пределе) с другим «эталонным» рядом, для которого известно сходится он или расходится.

Признак сравнения в неравенствах. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n. \qquad (2)$$

Тогда, если начиная с некоторого $n>n_0$ выполняется неравенство

$$u_n\le v_n,$$

то из сходимости (2) следует сходимость (1), а из расходимости (1) следует расходимость (2). Наглядная трактовка (рисунок 11).

В случаях, когда признак сравнения в неравенствах ответа о сходимости ряда не дает, например, эталонным рядом сравнения является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и он расходится, или эталонным рядом сравнения является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и он сходится, то следует прибегнуть к предельному признаку сравнения.

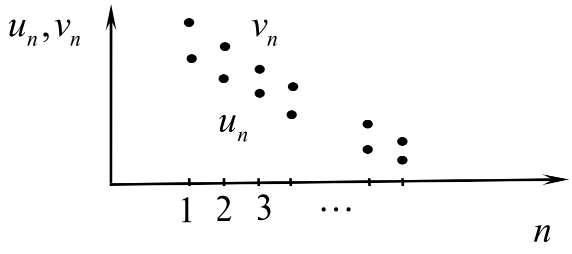

Рисунок 11

Предельный признак сравнения. Если существует конечный $(\neq \infty)$ и не равный нулю $(\neq 0)$ предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A,\ \ (0 < A < \infty)$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно. Это означает, что они «ведут» себя одинаково в смысле сходимости при $n \to \infty$.

В качестве рядов сравнения используются следующие эталонные ряды, для которых установлена их сходимость (расходимость):

1) ряд геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},$$

который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;

2) обобщенный гармонический ряд (или ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \quad (p > 0),$$

который сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$. При $p = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ называют просто гармоническим.

Рекомендация. Для сравнения выбирай эталонные ряды, которые по виду и структуре формулы общего слагаемого схожи с исследуемым рядом, чтобы легко выполнить сравнение в неравенствах или найти предел.

Задача 2. Исследовать сходимость рядов.

Решение:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Сравним ряд, в неравенствах, с обобщенным гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится, поскольку $p = 2 > 1$. В неравенствах

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Видно, что слагаемые исследуемого ряда меньше соответствующих слагаемых эталонного ряда. А эталонный ряд сходится. Следовательно, исходный ряд – сходится. Видно, что предельный признак сравнения также дает ответ;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Сравним ряд с гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. В неравенствах

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Видно, что слагаемые исследуемого ряда меньше соответствующих слагаемых эталонного ряда. А эталонный ряд расходится. Следовательно, признак в неравенствах ответа не дает. Применим предельный признак сравнения. Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1\left(\neq 0, \neq \infty\right).$$

Предел есть конечное $\left(\neq\infty\right)$ и не равное нулю $\left(\neq 0\right)$ число. Следовательно, оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости. Поскольку ряд сравнения является расходящимся, то и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ – расходится;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$. Сравним ряд с гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Признак сравнения в неравенствах ответа не дает, поскольку $\frac{1}{3n+1} < \frac{1}{n}$. Сравним в пределе. Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+1} \div \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\neq 0, \neq \infty\right).$$

Так как гармонический ряд расходится, то и исходный ряд расходится;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$. Сравним ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$, который сходится.

В неравенствах $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$. Следовательно, исходный ряд сходится;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$. Сравним ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1$, который сходится.

В неравенствах $\frac{1}{2^n-1}>\frac{1}{2^n}$. Признак ответа не дает. Сравним в пределе

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-1}:\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=1\left(\neq 0,\neq\infty\right).$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

В отличии от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся (расходящихся) рядов, существуют достаточные признаки, которые вопрос о сходимости позволяют решить, проделав лишь некоторые операции над слагаемыми ряда.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ существует $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ – расходится. При $q=1$ признак ответа не дает.

Признак целесообразно применять, когда u_n содержит множители вида $n!$, a^n, n^{α} или $u_n=u_{n-1}f\left(n\right)$.

Радикальный признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, а при $q>1$ – расходится. При $q=1$ признак ответа не дает.

