

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальности
7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»
заочной формы обучения*



Могилев 2026

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «2» февраля 2026 г.,
протокол № 8

Составитель канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Содержат теоретический и практический материал для проведения аудиторных контрольных работ студентами заочной формы обучения.

Учебное издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2026

Содержание

Введение.....	4
1 Расчет балки на изгиб.....	5
1.1 Основные понятия.....	5
1.2 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов	7
1.3 Расчеты на прочность по нормальным напряжениям	9
1.4 Примеры по выбору поперечных сечений при изгибе балки.....	12
1.5 Варианты заданий к аудиторной контрольной работе № 1.....	17
2 Расчет бетонной колонны на внецентренное сжатие.....	18
2.1 Основные понятия.....	18
2.2 Пример по определению допустимой силы внецентренно сжатой колонны.....	23
2.3 Варианты заданий к аудиторной контрольной работе № 2.....	25
Список литературы.....	26

Введение

Студенты специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» по заочной сокращенной форме обучения изучают дисциплину «Сопротивление материалов» на протяжении 3-го и 4-го семестров.

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента строительных конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Полученные знания и умения будут использованы при изучении курсов строительной механики, оснований и фундаментов, механики грунтов, металлических и железобетонных конструкций.

Методические рекомендации разработаны в соответствии с Положением об аудиторной контрольной работе и компьютерном тестировании, обучающихся по заочной (дистанционной) форме.

Аудиторная контрольная работа (далее – АКР) является формой промежуточного контроля результатов межсессионной самостоятельной работы студентов заочной формы обучения, одним из элементов стимулирования подготовки к экзамену.

АКР организуется и проводится в период лабораторно-экзаменационной сессии в соответствии с расписанием, после проведения лекционных, практических и лабораторных занятий по дисциплине «Сопротивление материалов».

Студенты специальности «Строительство зданий и сооружений» выполняют одну АКР в 3-м семестре («Расчет балки на изгиб») и одну АКР в 4-м семестре («Расчет бетонной колонны на внецентренное сжатие»).

Общая продолжительность АКР для учебной группы составляет 2 академических часа в каждом семестре.

АКР выполняется на бланках установленного образца. Перед решением задачи записываются исходные данные. Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Решение сопровождается краткими пояснениями. Чертежи и схемы выполняются в удобном масштабе, карандашом, с использованием чертежного инструмента.

К выполнению АКР допускаются студенты заочной формы обучения, имеющие при себе зачетную книжку, удостоверение личности (паспорт либо вид на жительство, удостоверение беженца).

Перед АКР студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–10], разобрать решение приведенных типовых примеров.

1 Расчет балки на изгиб

1.1 Основные понятия

Изгибом называют такой вид деформации, при котором продольная ось бруса искривляется, а поперечные сечения взаимно поворачиваются.

Продольная ось – это линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений бруса. Она может быть прямолинейной или криволинейной.

Поперечное сечение получается в результате рассечения бруса плоскостью, перпендикулярной его оси. Различают брусья постоянного и переменного поперечного сечения.

Для того чтобы получился изгиб, внешние нагрузки (силы и моменты) должны действовать перпендикулярно к оси бруса. Плоскость, в которой действуют нагрузки, называется *силовой плоскостью*.

На практике чаще всего используются прямые брусья постоянного поперечного сечения, имеющие одну или две плоскости симметрии. Эти плоскости являются *главными центральными плоскостями инерции*.

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью инерции бруса, то такой изгиб называют *прямым* (рисунок 1.1, а). Если силовая плоскость не совпадает с главной плоскостью инерции бруса (рисунок 1.1, б) или нагрузки лежат в разных плоскостях, то такой изгиб называют *косым*.

