

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе  
для студентов специальности  
6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов  
и производств» заочной формы обучения*



Могилев 2026

УДК 621.317  
ББК 31.21  
Т45

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «26» февраля 2026 г.,  
протокол № 6

Составитель канд. техн. наук, доц. Н. В. Герасименко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

Приведен перечень вопросов для самостоятельной проработки, а также  
ответы на них. Изложена методика решения задач, дополненная необходимыми  
примерами.

Учебное издание

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Ответственный за выпуск	А. В. Хомченко
Корректор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать 24.03.2026. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,19. Тираж 36 экз. Заказ № 255.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2025

## Содержание

Введение.....	4
1 Классический метод расчета переходных процессов.....	5
2 Операторный метод расчета переходных процессов .....	21
3 Примеры задач к защите .....	26
Список литературы .....	31
Приложение А. Исходные данные задач для самостоятельной работы .....	32
Приложение Б. Схемы электрических цепей.....	34
Приложение В.....	35

## Введение

Дисциплина «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) – одна из фундаментальных в системе электротехнического образования. Глубокое изучение теории необходимо при анализе и расчете электромагнитных процессов и явлений, на которых базируется принцип действия устройств современной электроэнергетики, электро- и радиотехники, вычислительной и преобразовательной техники, электроники и автоматики. Знания, полученные при изучении курса ТОЭ, используются во многих специальных дисциплинах при подготовке инженеров по различным электротехническим специальностям.

Цель методических рекомендаций – помочь студентам в самостоятельной работе по рациональному изучению курса ТОЭ.

Методические рекомендации полезны при выполнении расчетно-графических заданий по теме переходные процессы в линейных электротехнических цепях.

Приводятся основные теоретические сведения и примеры по выполнению расчета переходных процессов классическим и операторным методами.

Подробно рассмотрены теоретические вопросы и задачи, которые полезны при защите расчетно-графического задания.

Методические рекомендации помогут систематизировать работу студентов и углубить восприятие изучаемого материала по курсу.

# 1 Классический метод расчета переходных процессов

## *Теоретические вопросы по теме*

*1.1 Изложите условия возникновения переходных процессов в электрической цепи.*

Ранее в курсе ТОЭ (ТЭЦ) рассматривались электрические цепи, токи и напряжения в которых считались *установившимися*, т. е. с момента подключения электрической цепи к источнику энергии прошло достаточно много времени.

В данном разделе курса рассматриваются переходные процессы, наступающие после того, как в цепи была произведена коммутация.

Коммутацией называется мгновенное подключение или отключение нагрузки или источников энергии.

Переходным называется процесс установления нового режима работы электрической цепи, возникающий после коммутации.

В электрических цепях переходные процессы возникают в том случае, если в цепи имеются индуктивные и емкостные элементы, обладающие способностью накапливать или отдавать энергию магнитного или электрического поля. В момент коммутации, когда начинается переходный процесс, происходит перераспределение энергии между индуктивными, емкостными элементами цепи и внешними источниками энергии. После того, как переходный процесс завершился, наступает новый установившийся (равновесный) режим работы цепи.

В реальных электротехнических устройствах переходные процессы возникают вследствие короткого замыкания или обрыва участка электрической цепи, подключения трансформаторов и электродвигателей, обладающих большой индуктивностью. Переходные процессы неизбежно возникают также при подключении электроустановок и приборов к источнику энергии. Таким образом, исследование переходных процессов в электрических цепях играет чрезвычайно важную роль при проектировании измерительных приборов, электрооборудования и устройств автоматического управления.

В методических рекомендациях рассматриваются переходные процессы в электрических цепях с *сосредоточенными параметрами*. Анализ переходных процессов в длинных линиях, где необходимо учитывать конечную скорость распространения электромагнитной волны вдоль проводов, представляет собой самостоятельный раздел курса ТОЭ.

*1.2 Возможно ли существование электрических цепей, в которых отсутствуют переходные процессы?*

Поскольку все реальные элементы электрической цепи обладают и емкостью и индуктивностью, из сказанного выше следует, что переходные процессы в реальных электрических цепях неизбежны.