Признак целесообразно применять, когда u_n содержит множители вида $\left(f\left(n\right)\right)^n$ или $\left(f\left(n\right)\right)^{n^2}$, $\left(f\left(n\right)\right)^{\frac{n}{\alpha}}$, $\left(f\left(n\right)\right)^{\varphi(n)}$.

Задача 3. Установить сходимость (расходимость) рядов.

Решение:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Формула общего слагаемого содержит факториал $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Следовательно, применяем признак Даламбера. Выписываем $u_n=\frac{1}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Составляем отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и находим предел.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0<1.$$

Предел меньше единицы, следовательно исследуемый ряд сходится. При нахождении предела воспользовались свойством факториала $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^2}$. Формула общего слагаемого содержит показательную функцию 5^n и степенную n^2. Применяем признак Даламбера. Выписываем $u_n=\dfrac{5^n}{n^2}$, $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$. Составляем отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ и находим его предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{5^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{(n+1)^2}\frac{n^2}{5^n}=5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=5\cdot 1=5>1.$$

Предел больше единицы. Следовательно, исследуемый ряд расходится;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$. Формула общего слагаемого содержит факториал $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ и показательную функцию 3^n. Применяем признак Даламбера. Выписываем $u_n=\dfrac{3^n}{n!}$. $u_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}$. Составляем отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ и находим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3}{3^n}\frac{n!}{n!(n+1)}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=3\cdot 0=0<1.$$

Предел меньше единицы. Следовательно, исследуемый ряд сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^n$. Формула общего слагаемого имеет вид $\left(f(n)\right)^n$. Применяем радикальный признак Коши. Имеем $u_n=\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^n$. Находим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{1+n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty^2}\right)=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0<1.$$

Предел меньше единицы. Следовательно, исследуемый ряд сходится;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{5n+1}\right)^{n^2}$. Формула общего слагаемого имеет вид $\left(f(n)\right)^{n^2}$.

Применяем радикальный признак Коши. Имеем $u_n = \left(\dfrac{3n}{5n+1}\right)^{n^2}$. Находим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^{n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\infty} = 0 < 1.$$

Предел меньше единицы. Следовательно, исследуемый ряд сходится;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{8n^3+1}{2n^3+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Формула общего слагаемого имеет вид $\left(f\left(n\right)\right)^{\alpha n}$.

Применяем радикальный признак Коши. Имеем $u_n = \left(\dfrac{8n^3+1}{2n^3+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Находим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{8n^3+1}{2n^3+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{8n^3+1}{2n^3+1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{8\infty^3}{2\infty^3}\right)} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 > 1.$$

Предел больше единицы. Следовательно, исследуемый ряд расходится.

Замечание – В случаях, когда признаки Даламбера и радикальный Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда, т. е. $q = 1$, то в этих случаях следует прибегнуть к признакам сравнения.

Знакочередующиеся ряды. Ряд, у которого любые два соседних слагаемых имеют разные знаки, называется знакочередующимся

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + \left(-1\right)^{n+1}u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}u_n,\quad u_n > 0. \tag{3}$$

Для исследования его сходимости применяют признак **Лейбница**.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд (3) сходится, если выполнены два условия:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots,$$

2) предел формулы общего слагаемого ряда стремится к нулю, при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ряды, для которых выполнены условия признака Лейбница, называют рядами Лейбница. Для рядов Лейбница выполняется следующее очевидное неравенство: сумма ряда меньше первого слагаемого, взятого по модулю, т. е. $S \le \left|u_1\right|$.

Так, например, для сходящегося ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q=-\frac{1}{2}$, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}=S<u_1=1.$$

Абсолютная и условная сходимость. Если для сходящегося знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, сходится, то такой ряд называется **абсолютно** сходящимся. В противном случае (знакочередующийся ряд сходится, а ряд из модулей расходится), ряд называют **условно** (не абсолютно) сходящимся.

Замечание – Если ряд из модулей сходится, то сходится и исходный знакочередующийся ряд и нет необходимости применять признак Лейбница. В этой связи при исследовании на абсолютную сходимость можно сразу начинать исследование ряда из модулей. Однако если ряд и модулей расходится, то применяй признак Лейбница на предмет условной сходимости.

