Решение двухточечной краевой задачи для возмущенного матричного уравнения Риккати

И. И. Маковецкий

Могилев, Белорусско-Российский университет

e-mail: imi.makzi@gmail.com

Рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X)\colon t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$, функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde{\rho}}$ условию Липшица относительно X (локально), M и N — вещественные $n\times n$-матрицы. Следует отметить, что в работе [1] эта задача изучалась только при $Q(t) \equiv 0$, $\tilde{\rho} = \infty$.

При $Q(t) \equiv 0$ в работе [2] установлена принципиальная возможность получения алгоритмов с неявными вычислительными схемами построения приближенных решений задачи (1), (2) (в частности, периодической) в классе допустимых функций, то есть функций класса $C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, которые подчинены условию (2).

Задача (1), (2) изучается, как и в [3], в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — какая-либо норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$\tilde{H}(\omega) = \int_0^\omega H(\tau)d\tau,\ H \in \{A, B\},$$

$$D_\rho = \{(t, X)\colon t \in I,\ \|X\| \le \rho < \tilde{\rho}\},$$

$$R = M^{-1}(M\tilde{A}(\omega) - M - N),\ S = -\tilde{B}(\omega),$$

$$\Psi(t)X = A(t)X + XB(t),\ \Phi X = RX - XS,$$

$$m = \|M^{-1}(M+N)\|,\ \gamma = \|\Phi^{-1}\|,\ \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|,$$

$$\beta = \max_{t\in I}\|B(t)\|,\ \delta = \max_{t\in I}\|Q(t)|,\ h = \max_{t\in I}\|F(t,0)|,$$

$$q = q(\rho) = \gamma\omega[(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)(m+2^{-1}(\alpha+\beta)\omega) + 2\delta\rho + L],$$

$$p = \gamma\omega h(m + 2^{-1}(\alpha+\beta)\omega + 1),$$

где $L = L(\rho)$ — постоянная Липшица функции $F(t, X)$ в области D_ρ, при этом оператор Φ и при каждом $t \in I$ оператор $\Psi(t)$ — линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Данная работа дополняет результаты статей [2, 3] и развивает исследования [4] в рамках условия $\det M \ne 0$ в задаче (1), (2).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $\det M \ne 0$, *матрицы* R *и* S *не имеют общих характеристических чисел,* $q < 1$, $p/(1-q) \le \rho$.

Тогда в области D_ρ *решение* $X = X(t)$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке* I *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка* $\|X\|_C \le p/(1-q)$.

По аналогии с [3] вводится оператор

$$\mathcal{L}(X(t), Y(t)) =$$

$$= M^{-1}(M+N)\int_t^{\omega}(\Psi(\tau)X(\tau)+Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))d\tau +$$

$$+\int_0^{\omega}[K_A(t,\tau)(\Psi(\tau,X(\tau)+Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))+$$

$$+(\Psi(\tau)X(\tau)+Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))K_B(t,\tau)]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\big(Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau))\big)d\tau,$$

где

$$K_H(t,\tau)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\tau}H(\sigma)d\sigma, \ 0\le\tau\le t\le\omega,\\ \displaystyle-\int_{\tau}^{\omega}H(\sigma)d\sigma, \ 0\le t<\tau\le\omega,\end{cases}$$

$$\mathcal{L}\colon C(I,\mathbb{R}^{n\times n})\to C^1(I,\mathbb{R}^{n\times n}).$$

Согласно предположению, матрицы R и S не имеют общих характеристических чисел, поэтому на основании [5] линейный оператор Φ однозначно обратим. Тогда можно установить, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному уранению $X(t) = \Phi^{-1}\mathcal{L}(X(t), X(t))$.

Для построения решения разработан алгоритм типа [2, 3]

$$X_k(t)=\Phi^{-1}\mathcal{L}(X_k(t),X_{k-1}(t)),$$

где в качестве начальной функции X_0 может быть взята любая функция из пространства $C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ такая, что $\|X_0\|_C\le\rho$. По аналогии с [3] можно установить, что приближения $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ являются допустимыми, а также доказать, что все члены последовательности $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ однозначно определяются алгоритмом (3) и принадлежат шару $\|X\|_C\le\rho$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма, при этом получены оценки

$$\|X-X_m\|_C\le\frac{\tilde{q}^m\|\Delta_0\|_C}{1-\tilde{q}},\ \|X\|_C\le\|X_0\|_C+\frac{\|\Delta_0\|_C}{1-\tilde{q}}, \qquad (4)$$

где
$$\tilde{q} = \frac{q - \tilde{q}_1}{1 - \tilde{q}_1} < q,$$
$$\tilde{q}_1 = \gamma(\alpha + \beta)\omega[m + 2^{-1}(\alpha + \beta)\omega] < q.$$
Как и в работе [3], при $X_0 = 0$ оценки (4) существенно упрощаются, а именно
$$\|X - X_m\|_C \leq \frac{\tilde{q}^m}{1 - \tilde{q}}\frac{p}{1 - \tilde{q}_1}, \quad \|X\|_C \leq \frac{p}{1 - q}.$$

1. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — exisence and uniqueness // J. of Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

2. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И.* К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 1. С. 137–141.

3. *Маковецкий И.И.* К построению решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения ляпуновского типа // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 429–432.

4. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2012.

5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 1967.