*1.3 В чем заключается математическое обоснование классического метода расчета переходного процесса?*

Математическое обоснование классического метода расчета переходных процессов в электрических цепях заключается в следующем. Согласно правилам

Кирхгофа составляют дифференциальные уравнения цепи. Если заданы ЭДС источников, то искомыми величинами являются токи каждой ветви. Предположим, требуется найти ток  $i_k(t)$  в  $k$ -й ветви. Методом подстановки исключаем из системы уравнений остальные токи. В результате получим одно дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, содержащее искомую функцию тока  $i_k(t)$ , которое в обобщенной форме будет иметь вид:

$$a_n \frac{d^n i_k(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_k(t)}{dt} + a_0 i_k(t) = F_k(t), \quad (1.1)$$

где  $F_k(t)$  – обобщенное возмущающее воздействие.

Порядок уравнения  $n$  определяется числом реактивных элементов (емкостей и индуктивностей) и способом их соединения.

Решение уравнения (1.1) состоит из двух компонент: *частного решения* данного уравнения и *общего решения соответствующего однородного уравнения*, получаемого из исходного путем исключения правой части, т. е. при отсутствии возмущающего воздействия.

*1.4 Приведите математическое и физическое обоснования принужденной и свободной составляющих переходного процесса.*

Поскольку частное решение уравнения (1.1) соответствует установившемуся режиму, его называют *установившейся* или *принужденной* составляющей. Общее решение однородного уравнения характеризует состояние электрической цепи при отсутствии источников энергии и называется *свободной* составляющей. Запишем решение в виде

$$i_k(t) = i_{\text{кпр}}(t) + i_{\text{ксв}}(t), \quad (1.2)$$

где  $i_{\text{кпр}}(t)$  – принужденная составляющая;

$i_{\text{ксв}}(t)$  – свободная составляющая.

Для определения свободной составляющей составим характеристический полином, определяющий собственные значения уравнения (1.1):

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (1.3)$$

Приравнивая характеристический полином к нулю, получим *характеристическое уравнение*, корни которого определяют *собственные значения* исследуемой электрической цепи.

Пусть, например, корни характеристического уравнения вещественные, тогда свободная составляющая имеет вид:

$$i_{\text{ксв}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}, \quad (1.4)$$

где  $A_1 \dots A_n$  – постоянные интегрирования.

Подставляя (1.4) в (1.2), получаем решение уравнения (1.1), описывающее переходный ток в  $k$ -й ветви:

$$i_k(t) = i_{\text{кпр}}(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (1.5)$$

Постоянные интегрирования определяют исходя из начальных условий. Исследование характеристического уравнения и влияние его корней на характер переходного процесса, а также методика определения постоянных интегрирования подробно рассмотрены в пп. 1.6 и 1.7.

### 1.5 Сформулируйте законы коммутации.

Введем следующие обозначения. Значение тока или напряжения до коммутации будем отмечать знаком «-», например,  $i(0-)$ ,  $u(0-)$ , а значение непосредственно после коммутации знаком «+», например,  $i(0+)$ ,  $u(0+)$ .

В момент коммутации некоторые величины (токи или напряжения) могут изменяться мгновенно (скачком) и для них  $f(0-) \neq f(0+)$ , в то время как другие изменяются непрерывно и справедливо равенство  $f(0-) = f(0+)$ .

Ранее (п. 1.1) было отмечено, что переходные процессы могут возникать в том случае, если в цепи имеются индуктивные и (или) емкостные элементы, способные накапливать энергию магнитного и электрического полей соответственно.

Энергия магнитного поля индуктивности определяется формулой

$$w_L = \frac{L \cdot i_L^2}{2}. \quad (1.6)$$

Докажем, что ток в ветви с индуктивностью не может измениться мгновенно. Доказательство выполним от противного.

Пусть ток в ветви с индуктивностью изменился мгновенно, тогда подводимая к индуктивности мощность  $p = dW_L / dt = L i_L(t) \cdot di_L(t) / dt$  окажется бесконечно большой, что лишено физического смысла. Таким образом, ток через индуктивный элемент изменяется непрерывно и имеет место следующее соотношение, которое принято называть *первым законом коммутации*:

$$i_L(0-) = i_L(0+). \quad (1.7)$$

Энергия электрического поля конденсатора с постоянной емкостью определяется формулой

$$w_C = \frac{C \cdot u_C^2}{2}. \quad (1.8)$$

Если предположить, что напряжение на конденсаторе изменилось мгновенно, тогда подводимая к нему мощность  $p = dW_C / dt = C \cdot u_C(t) \cdot du_C(t) / dt$  окажется бесконечно большой, что лишено физического смысла. Таким образом,

напряжение на конденсаторе изменяется непрерывно и имеет место следующее соотношение, которое принято называть *вторым законом коммутации*:

$$u_C(0-) = u_C(0+). \quad (1.9)$$

Необходимо подчеркнуть, что сформулированным законам коммутации должно удовлетворять только полное решение уравнения (1.1).