Задача 4. Исследовать на абсолютную сходимость.

Решение:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$. Ряд знакочередующийся.

Проверим условия Лейбница:

1) $\frac{1}{1!}>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

Оба условия выполнены, значит, ряд сходится. Исследуем на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0<1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{9^n}{n!}$. Исследуем сразу на абсолютную сходимость. Составляем ряд из модулей и по признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}n!}{(n+1)!9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n\cdot 9\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 9^n}=9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=9\frac{1}{\infty}=9\cdot 0=0<1.$$

Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно и нет необходимости применять признак Лейбница.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^p}$$

называют «эталонным» рядом **Лейбница**, который:

– при $p>1$ абсолютно сходится;

– при $0<p\le 1$ условно сходится;

– при $p\le 0$ расходится.

Проверить самостоятельно для конкретных значений p из указанных промежутков.

Функциональные (степенные) ряды. Основным вопросом в теории функциональных (степенных) рядов является вопрос об установлении области сходимости, в частности, интервала сходимости ряда. Совокупность числовых значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют **областью сходимости ряда**. В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x, т. е. $S=S(x)$.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (4)$$

и его называют рядом по степеням $(x-x_0)$.

При $x_0=0$ степенной ряд принимает вид

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (5)$$

и его называют рядом по степеням x.

Величины $a_n\ (n=0,1,2,\ldots)$ являются числами и их называют **коэффициентами** ряда. Степенной ряд (4) всегда сходится в точке $x=x_0$, а ряд (5) – в точке $x=0$. Эти точки называют **центрами сходимости** рядов.

В случае полных рядов (содержащих все степени) для нахождения интервала сходимости доказана теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (5) сходится при $x = |c|$, то он сходится при всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| < |c| \quad \text{или} \quad -|c| < x < |c|.$$

Если же ряд (5) расходится при $x = |c|$, то он расходится при $\forall x \in |x| > |c|$.

Максимальное значение $|c| = R$, при котором ряд (5) сходится, называется **радиусом** сходимости ряда, а интервал

$$|x| < R \quad \text{или} \quad -R < x < R,$$

называют **интервалом** сходимости. Вне интервала сходимости, т. е. $|x| > R$, ряд расходится (рисунок 12). В концевых точках $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Для определения области сходимости ряда необходимо исследовать его в концевых точках $x = \pm R$. Для этого следует значения $x = \pm R$ подставить в исходный степенной ряд и получившийся числовой ряд исследовать на сходимость. При нахождении R возможны случаи: $R = 0$, $R = \infty$, $R -$ конечное число. В случае $R = 0$ говорят, что ряд сходится в единственной точке $x = 0$ – центре сходимости. В случае $R = \infty$ говорят, что ряд сходится на всей числовой оси. Аналогично определяются радиус, интервал и область сходимости ряда (4) (рисунок 13).

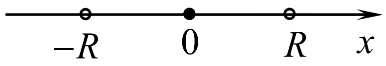

Рисунок 12

$$|x - x_0| < R \quad \text{или} \quad -R < x - x_0 < R$$
$$\text{или} \quad x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Для нахождения радиуса сходимости, на основании признаков Даламбера и радикального Коши, получены формулы для нахождения радиуса R, которые имеют вид

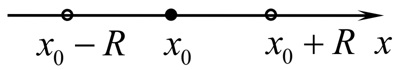

Рисунок 13

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Целесообразность применения этих формул аналогична применению признаков Даламбера и радикального Коши для числовых рядов (см. раздел «Числовые ряды»).

Задача 5. Найти интервал сходимости степенных рядов.

