Многоточечная задача управления с интегральными ограничениями типа равенств на управление

В. Н. Лаптинский
Могилев, Белорусско-Российский университет
e-mail: lavani@tut.by

Исследуется задача типа [1] построения возможных управлений $u \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R}^r)$ и соответствующих функций состояний $x \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_s) = x_s, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l} \chi_l(\tau)u(\tau)d\tau = \rho_l, \tag{3}$$

где $A \in \mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $Q \in \mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times r}\right)$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\rho_l \in \mathbb{R}^{k_l}$, $\chi_l \in \mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^{k_l\times r}\right)$, $\alpha_l,\ \beta_l \in I = [0,\omega]$, $l = \overline{1,p}$, $s = \overline{0,m}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le \omega$; $\omega > 0$.

Соотношения (1), (2) рассматривались в [1] и др.; (3) представляет собой ограничения на управления, аналогичные соответствующим изопериметрическим интегральным ограничениям [1] на фазовые переменные. Класс изопериметрических задач играет большую роль как в технике, технологиях, так и в экономике [2], при этом условия (2), (3) имеют существенное значение, например, для управления движением летательных аппаратов, процессами в химических реакторах.

Данная работа является дополнением и развитием [1]. Ее основная цель состоит в получении достаточных условий разрешимости задачи (1)–(3), а также замкнутых соотношений для функций $u(t)$, $x(t)$.

Как и в [1], задача состоит из двух частей, определяемых условиями соответственно (1) и (3), которые с точки зрения теории уравнений 1-го рода не имеют принципиальных различий. Эти условия представляют собой совокупности m и l таких уравнений относительно $u(t)$.

Определение (см. [1]). Решение $(u(t),\ x(t))$ задачи (1)–(3) называют *замкнутым*, если оно представимо с помощью конечного числа квадратур и алгебраических операций с матрицантом $X(t)$ свободной системы и остальными величинами задачи.

Сначала от (1), (3) выполняется переход к эквивалентной интегральной задаче

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{4}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = X^{-1}(t_s)x_s - x_0. \tag{5}$$

Построив на основе (3), (5) управление $u(t)$, функцию состояний можно получить из (4).

Далее соотношения (3), (5) записываются в операторном виде

$$A_\nu u = \widetilde{\rho}_\nu, \quad \nu = \overline{1, m+p}, \tag{6}$$

где

$A_\nu u = \int\limits_{t_0}^{t_\nu} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \widetilde{\rho}_\nu = X^{-1}(t_\nu)x_v - x_0$ при $\nu = \overline{1, m}$;

$A_\nu u = \int\limits_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \chi_\nu(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \widetilde{\rho}_\nu = \rho_v$ при $\nu = \overline{m+1, m+p}$.

К (6) применяется методика [1]. В результате при выполнении условия

$$\det(A_{j+1}R_jK_{j+1}) \neq 0, \quad j = \overline{0, m+p-1}, \tag{7}$$

на основе

$$y_j = K_{j+1}c_{j+1} + y_{j+1} \tag{8}$$

получено решение задачи (1)–(3):

$$u(t) = R(t, y) + r(t), \tag{9}$$

где $y = y(t)$ — финальная вспомогательная функция, полученная в рамках данной методики, R_j — величины типа M_r, $K_\nu \in \mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^{r\times n_\nu}\right)$, $R(t, y)$, $r(t)$ — соответственно финальный линейный (однородный) интегральный оператор из $\mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^r\right)$ в $\mathrm{C}\left(I, \mathbb{R}^r\right)$ и функция, получаемые с помощью (8) и рекуррентных соотношений

$$R_{j+1}(y_{j+1}) = R_j(y_{j+1}) - R_jK_{j+1}(A_{j+1}R_jK_{j+1})^{-1}A_{j+1}R_j(y_{j+1}), \tag{10}$$

$$r_{j+1} = r_j + R_jK_{j+1}(A_{j+1}R_jK_{j+1})^{-1}(\widetilde{\rho}_{j+1} - A_{j+1}r_j), \tag{11}$$

при этом $y_{m+p} = y$, $r_{m+p} = r$, $R_{m+p}(y_{m+p}) = R(t, y)$, $r_0 = 0$, $R_0 = \mathbb{J}$ — тождественный оператор.

Выполнение условия (7) обеспечивает реализуемость процесса (8),(10), (11) построения $R(t,y)$, $r(t)$, начиная с $R_1(y_1) = y_1 - K_1(A_1K_1)^{-1}A_1y_1$, $r_1(t) = K_1(A_1K_1)^{-1}\widetilde{\rho}_1$.

Для функции состояний на основе (9) по формуле (4) получено выражение

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\left[R(\tau,y) + r(\tau)\right]d\tau.$$

Замечание. Задачу (1), (2) можно рассматривать как частный случай задачи (1) – (3), при этом соотношения (1), (2) при $s = 0,\ 1$ — это классическая задача управления, а соотношения (1), (2) при $s = 2,\ 3, \ldots, m$ порождают соотношения (3) с соответствующими функциями $\chi_l(t)$ и пределами интегрирования. Для иллюстрации рассмотрена задача

$$\frac{dx}{dt} = u,\ x(0) = 3, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 4,$$

которая эквивалентна интегральной задаче

$$x(t) = 3 + \int\limits_0^t u(\tau)d\tau,\ \int\limits_0^1 u(\tau)d\tau = 0,\ \int\limits_0^2 u(\tau)d\tau = 1.$$

Далее на основе (7) – (9) получено управление

$$u(t) = y(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 y(\tau)d\tau + \left(2\int\limits_0^1 y(\tau)d\tau - \int\limits_0^2 y(\tau)d\tau + 1\right)(t-1) + \frac{1}{2},$$

где $y(t)$ – произвольная непрерывная функция.

1. *Лаптинский В.Н.* Решение многоточечной задачи управления с интегральными ограничениями типа равенств // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1386–1393.

2. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.