Законы коммутации играют важную роль в задачах расчета переходных процессов, поскольку позволяют однозначно определить начальные условия по известным токам ветвей с индуктивностями и напряжениям на конденсаторах.

*1.6 Какой вид имеет свободная составляющая переходного процесса при различных корнях характеристического уравнения?*

В п. 1.1 было введено понятие характеристического полинома и соответствующего ему характеристического уравнения. Исследуем возможные корни характеристического уравнения для электрической цепи второго порядка и получим выражения для свободной составляющей искомой величины. Однородное дифференциальное уравнение второго порядка, записанное, например, для тока в  $k$ -й ветви и определяющее его свободную составляющую, имеет вид

$$a_2 \frac{d^2 i_{\text{кв}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{di_{\text{кв}}(t)}{dt} + a_0 = 0. \quad (1.10)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$p^2 a_2 + p a_1 + a_0 = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) квадратное, следовательно, возможны три случая.

1 *Корни вещественные, разные;  $p_1, p_2$ .* Решение уравнения (1.10) будет иметь вид

$$i_{\text{кв}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.12)$$

В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (1.12) в дифференциальное уравнение (1.10).

2 *Корни вещественные, равные;  $p_1 = p_2 = p$ .* Решение уравнения (1.10) будет иметь вид

$$i_{\text{кв}}(t) = A_1 e^{pt} + t A_2 e^{pt}. \quad (1.13)$$

3 *Корни комплексно-сопряженные;  $p_{1,2} = \alpha \pm i\omega_c$ .* Решение однородного уравнения (1.10) будет иметь вид

$$i_{\text{кв}}(t) = A e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \varphi). \quad (1.14)$$

Важно отметить следующее. В линейных электрических цепях с постоянными параметрами без обратных связей вещественные части корней характеристического уравнения всегда отрицательны.

1.7 Изложите методику расчета переходного процесса при включении  $RL$ -цепи на постоянное напряжение.

При включении  $RL$ -цепи (рисунок 1.1) на постоянное напряжение  $U$  ток в установившемся режиме  $i_{\text{пр}}(t) = U/R$ , поскольку в цепи постоянного тока  $u_{L\text{пр}}(t) = L \cdot di(t)/dt = 0$ .

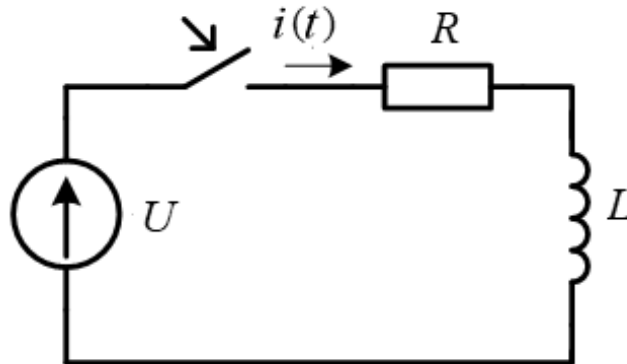


Рисунок 1.1 – Включение  $RL$ -цепи на постоянное напряжение

Переходный ток определяется выражением

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) = \frac{U}{R} + Ae^{pt} = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.15)$$

где  $\tau$  – постоянная времени,  $\tau = L/R$ ;

$A$  – постоянная интегрирования;

$p$  – корень характеристического уравнения,  $p = R/L$ .

До коммутации цепь была разомкнута, следовательно,  $i(0-) = 0$ . Из первого закона коммутации следует, что ток, протекающий через индуктивность, не может измениться мгновенно. Подставляя  $i(0-) = i(0+) = 0$  в выражение (1.15), определяем постоянную интегрирования:

$$i(0+) = \frac{U}{R} + Ae^0 \Rightarrow 0 = \frac{U}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{U}{R}.$$

Таким образом, переходный ток в цепи  $RL$  определяется выражением

$$i(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (1.16)$$

Напряжение на индуктивности пропорционально производной от выражения тока (1.16), следовательно

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.17)$$

Используя выражения (1.16) и (1.17), получим кривые тока и напряжения, представленные на рисунке 1.2.