Решение:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. Это полный ряд по степеням x. Для него $x_0 = 0$ – центр сходимости, $a_n = n^n$. Найдем радиус сходимости:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{1}{\infty}=0\,.$$

Следовательно, ряд сходится в единственной точке $x=0$ – центре сходимости;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Это полный ряд по степеням x. Для него $x_0=0$ – центр сходимости, $a_n=\frac{1}{n!}$. Найдем радиус сходимости. Имеем $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty\,.$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n-1}}$. Имеем полный ряд по степеням x. Точка $x_0=0$ – центр сходимости. Найдем радиус сходимости. Имеем $a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{3^n}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{3^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n-1}\cdot 3}{3^{n-1}}\right|=3\,.$$

Следовательно, $(-3,3)$ – интервал сходимости;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Это полный ряд по степеням $(x+1)$, $x_0=-1$ – центр сходимости. Найдем радиус сходимости. Имеем $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right|=1\,,$$

т. е. $R=1$, соответственно $(-2;0)$ – интервал сходимости.

Степенные ряды Тейлора – Маклорена. Известно, что сумма сходящегося степенного ряда есть функция. В связи с этим возникают вопросы. А любую ли произвольную функцию $f(x)$ можно представить степенным рядом? Каковы условия такого представления? Как найти коэффициенты этого ряда и область сходимости? Ответы на эти вопросы дает теория рядов Тейлора – Маклорена. Однако разложение произвольных функций в указанные ряды сопряжено с определенными трудностями по нахождению бесконечного числа производных. В этой связи на основании определения составлена таблица рядов Маклорена основных элементарных функций и сформулированы приемы разложения произвольных функций, которые основаны на свойствах степенных рядов, таблицы рядов Маклорена и сообразительности.

Таблица рядов Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \forall x \in (-1; 1);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots \quad \forall x \in (-1; 1);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad \forall x \in (-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Одним из эффективных приемов является прием, основанный на замене переменной. Подробности на примерах.

Задача 6. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$.

Решение:

а) $f(x) = \cos 5x$. Делаем замену $5x = t$, имеем $f(t) = \cos t$. Используя таблицу рядов, можем записать

$$f(t) = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Возвращаемся к старой переменной $t = 5x$, получаем

$$\cos 5x = 1 - \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \frac{(5x)^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Определим область сходимости ряда для $\cos 5x$. Для $\cos t$ имеем $-\infty < t < \infty$. Но $t = 5x$. Следовательно, $-\infty < 5x < \infty$ или $-\infty < x < \infty$, т. е. ряд сходится на всей числовой оси;

б) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x}$. Известно $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+...+t^n+...$, $\left|t\right|<1$ – ряд геометрической прогрессии. Преобразуем функцию и делаем замену.

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-\left(-x\right)}=\left|-x=t\right|=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+...=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\left|t=-x\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x\right)^n=1-x+x^2-x^3+x^4-...=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n.$$

Область сходимости: $\left|t\right|<1$, $\left|-x\right|<1 \;\Rightarrow\; \left|x\right|<1 \;\Rightarrow\; -1<x<1$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+2x}=\dfrac{1}{1-\left(-2x\right)}=\left|-2x=t\right|=\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+...+t^n+\ldots=$

$$=1+\left(-2x\right)+\left(-2x\right)^2+...=1-2x+2^2x^2-2^3x^3+...+\left(-1\right)^n 2^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n 2^n x^n.$$

Область сходимости: $\left|t\right|<1$ или $\left|-2x\right|<1$ или $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$;

г) $f\left(x\right)=e^{x^2}=\left|x^2=t\right|=e^t=1+\dfrac{t}{1!}+\dfrac{t^2}{2!}+...=\left|t=x^2\right|=1+\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^4}{2!}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}$.

Область сходимости: $\left|t\right|<\infty \;\Rightarrow\; \left|x^2\right|<\infty \;\Rightarrow\; -\infty<x<\infty$ т. е. вся числовая ось.

Теория вероятностей (ТВ) – раздел математики, в котором изучаются объективные закономерности массовых случайных явлений. Под случайным понимается явление, исход которого невозможно точно предсказать при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта, поскольку каждый раз оно протекает по-иному. Для предсказания возможности появления некоторого явления или события, например A, введена числовая функция $P\left(A\right)$, которая характеризует вероятность появления события и определяется как отношение числа исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу всех возможных исходов опыта.

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n}=\frac{\left(\textit{благоприятные исходы}\right)}{\left(\textit{все исходы}\right)}.$$

Ее значения находятся в промежутке $\left[0,1\right]$.