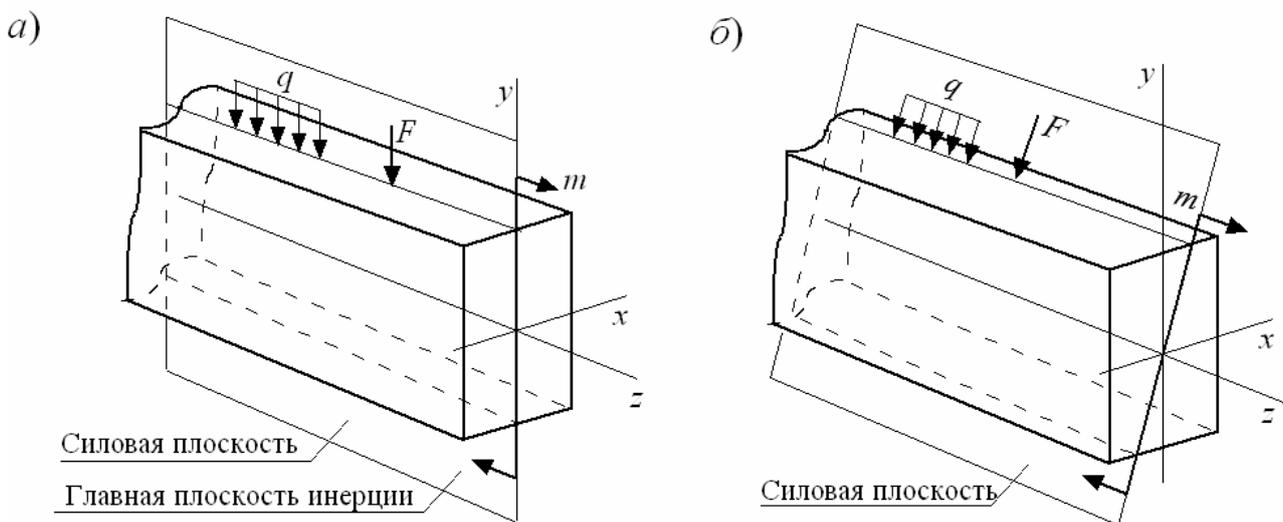


Рисунок 1.1 – Виды изгибов

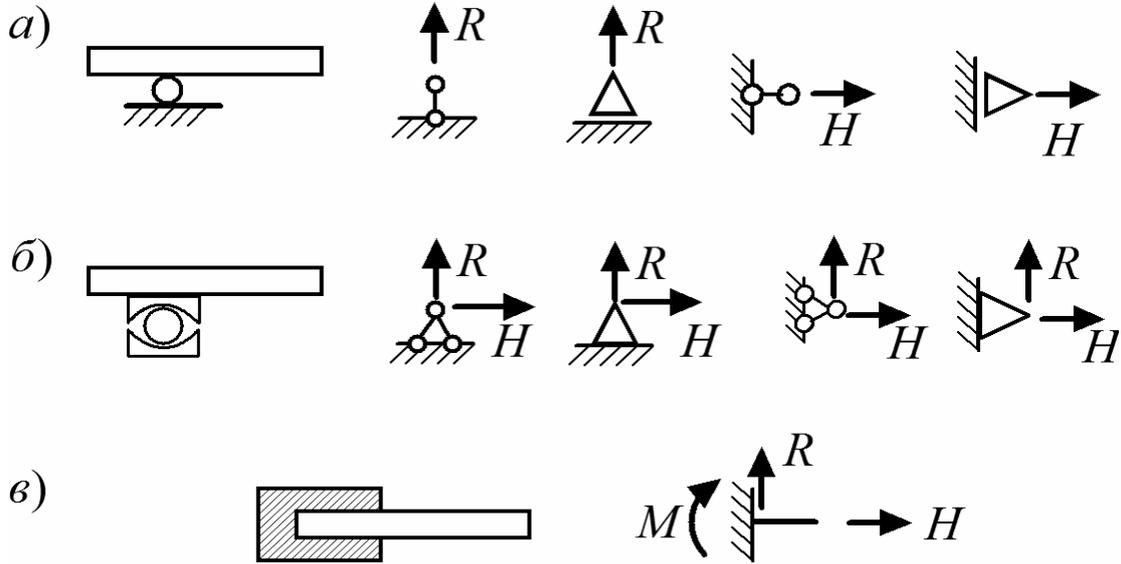
В ответ на внешнее воздействие в материале бруса возникают внутренние усилия или *внутренние силовые факторы*: поперечные силы $Q_x(Q_y)$ и изгибающие моменты $M_x(M_y)$.

Если в поперечных сечениях бруса действует только изгибающий момент, то такой изгиб называется *чистым*. Если в поперечных сечениях возникают изгибающий момент M и поперечная сила Q , то такой момент называется *поперечным*.

В аудиторной контрольной работе будет рассматриваться прямой попереч-

ный изгиб прямолинейного бруса постоянного поперечного сечения.

Брусья, работающие на изгиб, называют *балками*. Опоры соединяют балку с основанием. Возникающие в опорах реакции уравнивают систему внешних сил и моментов, благодаря чему балка находится в статическом равновесии. На рисунке 1.2 показаны три основных типа опор.



a – шарнирно-подвижная опора; *б* – шарнирно-неподвижная опора; *в* – заделка

Рисунок 1.2 – Виды опорных закреплений

Шарнирно-подвижная опора (см. рисунок 1.2, *a*) препятствует перемещению закрепленного сечения в направлении единственной связи, поэтому на такой опоре возникает только одна реакция R .

Шарнирно-неподвижная опора (см. рисунок 1.2, *б*) исключает вертикальное и горизонтальное смещения опорного сечения (две связи), поэтому на такой опоре возникают две реактивные силы: R и H .

Жесткая заделка (защемление) (см. рисунок 1.2, *в*) не допускает линейных и угловых перемещений закрепленного сечения. В данной опоре возникают три реакции: вертикальная сила R , горизонтальная сила H и опорный момент M (три связи).

В статически определимых балках величина опорных реакций определяется из уравнений статического равновесия. Для плоской системы сил можно составить три независимых уравнения в разных вариантах, например, для балки с шарнирными опорами A и B

$$\sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0. \quad (1.1)$$

В статически неопределимых балках количество неизвестных реакций больше трех, поэтому для их решения дополнительно составляются деформационные уравнения.

1.2 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Для их определения применяют *метод сечений*.

По искомому сечению мысленно разрезают балку и рассматривают равновесие одной из ее частей. Для упрощения решения следует рассматривать равновесие части балки с менее сложной нагрузкой с учетом реакций на опорах. Например, на рисунке 1.3, а показана балка, в которой нужно определить внутренние усилия Q и M в сечении C . Рассмотрим левую и правую отсеченную часть балки.

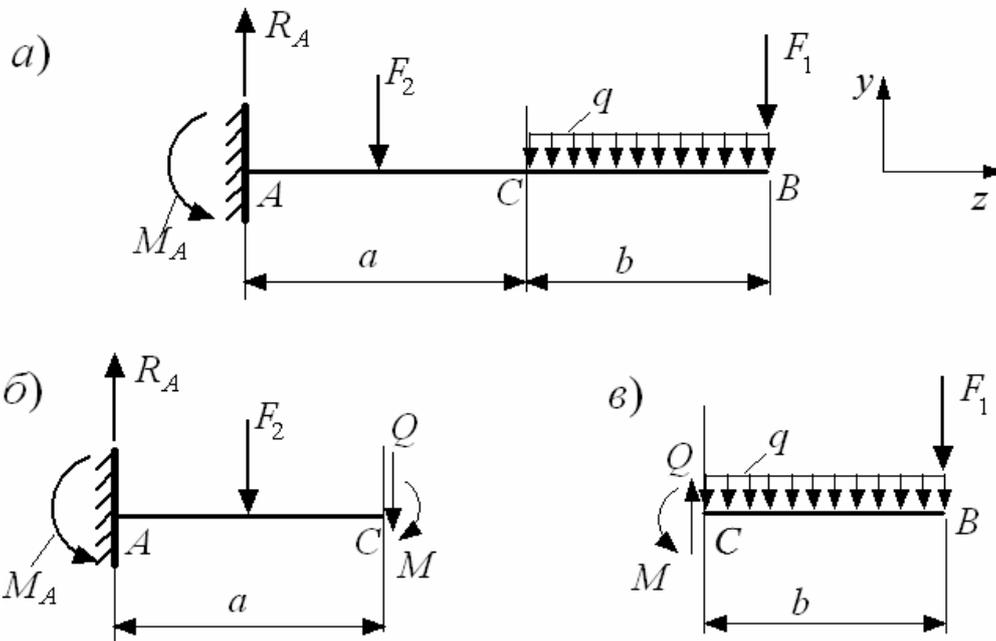


Рисунок 1.3 – Метод сечений

Левая часть балки (см. рисунок 1.3, б) сложнее в расчетах, т. к. предварительно требуется определить реакции на опорах. Поэтому для определения Q и M составляем уравнения статики для правой части балки (см. рисунок 1.3, в):

$$\sum Y = Q - q \cdot b - F_1 = 0; \quad Q = q \cdot b + F_1;$$

$$\sum M_C = -M + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + F_1 \cdot b = 0; \quad M = q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + F_1 \cdot b.$$

Поперечная сила Q численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил и реакций, действующих по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную к продольной оси бруса.

Изгибающий момент M численно равен алгебраической сумме моментов, изгибающих балку по одну сторону от искомого сечения, относительно этого сечения.

Для того чтобы определить опасные сечения на балке строят эпюры внутренних силовых факторов Q и M . Эпюра – это график, который показывает как меняется та или иная величина вдоль оси бруса.

При построении эпюр следует учитывать *правила знаков* (рисунок 1.4).

