Многоточечная краевая задача для нелинейного уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий

А. Н. Бондарев
Могилёв, Белорусско-Российский университет
e-mail: alex-bondarev@tut.by

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in I, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где A, $B \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X)\colon t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, M_i — вещественные постоянные $n \times n$-матрицы. Предполагается, что нелинейная функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица относительно X (локально), при этом $F(t, 0) \not\equiv 0$.

Работа является продолжением [1] и развитием [2, 3]. Изучается случай сильного вырождения краевых условий [2]:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i = 0. \tag{3}$$

С помощью метода [4] исследуются вопросы разрешимости и построения решения задачи (1), (2) в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X)\colon t \in I, \|X\| \leqslant \rho\},\ \Phi = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int_{t_j}^{t_k} A(\tau)d\tau,\ \gamma = \|\Phi^{-1}\|,$$

$$\alpha = \max_{t\in I} \|A(t)\|,\ \beta = \max_{t\in I} \|B(t)\|,\ h = \max_{t\in I} \|F(t, 0)\|,\ m_i = \|M_i\|,$$

$$\tilde m = \sum_{j=1}^{k-1} m_j, \quad \varphi_j = \frac{1}{2}\left[(t_k - t_1)^2 + (t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2\right],$$

$$q = \gamma \sum_{j=1}^{k-1} m_j[\alpha(\alpha + \beta + L)\varphi_j + (\beta + L)(t_k - t_j)],$$

$$N = \gamma h \sum_{j=1}^{k-1} m_j[\alpha\varphi_j + (t_k - t_j)],$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $L = L(\rho)$ — постоянная Липшица относительно X функции $F(t, X)$ для области D_ρ.

Установлено, что при выполнении условия $\det \Phi \neq 0$ задача $(1), (2)$ эквивалентна интегральной задаче

$$X(t) = \Phi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} M_j \left[\int_{t_j}^{t} \int_{t_j}^{\tau} A(\sigma) d\sigma (A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + \right.$$

$$+F(\tau, X(\tau)))d\tau - \int_{t}^{t_k} \int_{\tau}^{t_k} A(\sigma) d\sigma (A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + \qquad (4)$$

$$\left. +F(\tau, X(\tau)))d\tau - \int_{t_j}^{t_k} (X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau)))d\tau \right].$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3), *а также* $\det \Phi \neq 0$, $q < 1$, $\frac{N}{1-q} \leqslant \rho$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в области* D_ρ; *ее решение* $X = X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся к решению уравнения* (4) *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением*

$$X_{p+1}(t) = \Phi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} M_j \times$$

$$\times \left[\int_{t_j}^{t} \int_{t_j}^{\tau} A(\sigma) d\sigma (A(\tau)X_p(\tau) + X_{p-1}(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau)))d\tau - \right.$$

$$- \int_{t}^{t_k} \int_{\tau}^{t_k} A(\sigma) d\sigma (A(\tau)X_p(\tau) + X_{p-1}(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau)))d\tau -$$

$$\left. - \int_{t_j}^{t_k} (X_p(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_p(\tau)))d\tau \right], \quad p = 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

$$X_0 = 0, \quad X_1 = -\Phi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int\limits_{t_j}^{t_k} F(\tau, 0) d\tau,$$

и удовлетворяющих условию (2), *при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C \leqslant \frac{N}{1-q}.$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (5), при этом получена рекуррентная оценка

$$\|X_{p+2}-X_{p+1}\|_C \leqslant q_1\|X_{p+1}-X_p\|_C+q_2\|X_p-X_{p-1}\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

где

$$q_1 = \gamma \sum_{j=1}^{k-1} m_j \left[\alpha^2 \varphi_j + (\beta + L)(t_k - t_j)\right], \quad q_2 = \gamma\alpha(\beta+L) \sum_{j=1}^{k-1} m_j \varphi_j.$$

Заметим, что $q_1 + q_2 = q$.

1. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Анализ многоточечной краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1591–1598.

2. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

3. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

4. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.