Предметом ТВ являются математические модели случайных явлений, т. е. схемы и формулы расчетов вероятностей. Цель и задачи ТВ – осуществление прогноза в отношении случайных явлений, а также по возможности их контроль и ограничение действия случайности.

Задача 7. Опыт – производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания в цель первым орудием равна $P(A_1)=p_1=0{,}9$, вторым орудием – $P(A_2)=p_2=0{,}85$, третьим орудием – $P(A_3)=p_3=0{,}8$.

Найти вероятности:

а) ровно двух попаданий (событие B);

б) более одного попадания (событие C);

в) хотя бы одного попадания (событие D).

Решение

Составим пространство всех возможных событий опыта $\Omega=\left\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2\overline{A}_3; \overline{A}_1A_2\overline{A}_3; \overline{A}_1\overline{A}_2A_3; A_1A_2\overline{A}_3; A_1\overline{A}_2A_3; \overline{A}_1A_2A_3; A_1A_2A_3\right\}$ – все исходы опыта (полная группа попарно-несовместных событий) и сумма вероятностей этих событий равна единице.

Составим алгебру требуемых событий и найдём их вероятности.

Для а). $B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$ – ровно два попадания. Применение теорем, сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий дают

$$P(B)=P\left(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3\right)=P\left(A_1A_2\overline{A}_3\right)+P\left(A_1\overline{A}_2A_3\right)+P\left(\overline{A}_1A_2A_3\right)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P\left(\overline{A}_3\right)+P(A_1)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P(A_3)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=p_1\cdot p_2\cdot q_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3+q_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}15\cdot 0{,}8+$$
$$+0{,}1\cdot 0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}329.$$

Для б). $C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3=B+A_1A_2A_3$ – более одного попадания.

$$P(C)=P\left(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3\right)=P(B)+P\left(A_1A_2A_3\right)=$$
$$=P(B)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=P(B)+p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}329+0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}941.$$

Для в). $D=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$ – хотя бы одно попадание.

$$P(D)=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3+p_1\cdot p_2\cdot q_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3+q_1\cdot p_2\cdot p_3+$$
$$+p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}9\cdot 0{,}15\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}85\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}15\cdot 0{,}8+$$
$$+0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}15\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}85\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}997.$$

Или иначе $P(D)=P(\Omega)-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=1-0{,}1\cdot 0{,}15\cdot 0{,}2=1-0{,}003=0{,}997$.

Задача 8. В партии 10 деталей. Из них 7 стандартные. Найти вероятность того, что среди шести, отобранных наугад, деталей:

а) 3 стандартные (событие A);

б) 4 стандартные (событие B);

в) 5 стандартных (событие C);

г) все 6 стандартные (событие D).

Решение

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{(\textit{благоприятные исходы})}{(\textit{все исходы})}.$$

Общее число исходов n равно числу способов (выборок), которыми можно извлечь 6 из 10. Это число сочетаний из 10 по 6, т. е.

$$n=C_{10}^{6}=\frac{10!}{6!\cdot(10-6)!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

Определим теперь число благоприятных исходов m для указанных случаев.

Для а). Определим число благоприятных исходов m, когда среди 6 взятых деталей оказывается 3 стандартных. Очевидно, что 3 стандартные детали могут быть выбраны из 7 стандартных, имеющихся в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_7^3:

$$C_7^3=\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{3!\cdot 4!}=35.$$

Остальные $6-3=3$ нестандартные детали в выбранной партии должны быть взяты из $10-7=3$ нестандартных деталей, которые имеются в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_3^3:

$$C_3^3=\frac{3!}{3!\cdot(3-3)!}=1.$$

Согласно правилу произведения в комбинаторике число благоприятных шансов m есть

$$m=C_7^3\cdot C_3^3=35\cdot 1=35.$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}.$$

Для б). Определим число благоприятных исходов m, когда среди 6 взятых деталей оказывается 4 стандартных. Очевидно, 4 стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных, имеющихся в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_7^4:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 3!} = 35\,.$$

Остальные $6-4=2$ нестандартные детали в выбранной партии должны быть взяты из $10-7=3$ нестандартных деталей, которые имеются в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_3^2:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3\,.$$