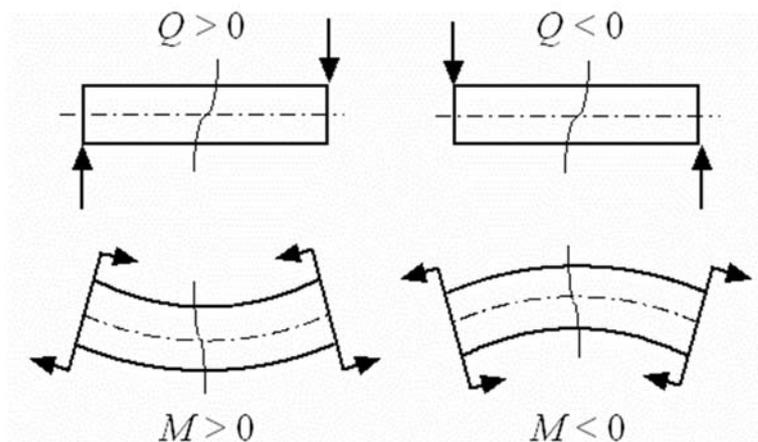


Рисунок 1.4 – Правило знаков для Q и M

Поперечная сила Q считается положительной, если она поворачивает отсеченный элемент балки по часовой стрелке, и отрицательной – если поворачивает отсеченный элемент балки против часовой стрелки.

Изгибающий момент считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз, вызывая растяжение нижних волокон, и отрицательным, если изгибает балку выпуклостью вверх, вызывая растяжение верхних волокон.

Порядок построения эпюр.

1 Составить расчетную схему с указанием действующих нагрузок; если требуется – определить реакции на опорах.

2 Провести нулевые оси для Q и M параллельно оси бруса.

3 Разбить балку на участки по характерным сечениям, которыми являются места приложения сосредоточенных сил и моментов, начало и конец действия распределенной по длине силы.

4 Указать номера участков и направление отсчета координаты z или обозначить буквами характерные сечения (для расчета по характерным точкам).

5 Применяя метод сечений и соответствующее правило знаков, определить величину Q и M на границах каждого участка (ординаты эпюр).

6 Отложить ординаты эпюр перпендикулярно нулевой линии в выбранном масштабе.

7 Оформить эпюру: соединить все ординаты линиями, замыкая поле эпюры, на котором выставить в кружке знаки (плюс или минус), нанести равномерную штриховку перпендикулярно нулевой оси.

8 Определить экстремальные значения для изгибающих моментов, если таковые имеются.

9 Провести проверку правильности построения эпюр.

При оформлении эпюр следует учитывать, что на эпюре Q положительные значения откладываются вверх от нулевой линии, отрицательные значения –

вниз. Эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т. е. положительные значения откладываются вниз (см. рисунок 1.4).

Характер изменения внутренних усилий в балке связан с дифференциальными зависимостями, которые связывают величины q , Q и M :

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (1.2)$$

Из дифференциальных зависимостей вытекают общие выводы о характере эпюр, позволяющие делать проверку правильности их построения.

1 На участке, где отсутствует распределенная нагрузка интенсивностью q , эпюра Q имеет постоянную величину (не меняется), а эпюра M меняется по линейной зависимости. Если эпюра Q на всем участке равна нулю, то эпюра M – постоянна по величине.

2 На участках, нагруженных распределенной нагрузкой постоянной интенсивности q , эпюра Q меняется по линейному закону, эпюра M – по квадратичной параболе. Выпуклость параболы совпадает с направлением распределенной нагрузки, т. е. «собирает» в себя распределенную нагрузку (*правило чашечки*). Если на участке линия эпюры Q пересекает нулевую ось, меняя свой знак, то в точке пересечения на эпюре M будет экстремальное значение. Условие экстремума

$$\frac{dM}{dz} = Q = 0. \quad (1.3)$$

3 На участках, имеющих положительную Q , при движении слева направо, изгибающий момент M алгебраически возрастает, а имеющих отрицательную Q – алгебраически убывает.

4 В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q ордината скачкообразно меняется на величину приложенной силы, а на эпюре M наблюдается перелом линии эпюры.

5 В сечении, где приложен внешний изгибающий момент, на эпюре M ордината скачкообразно меняется на величину приложенного момента, а на эпюре Q никаких возмущений не будет.

1.3 Расчеты на прочность по нормальным напряжениям

При прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные σ и касательные τ напряжения. В большинстве случаев основное значение при оценке прочности балки имеют нормальные напряжения.

При расчете на прочность строительных конструкций применяется *метод расчета по предельным состояниям*, согласно которому нормальные напряжения в опасном сечении не должны превышать *расчетного сопротивления* R :

$$\sigma_{\max} \leq R \cdot \gamma_c, \quad (1.4)$$

где γ_c – коэффициент условий работы (при нормальных условиях работы $\gamma_c = 1$).

Значения R и γ_c для различных материалов приведены в справочной литературе по строительным конструкциям.

Опасное сечение при изгибе балок связано с действием максимального изгибающего момента M_{\max} , который определяется по эпюре M . *Условие прочности по нормальным напряжениям* в стальных балках постоянного симметричного поперечного сечения имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c, \quad (1.5)$$

где W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки.

Из условия прочности (1.5) возможны виды расчетов балки:

- проверочный;
- проектировочный (подбор сечения);
- определение несущей способности (грузоподъемности).

В аудиторной контрольной работе требуется сделать проектировочный расчет, т. е. определить осевой момент сопротивления W_x :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c}. \quad (1.6)$$

Выбор размеров сортаментных профилей проката (двутавры, швеллеры, уголки) производится по соответствующим стандартам.

В таблице 1.1 показаны данные ГОСТ 8239–89 *Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент черных металлов. Сортовой и фасонный прокат*.

Допускается 5-процентное превышение расчетного сопротивления R . Относительное перенапряжение рассчитывается по формуле

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - R\gamma_c}{R\gamma_c} \cdot 100 \% \leq 5 \%. \quad (1.7)$$

Все расчеты должны вестись в единицах СИ (ньютонах (Н), метрах (м), паскалях (Па)).

Таблица 1.1 – Двутавры стальные горячекатаные

Но- мер дву- тавра	Размер				Площадь попереч- ного сечения A , см ²	Справочная величина для оси						
	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм		$x-x$				$y-y$		
						I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Примечание – h – высота двутавра; b – ширина полки; d – толщина стенки; t – средняя толщина полки; I – момент инерции; W – момент сопротивления; S – статический момент полусечения; i – радиус инерции

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называют чистым изгибом?
- 2 Какой вид нагружения называют поперечным изгибом?
- 3 Какие внутренние силовые факторы возникают при поперечном изгибе бруса? Какие напряжения они вызывают?
- 4 Какие формулы используются для определения напряжений?
- 5 Какие геометрические характеристики сечений используются при расчете балки на изгиб?
- 6 По какому закону распределяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения?
- 7 По какому закону распределяются касательные напряжения по высоте поперечного сечения?

8 Какое сечение балки считается опасным для проверки прочности балки по нормальным напряжениям?

9 Какое сечение балки считается опасным для проверки прочности балки по касательным напряжениям?

10 Какие поперечные сечения наиболее рациональны при изгибе?

11 Какие виды расчетов производят из условия прочности?

1.4 Примеры по выбору поперечных сечений при изгибе балки

Пример 1 – Для балки, изображенной на рисунке 1.5, построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M , подобрать двутавровое поперечное сечение из условия прочности по нормальным напряжениям. Расчетное сопротивление $R = 160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $\gamma_c = 1$.