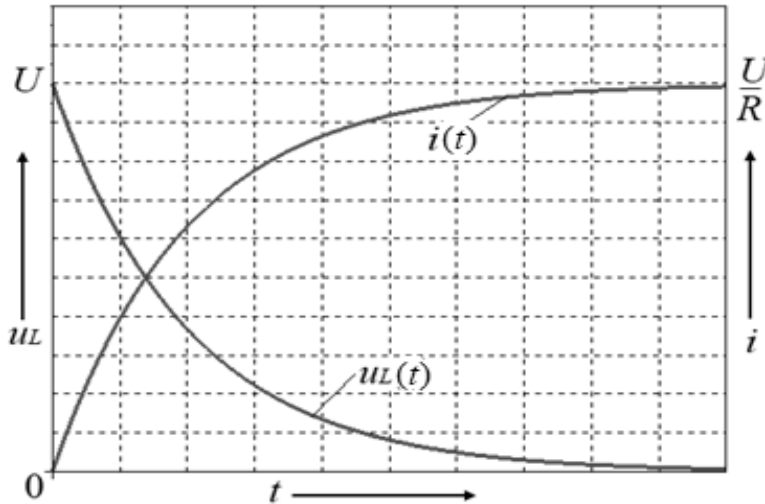


Рисунок 1.2 – Кривые изменения тока и напряжения в  $RL$ -цепи при включении на постоянное напряжение

1.8 Изложите методику расчета переходного процесса при включении  $RL$ -цепи на переменное (синусоидальное) напряжение.

При включении  $RL$ -цепи на переменное синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  установившийся ток будет определяться выражением

$$i_{\text{пр}}(t) = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\omega t + \psi_u - \varphi), \quad (1.18)$$

где  $Z$  – полное сопротивление цепи,  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ;

$\varphi$  – угол смещения фазы тока,  $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ .

Переходный ток

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.19)$$

где  $A$  – постоянная интегрирования;

$\tau$  – постоянная времени,  $\tau = L/R$

Воспользуемся первым законом коммутации  $i(0-) = i(0+) = 0$ , учитывая, что до коммутации цепь была разомкнута и ток в ней отсутствовал. Постоянная интегрирования будет иметь вид

$$A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi_u - \varphi). \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.19), получаем выражение для переходного тока:

$$i(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\psi_u - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.21)$$

Напряжение на индуктивности пропорционально производной тока, следовательно

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U_m \left[ \sin\varphi \cdot \sin\left(\omega t + \psi_u - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\varphi \cdot \sin(\psi_u - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \quad (1.22)$$

Кривые изменения тока представлены на рисунке 1.3.

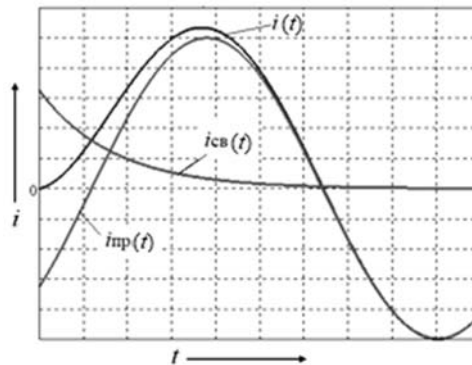


Рисунок 1.3 – Кривые изменения тока в цепи  $RL$  при включении на синусоидальное напряжение

*1.9 Поясните, как влияет начальная фаза входного напряжения на характер переходного процесса в  $RL$ -цепи.*

Из графика  $i(t)$  (см. рисунок 1.3) видно, что по мере затухания свободной составляющей тока  $i_{св}(t)$ , переходный ток стремится к значению принужденной составляющей (установившийся режим). Однако в интервале времени от  $T/4$  до  $3T/4$  (интервал зависит от фазы напряжения на входе  $\psi_u$ ) переходный ток может достигать значений, превышающих амплитуду тока в установившемся режиме. Наибольшего возможного значения переходный ток достигает, если в момент включения цепи принужденная составляющая тока равна своему

амплитудному значению ( $\psi_u - \varphi = \pm\pi/2$ ), а постоянная времени велика, т. е. свободная составляющая затухает медленно.

В случае, когда  $R \approx 0$  и постоянная времени стремится к бесконечности,  $\varphi \approx \pi/2$ , а начальная фаза приложенного напряжения  $\psi_u \approx \pi$  и в момент коммутации приложенное напряжение проходит через ноль, примерно через половину периода ток достигает почти удвоенной амплитуды установившегося значения.

