К периодической краевой задаче для обобщения матричного уравнения Риккати с параметром

О. А. Маковецкая
Могилев, Белорусско-Российский университет
e-mail: olya.makzi@gmail.com

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \lambda XQ(t)X + \lambda F(t, X), \tag{1}$$

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \tag{2}$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n}), F \in C(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что $Q(t) \not\equiv 0$, функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t, X)\colon t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально), $F(t, 0) \not\equiv 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

При $Q(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5] и др.; в этом случае с помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [1, 2, 7, 8]. Задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [9].

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X)\colon 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho\},$$

$$M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,\ N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\delta = \max_t \|Q(t)\|, \ h = \max_t \|F(t,0)\|, \ \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \ \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega + 2]\rho + \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$q_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2,$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2 + [1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L\rho + h)\gamma\omega,$$

$$\varphi_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho, \ \varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)}, \ \varepsilon_2 = \frac{1 - q_2(\rho)}{q_1(\rho)},$$

$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ — постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ — линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи* (1), (2) *в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le \varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda) =$$

$$= \Phi^{-1}\Big\{ \int_0^\omega A(\tau)d\tau \int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+\lambda X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma +$$

$$+ \int_0^\omega \Big(\int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) + \qquad (3)$$

$$+\lambda X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma\Big) B(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^{\omega}[\lambda X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda)+\lambda F(\tau,X_k(\tau,\lambda))]d\tau\Big\},\ k=1,2,\ldots,$$

где $X_0=0,\ X_1=-\lambda\Phi^{-1}\int\limits_0^{\omega}F(\tau,0)d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X-X_{k+1}\|_C\le\frac{q\|X_{k+1}-X_k\|_C+q_2\|X_k-X_{k-1}\|_C}{1-q},\ k=1,2,\ldots \tag{4}$$

Оценка (4) дополнена следующими соотношениями:

$$\|X_1-X_0\|_C\le\gamma\omega\varepsilon h;$$

$$\|X_2-X_1\|_C\le\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho+\varepsilon h]+\gamma\omega(\varepsilon\delta\rho^2+\varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

1. *Маковецкая О.А.* Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43–50.

2. *Лаптинский В.Н., Маковецкая О.А.* Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнения Ляпунова и Риккати // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 937–946.

3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2012.

5. *Лаптинский В. Н.* О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

6. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — exisence and uniqueness // J. of Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

7. *Маковецкая О.А.* К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения-2019”. Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.

8. *Маковецкая О.А.* Периодическая краевая задач для обобщенного матричного уравнения Риккати с параметром // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси, Минск, 2024. Часть 2. С. 55–56.

9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.