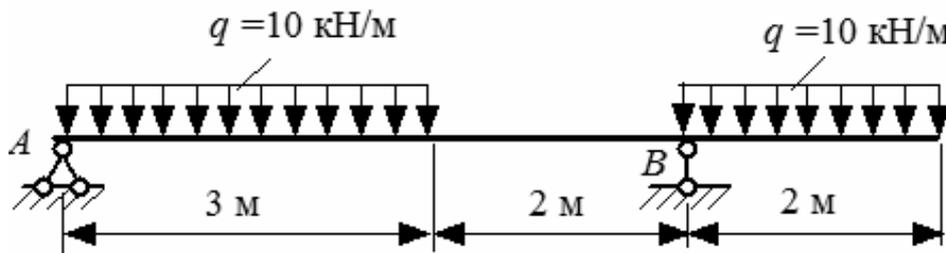


Рисунок 1.5 – Расчетная схема балки для примера 1

Решение

Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 2 \cdot 6}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 \cdot 6}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 3 \cdot 3,5 - q \cdot 2 \cdot 1}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3,5 - 10 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 17 \text{ кН}.$$

Выполним проверку правильности расчета реакций:

$$\sum Y = R_A - q \cdot 3 + R_B - q \cdot 2 = 17 - 10 \cdot 3 + 33 - 10 \cdot 2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, выразив внутренние усилия через координату z (рисунок 1.6).

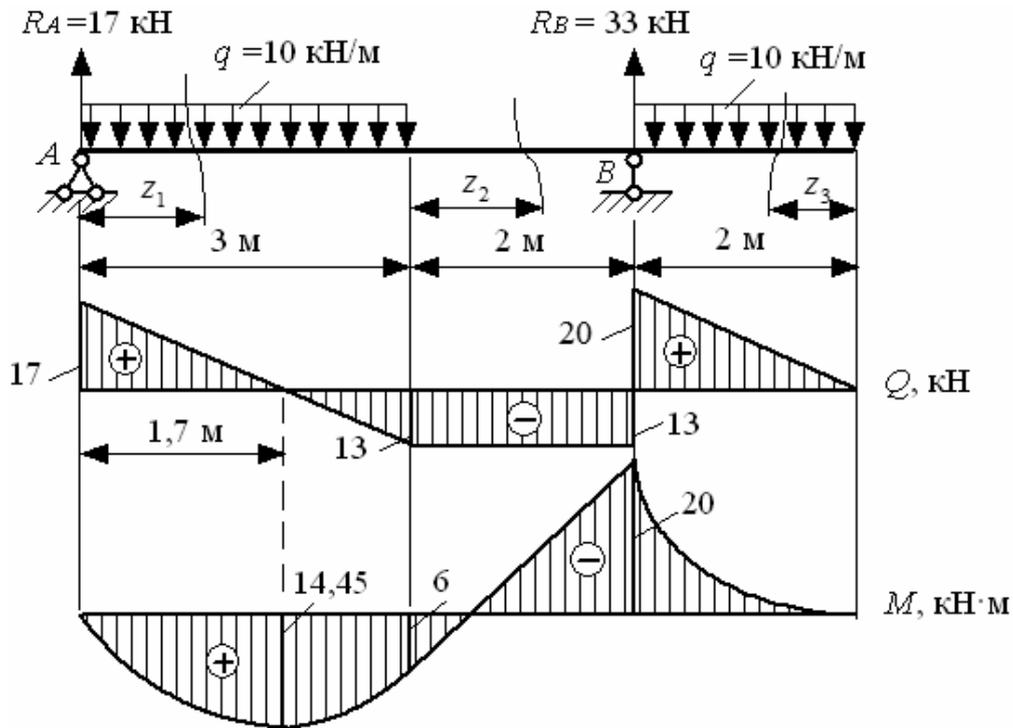


Рисунок 1.6 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Участок I (часть балки, расположенная левее от сечения): $0 \leq z_1 \leq 3$ м.

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1 \text{ (линейная зависимость);}$$

$$M = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2 \text{ (квадратная парабола);}$$

$$z_1 = 0; \quad Q = 17 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; \quad Q = -13 \text{ кН}; \quad M = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На этом участке эпюра поперечных сил пересекает нулевую линию, меняя свой знак. Следовательно, в точке пересечения на эпюре изгибающих моментов будет экстремальное значение. Определим, на каком расстоянии от опоры A находится экстремум. Для этого приравняем функцию силы к нулю:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0; \quad z_1 = 1,7 \text{ м}.$$

Подставим полученное значение в функцию момента:

$$M_{\text{экстр}} = 17 \cdot 1,7 - 5 \cdot 1,7^2 = 14,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II (производим расчет слева направо): $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН (постоянное значение);}$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2) = \\ = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2) \quad (\text{линейная зависимость});$$

$$z_2 = 0; \quad M = 17 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; \quad M = 17 \cdot 5 - 30 \cdot 3,5 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III (производим расчет справа налево): $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$.

$$Q = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3 \quad (\text{линейная зависимость});$$

$$M = -0,5 \cdot q \cdot z_3^2 = -5 \cdot z_3^2 \quad (\text{квадратная парабола});$$

$$z_3 = 0; \quad Q = 0; \quad M = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; \quad Q = 20 \text{ кН}; \quad M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По эпюре изгибающих моментов установим опасное сечение, в котором действует $M_{\max} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} = 20 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определим расчетное значение осевого момента сопротивления из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$W_x^{\text{расч}} = \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6 \cdot 1} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239–89 (см. таблицу 1.1) могут быть выбраны двутавр № 18 ($W_x = 143 \text{ см}^3$) или двутавр № 16 ($W_x = 109 \text{ см}^3$). В целях уменьшения материалоемкости следует выбирать более легкую конструкцию при условии допустимого 5-процентного превышения расчетного сопротивления. Определим перенапряжение двутавра № 16:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{20 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 183,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 183,5 \text{ МПа};$$

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - R\gamma_c}{R\gamma_c} \cdot 100 \% = \frac{183,5 - 160}{160} \cdot 100 \% = 14,7 \% > 5 \%.$$

Перенапряжение составило более 5 %, поэтому окончательно выбираем двутавр № 18 ($W_x = 143 \text{ см}^3$).

Пример 2 – Для балки, изображенной на рисунке 1.7, построить эпюру изгибающих моментов M , подобрать квадратное поперечное сечение из условия прочности по нормальным напряжениям. Расчетное сопротивление $R = 180 \text{ МПа}$; $\gamma_c = 1$.