Согласно правилу произведения в комбинаторике число благоприятных шансов m есть

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2 = 35\cdot 3\,.$$

Теперь

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{35\cdot 3}{210} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}\,.$$

Для в). Определим число благоприятных исходов m, когда среди 6 взятых деталей оказывается 5 стандартных. Очевидно, 5 стандартных деталей могут быть выбраны из 7 стандартных, имеющихся в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_7^5:

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 2!} = 21\,.$$

Остальные $6-5=1$ нестандартные детали в выбранной партии должны быть взяты из $10-7=3$ нестандартных деталей, которые имеются в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_3^1:

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} = 3\,.$$

Согласно правилу произведения в комбинаторике число благоприятных шансов m есть

$$m = C_7^5 \cdot C_3^1 = 21\cdot 3 = 63\,.$$

Следовательно

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}\,.$$

Для г). Определим число благоприятных исходов m, когда среди 6 взятых деталей оказываются все 6 стандартные. Очевидно, 6 стандартных деталей могут быть выбраны из 7 стандартных, имеющихся в партии. Число таких выборок равно числу сочетаний C_7^6:

$$C_7^6 = \frac{7!}{6!\cdot(7-6)!} = \frac{6!\cdot 7}{6!\cdot 1!} = 7\,.$$

Других деталей нестандартных в выбранной партии быть не может. Для общности формул можем записать

$$C_3^0 = \frac{3!}{0!\cdot(3-0)!} = \frac{3!}{1\cdot 3!} = 1\,.$$

Теперь

$$m = C_7^6 \cdot C_3^0 = 7\cdot 1 = 7\,.$$

Следовательно,

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}\,.$$

Задача 9. Вероятность появления бракованной детали при производстве равна p. Определить вероятность того, что в партии из n изделий будет:

а) ровно $m-$ бракованных;

б) хотя бы одна бракованная;

в) менее $m-$ бракованных.

Если $n=6, \quad p=0{,}1, \quad m=3$.

Решение

Имеем схему Бернулли с $n=6, \quad p=0{,}1, \quad m=3$. Поскольку n не велико, то расчет выполняем по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Здесь $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по m, $q = 1-p$.

Для а). $P_6(3) = C_6^3 (0{,}1)^3 (0{,}9)^{6-3} = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!}(0{,}1)^3(0{,}9)^{6-3} =$

$$= \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot(0{,}1)^3\cdot(0{,}9)^{6-3} = 0{,}0146.$$

Для б). $P_6(1 \le m \le 6) = \sum\limits_{m=1}^{6} P_6(m) =$

$$= P_6(1)+P_6(2)+P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6) =$$

$$= 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 (0{,}1)^0 (0{,}9)^{6-0} = 1-(0{,}9)^6 = 0{,}47\,.$$

Для в). $P_6(0 \le m \le 2) = \sum\limits_{k=0}^{2} P_6(m) = P_6(0)+P_6(1)+P_6(2) \;=\; 0{,}984\,.$

Задача 10. Найти значение a, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения (таблица 1).

Таблица 1

X	2	3	4	5
P	0,3	a	0,4	0,2

Решение

Поскольку это закон распределения, то $\sum_i p_i = 1$. Следовательно, $a = 0{,}1$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}5\,;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \cdot p_i - \left(M(X)\right)^2 = x_1^{\,2} \cdot p_1 + x_2^{\,2} \cdot p_2 + x_3^{\,2} \cdot p_3 + x_4^{\,2} \cdot p_4 - \left(M(X)\right)^2 =$$

$$= 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}2 - \left(3{,}5\right)^2 = 13{,}5 - 12{,}25 = 1{,}25\,;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}25} \simeq 1{,}12\,.$$

Список литературы

1 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике: учеб. пособие: в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Мн. : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 416 с.

2 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике: учеб. пособие: в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Мн. : Выш. шк., 1993. – Ч. 2. – 301 с.

3 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис пресс, 2009. – 608 с.

4 **Герасимович, А. И.** Математический анализ: справ. пособие: в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Мн. : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 287 с.