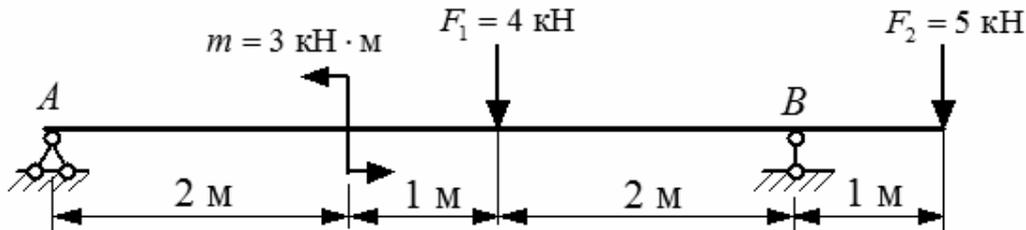


Рисунок 1.7 – Расчетная схема балки для примера 2

Решение

Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = m - F_1 \cdot 3 + R_B \cdot 5 - F_2 \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6 - m}{5} = \frac{(4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 3)}{5} = 7,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = m + F_1 \cdot 2 - R_A \cdot 5 - F_2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 1 + m}{5} = \frac{(4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 3)}{5} = 1,2 \text{ кН}.$$

Выполним проверку правильности расчета реакций:

$$\sum Y = R_A - F_1 + R_B - F_2 = 1,2 - 4 + 7,8 - 5 = 0.$$

К заданной балке не приложена распределенная нагрузка, следовательно, на эпюре изгибающих моментов нет участков с параболой, на которой мог быть экстремум. Для определения опасного сечения достаточно показать только эпюру изгибающих моментов.

Зная заранее, что на всех участках эпюра M очерчена прямыми линиями, определим ординаты эпюры на границах участков без введения аргумента z . Такой метод называется *расчет по характерным точкам*.

Обозначим буквами все характерные точки (рисунок 1.8). Отметим, что только в точке C ордината эпюры M будет меняться скачкообразно (на величину приложенного момента m). В остальных точках будут изломы (изменение направления линии эпюры).

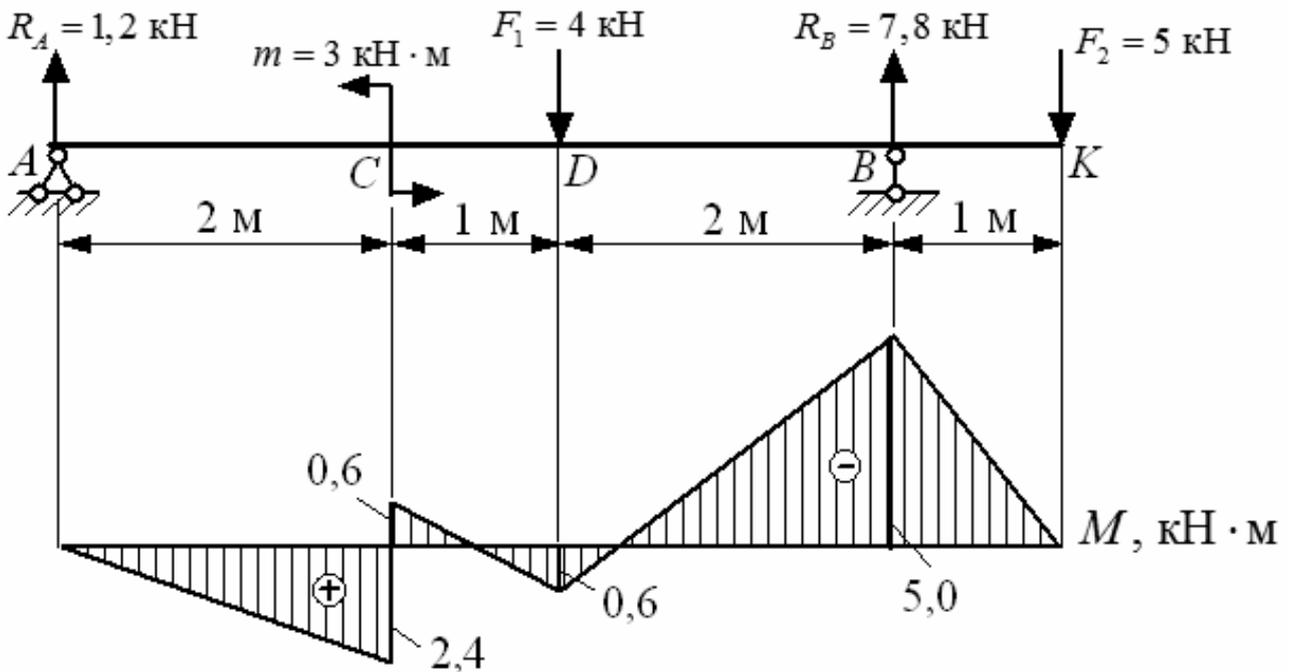


Рисунок 1.8 – Эпюра изгибающих моментов

Участок AC (производим расчет слева):

$$M_A = 0; \quad M_C = R_A \cdot 2 = 1,2 \cdot 2 = 2,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD (производим расчет слева):

$$M_C = R_A \cdot 2 - m = 1,2 \cdot 2 - 3 = -0,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = R_A \cdot 3 - m = 1,2 \cdot 3 - 3 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DB (производим расчет слева):

$$M_D = R_A \cdot 3 - m = 1,2 \cdot 3 - 3 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = R_A \cdot 5 - m - F_1 \cdot 2 = 1,2 \cdot 5 - 3 - 4 \cdot 2 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок KB (производим расчет справа):

$$M_K = 0; \quad M_B = -F_2 \cdot 1 = -5 \cdot 1 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательные ординаты на эпюре M откладываем вверх, положительные ординаты – вниз. В опасном сечении действует $M_{\max} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Определим расчетное значение осевого момента сопротивления из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R \cdot \gamma_c;$$

$$W_x^{\text{расч}} = \frac{M_{\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{5 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6 \cdot 1} = 27,78 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 27,78 \text{ см}^3.$$

Для квадратного поперечного сечения осевой момент сопротивления определяется по формуле

$$W_x = \frac{b^3}{6} = 27,78 \text{ см}^3.$$

Минимальные размеры стороны квадрата

$$b = \sqrt[3]{6 \cdot 27,78} = 5,5 \text{ см}.$$

1.5 Варианты заданий к аудиторной контрольной работе № 1

Для стальной балки (рисунок 1.9) требуется:

- определить реакции на опорах;
- построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M ;
- найти опасное сечение;
- определить расчетное значение осевого момента сопротивления из условия прочности по нормальным напряжениям;
- подобрать двутавровое поперечное сечение при заданном $R\gamma_c$.

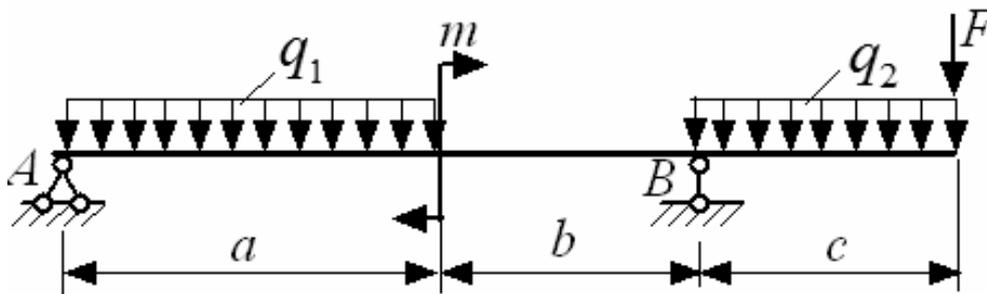


Рисунок 1.9 – Расчетная схема балки для АКР

Исходные данные выбрать из таблицы 1.2 по номеру зачетной книжки.

Таблица 1.2 – Исходные данные для АКР № 1

Номер строки	a , м	b , м	c , м	m , кН·м	F , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	$R_{\gamma c}$, МПа
0	3,0	2,0	1,0	10	–	–	10	160
1	3,2	2,1	1,1	11	10	10	–	180
2	3,4	2,2	1,2	12	–	–	12	200
3	3,6	2,3	1,3	13	8	20	–	150
4	3,8	2,4	1,4	14	–	–	14	170
5	2,0	2,5	1,5	15	6	30	–	190
6	2,2	2,6	1,6	6	–	–	16	160
7	2,4	2,7	1,7	7	12	40	–	180
8	2,6	2,8	1,8	8	–	–	18	200
9	2,8	2,9	1,9	9	14	50	–	190
	а	б	в	а	б	в	в	в

Примечание – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Например, для номера 017635
0 1 7 6 3 5
а б в
вариант балки по рисунку 1.9 имеет длины участков: $a = 2,2$ м; $b = 2,3$ м; $c = 1,5$ м. Балка нагружена моментом $m = 6$ кН·м; силой $F = 8$ кН; распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 30$ кН/м. Распределенная нагрузка интенсивностью q_2 отсутствует. Расчетное сопротивление $R_{\gamma c} = 190$ МПа

2 Расчет бетонной колонны на внецентренное сжатие

2.1 Основные понятия

Внецентренным растяжением или сжатием называется вид нагружения бруса, при котором равнодействующая внешних продольных сил смещена относительно центра тяжести его поперечного сечения.

Такой вид нагружения испытывают, например, опорные колонны зданий (рисунок 2.1).

При внецентренном приложении силы F в поперечном сечении бруса действуют внутренние силовые факторы: продольная сила N и изгибающие моменты M_x , M_y , от которых возникают нормальные напряжения.

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y},$$

или после преобразований

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right), \quad (2.1)$$

где A – площадь поперечного сечения;

I_x, I_y – осевые моменты инерции поперечного сечения относительно собственных центральных осей;

i_x^2, i_y^2 – квадраты радиусов инерции поперечного сечения;

x_F, y_F – координаты точки приложения силы в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения;

x, y – координаты искомой точки в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения.

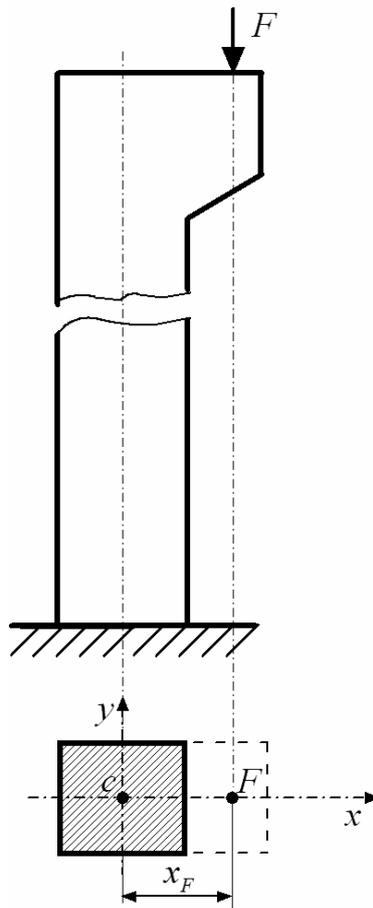


Рисунок 2.1 – Опорная колонна здания

Все координаты берутся со своими знаками в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения. Если поперечное сечение симметричное, главными центральными осями инерции являются оси симметрии, на пересечении которых располагается центр тяжести сечения.

Знак перед формулой (2.1) зависит от того, какая сила приложена: если растягивающая – то ставится знак (+), если сжимающая – то ставится знак (–).

Нормальные напряжения в поперечном сечении при внецентренном растяжении-сжатии бруса изменяются по линейному закону. Наибольшие нор-

мальные напряжения действуют в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (рисунок 2.2).

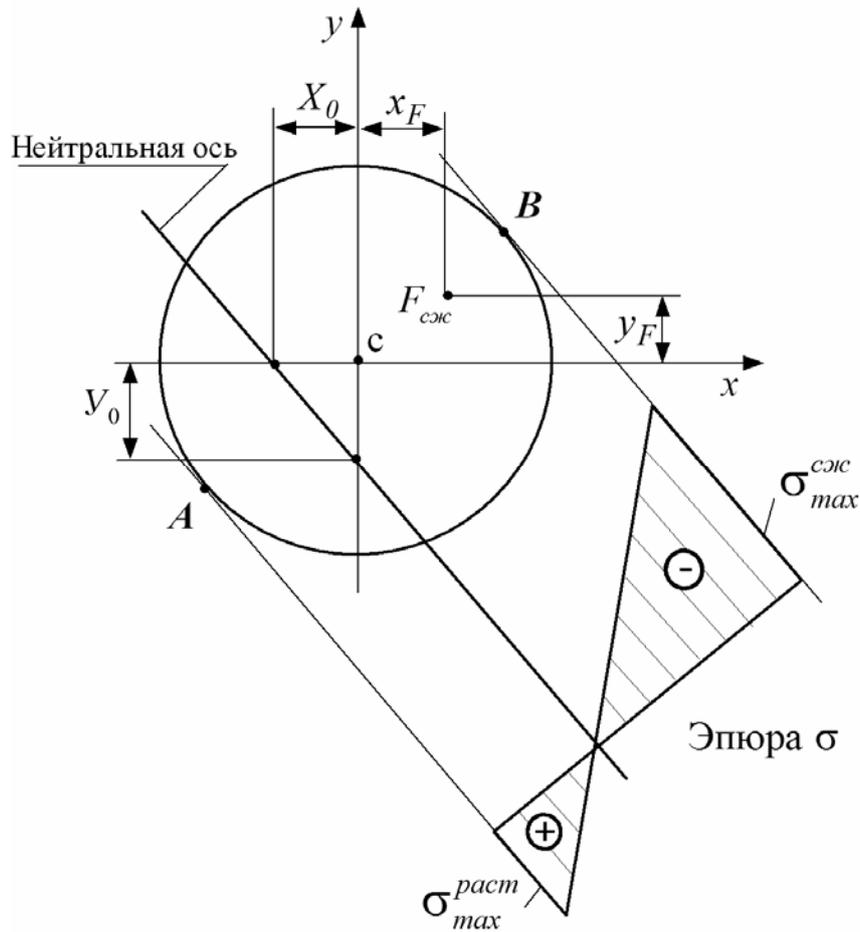


Рисунок 2.2 – Круглое поперечное сечение колонны и эпюра нормальных напряжений

Точное положение нейтральной оси определяется величиной отрезков, которые она отсекает на главных центральных осях инерции сечения: X_0 и Y_0 (см. рисунок 2.2):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (2.2)$$

Квадраты радиусов инерции определяются по формулам

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}. \quad (2.3)$$

В результате нейтральная ось всегда проходит за центром тяжести поперечного сечения напротив силы F .

Из формул (2.2) следует:

– положение нейтральной оси зависит только от геометрических параметров поперечного сечения и координат точки приложения силы;

-- чем дальше приложена сила от центра тяжести поперечного сечения, тем ближе к нему будет проходить нейтральная ось;

– нейтральная ось при внецентренном растяжении-сжатии всегда располагается за центром тяжести напротив силы;

– нейтральная ось может пересекать поперечное сечение или находиться за его пределами.

Если нейтральная ось пересекает поперечное сечение, то она делит его на сжатую и растянутую область (см. рисунок 2.2).

Если нейтральная ось не пересекает поперечное сечение, то брус испытывает только растяжение или сжатие в зависимости от приложенной силы.

Все виды расчетов (проверочный, проектировочный и определение допустимой нагрузки) ведутся из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_{on}}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_{on}}{i_x^2} \right) \leq R \cdot \gamma_c, \quad (2.4)$$

где x_{on}, y_{on} – координаты опасной точки в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения (на рисунке 2.2 это точки A и B);

R – расчетное сопротивление материала, МПа;

γ_c – коэффициент условий работы.

При нормальных условиях работы $\gamma_c = 1$.

Если материал по разному сопротивляется растяжению и сжатию (например, у бетона $R_{раст} < R_{сж}$), то следует выполнять отдельно два расчета: для опасной точки в растянутой области и опасной точки в сжатой области.

В аудиторной контрольной работе требуется определить допустимую сжимающую силу для бетонной колонны коробчатого поперечного сечения с использованием данных таблицы 2.1.

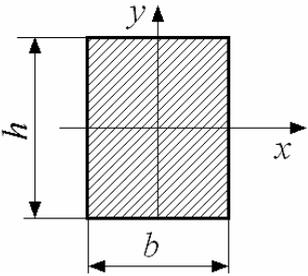
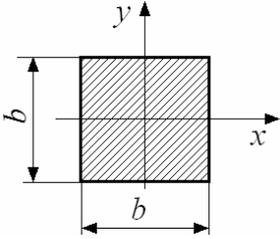
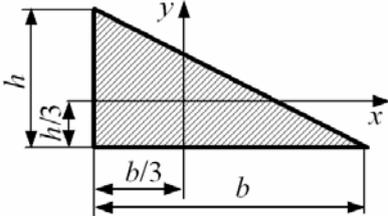
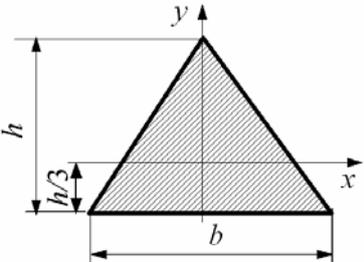
Сложное сечение следует разбить на простые фигуры. Площадь всего сечения и осевые моменты инерции определяются алгебраическим суммированием указанных геометрических характеристик каждой простой фигуры.

Если в фигуре I вырезано отверстие II, причем собственные центральные оси каждой фигуры совпадают с центральными осями всего сечения, то площадь и осевые моменты инерции будут равны:

$$A = A^I - A^{II}; \quad I_x = I_x^I - I_x^{II}; \quad I_y = I_y^I - I_y^{II}.$$

В аудиторной контрольной работе требуется определить допустимую нагрузку (внецентренно приложенную сжимающую силу).

Таблица 2.1 – Геометрические характеристики прямоугольного поперечного сечения

Сечение	Площадь сечения A , м ²	Осевые моменты инерции I_x, I_y , м ⁴
	bh	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$
	$\frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{hb^3}{36}$
	$\frac{bh}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{hb^3}{48} = I_{сум}$

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называют внецентренным растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном растяжении-сжатии?
- 3 По какой формуле определяются нормальные напряжения?
- 4 Какие геометрические характеристики сечений используются при расчете балки на внецентренное растяжение-сжатие?
- 5 По какому закону распределяются нормальные напряжения в поперечном сечении?
- 6 Как проходит нейтральная ось?
- 7 Как будет нагружена колонна, если нейтральная ось пересекает поперечное сечение?

8 Как будет нагружена колонна, если нейтральная ось не пересекает поперечное сечение?

9 Как определяются опасные точки в поперечном сечении?

10 Какие виды расчетов производят из условия прочности?

2.2 Пример по определению допустимой силы внецентренно сжатой колонны

Пример – Определить допустимую сжимающую силу $[F]$ для бетонной колонны коробчатого поперечного сечения (рисунок 2.3), если расчетное сопротивление материала $R_{раст} = 0,4$ МПа, $R_{сж} = 5,0$ МПа, $\gamma_c = 1$.

Размеры на рисунке 2.3 показаны в миллиметрах.

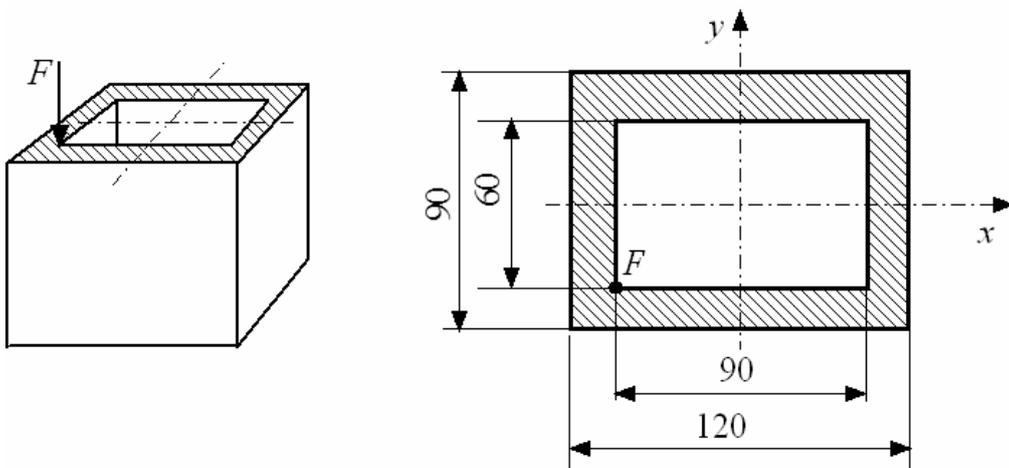


Рисунок 2.3 – Бетонная колонна

Решение

Площадь поперечного сечения $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931,5}{54} = 17,25 \text{ см}^2.$$

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат:

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17,25}{-4,5} = 3,8 \text{ см};$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,5}{-3} = 3,5 \text{ см.}$$

Через две точки пересечения проводим нейтральную ось, на которой напряжения равны нулю. Нейтральная ось разделила колонну на две части (рисунок 2.4). Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси: в сжатой области – точка B , в растянутой области – точка A . На рисунке размеры колонны даны в миллиметрах.

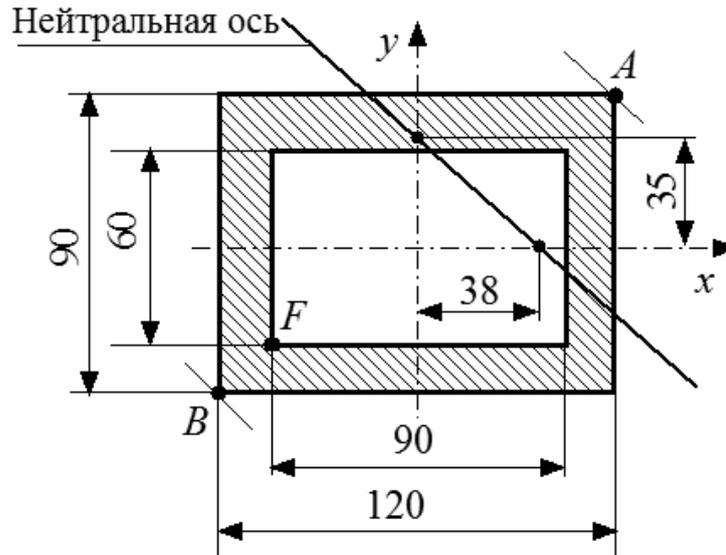


Рисунок 2.4 – Положение нейтральной оси и опасных точек

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = -4,5$ см; $y_F = -3$ см.

Для *растянутой области* составим условие прочности в опасной точке A с координатами $x_A = 6$ см и $y_A = 4,5$ см:

$$\sigma_{\max}^{раст} = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \leq R_{раст};$$

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot 6}{17,25} + \frac{(-3) \cdot 4,5}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot (-1,85)}{A} \leq R_{раст} = 0,4 \text{ МПа.}$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot R_{раст}}{1,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4 \cdot 10^6}{1,85} = 1,17 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1,17 \text{ кН.}$$

Для *сжатой области* составим условие прочности в опасной точке B с координатами $x_B = -6$ см и $y_B = -4,5$ см:

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} \right) \leq R_{\text{сж}},$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot (-6)}{17,25} + \frac{(-3) \cdot (-4,5)}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot 3,85}{A} \leq R_{\text{сж}} = -5 \text{ МПа.}$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot R_{\text{сж}}}{3,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^6}{3,85} = 7,01 \cdot 10^3 \text{ Н} = 7,01 \text{ кН.}$$

Из двух полученных значений требуется выбрать такую силу в качестве окончательного ответа, при которой будут выполняться оба условия прочности: на растяжение и сжатие.

Допустимой силой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил:

$$[F] = 1,17 \text{ кН.}$$

2.3 Варианты заданий к аудиторной контрольной работе № 2

Для бетонной колонны (рисунок 2.5) требуется:

- определить площадь, осевые моменты инерции, квадраты радиусов инерции;
- положение нейтральной оси по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат;
- определить координаты опасных точек;
- составить условия прочности для растянутой и сжатой областей при заданном расчетном сопротивлении и $\gamma_c = 1$;
- определить допустимую сжимающую силу $[F]$ для заданной точки ее приложения.

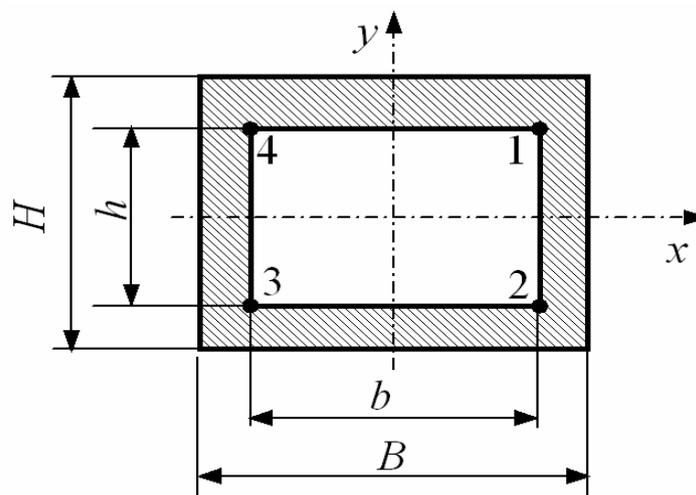


Рисунок 2.5 – Бетонная колонна

Исходные данные выбрать из таблицы 2.2 по номеру зачетной книжки.

Таблица 2.2 – Исходные данные для АКР № 2

Номер строки	Класс бетона	$R_{сж} (R_b)$, МПа	$R_{расч} (R_{bt})$, МПа	B , мм	b , мм	H , мм	h , мм	Точка приложения силы F
0	C8/10	6,0	0,56	300	100	400	200	1
1	C10/12,5	7,5	0,66	310	110	410	210	2
2	C12/15	8,5	0,75	320	120	420	220	3
3	C16/20	11,5	0,90	330	130	430	230	4
4	C18/22,5	12,5	1,00	340	140	440	240	1
5	C20/25	14,5	1,05	350	150	450	250	2
6	C22/27,5	15,5	1,10	360	160	460	260	3
7	C25/30	17,0	1,15	370	170	470	270	4
8	C28/35	19,5	1,30	380	180	480	280	1
9	C32/40	22,0	1,40	390	190	490	290	2
	а	а	а	б	б	в	в	в

Примечание – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Например, для номера 017635
1 0 0 1 7 6 3 5
а б в
вариант колонны по рисунку 2.5 имеет размеры: $B = 330$ мм; $b = 130$ мм; $H = 450$ мм; $h = 250$ мм. Колонна выполнена из бетона марки C22/27,5 с характеристиками $R_{сж} = 15,5$ МПа, $R_{расч} = 1,10$ МПа. Точка приложения силы $F - 2$

Список литературы

- 1 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – М. : Юрайт, 2016. – 413 с.
- 2 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Альянс, 2018. – 624 с.
- 3 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебник / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2000. – 560 с.
- 4 **Копнов, В. А.** Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчётно-графических работ : учеб. пособие / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. – М. : Высш. шк., 2003. – 351 с.
- 5 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Дельта, 2008. – 816 с.

6 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Мн. : Выш. шк., 2007. – 797 с.

7 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов : учеб. пособие / В. Н. Скопинский. – М. : МГИУ, 2007. – 240 с.

8 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учебник / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

9 **Валишвили, Н. В.** Сопротивление материалов и конструкций : учебник / Н. В. Валишвили, С. С. Гаврюшин. – М. : Юрайт, 2022. – 530 с.

10 Сопротивление материалов в вопросах-ответах и сборник задач для самостоятельной работы с примерами их решений : учеб. пособие / А. Г. Схиртладзе, В. В. Волков, В. С. Николаев [и др.]. – 3-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 324 с.