Если же в момент включения цепи принужденная составляющая тока проходит через ноль, то начальное значение свободной составляющей также равно нулю. В таком случае свободная составляющая не возникает и в цепи сразу наблюдается установившийся режим. Это следует из уравнения

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_m \sin(\psi_u - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.23)$$

при  $\psi_u - \varphi = 0$  или  $\psi_u - \varphi = \pi$ .

*1.10 Изложите методику расчета переходного процесса при включении RC-цепи на постоянное напряжение.*

При включении RC-цепи на постоянное напряжение  $U$  (рисунок 1.4), принужденная составляющая напряжения на электродах конденсатора  $U_{\text{сnp}}$  также равна  $U$ .

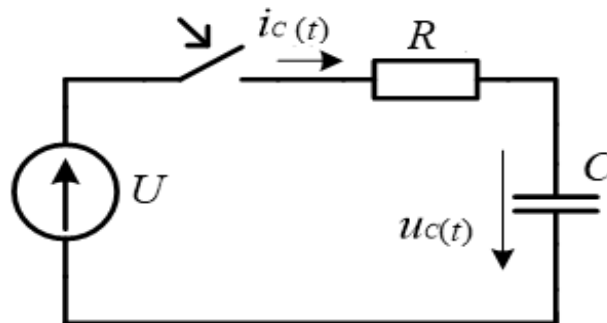


Рисунок 1.4 – Включение RC-цепи на постоянное напряжение

Запишем выражение для переходного процесса по напряжению на конденсаторе

$$u_c(t) = u_{\text{сnp}}(t) + u_{\text{св}}(t) = U + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.24)$$

где  $\tau$  – постоянная времени,  $\tau = RC$ .

Поскольку до включения цепи конденсатор не был заряжен, при  $t = 0$  напряжение на конденсаторе  $u_c(0-) = 0$ . Применяя второй закон коммутации, получаем  $u_c(0-) = u_c(0+) = 0$ . Следовательно, постоянная интегрирования  $A = -U$ . Подставляя постоянную интегрирования в выражение (1.23), имеем:

$$u_c(t) = U - U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (1.25)$$

Ток, протекающий через конденсатор, пропорционален производной напряжения, таким образом:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.26)$$

Используя выражения (1.25) и (1.26), построим кривые напряжения и тока (рисунок 1.5).

Из полученных выражений и графиков переходного процесса следует, что напряжение на конденсаторе постепенно нарастает от начального до установившегося значения  $U$ . Ток зарядки конденсатора возрастает мгновенно до значения  $U/R$ , затем, по мере увеличения заряда конденсатора, убывает по экспоненциальному закону.

К исследованию процессов зарядки и разрядки конденсатора сводятся многие важные практические задачи, возникающие при расчетах переходных процессов в цепях устройств автоматики и измерительных приборов.

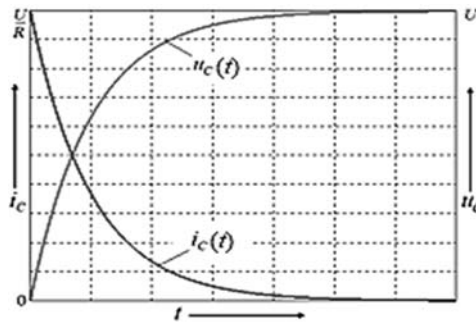


Рисунок 1.5 – Кривые изменения напряжения на конденсаторе и тока в  $RC$ -цепи при включении на постоянное напряжение

*1.11 Изложите методику расчета переходного процесса при включении  $RC$ -цепи на переменное (синусоидальное) напряжение.*

При включении  $RC$ -цепи (рисунок 1.6) на синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , ток в установившемся режиме определяется выражением

$$i_{\text{сnp}}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u + \varphi), \quad (1.27)$$

где  $Z$  – полное сопротивление цепи,  $Z = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ ;

$\varphi$  – угол смещения фазы тока,  $\varphi = \text{arctg}(1/R\omega C)$ .

Тогда напряжение на конденсаторе в установившемся режиме

$$u_{\text{сип}}(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.28)$$

Выражение для переходного напряжения на конденсаторе будет иметь вид

$$u_c(t) = u_{\text{сип}}(t) + u_{\text{св}}(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.29)$$

где  $\tau$  – постоянная времени,  $\tau = RC$ .

Принимая во внимание, что до подключения к источнику синусоидального напряжения конденсатор не был заряжен, с учетом второго закона коммутации имеем

$$A = -\frac{U_m}{Z\omega C} \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в (1.29), получаем выражение для переходного напряжения на конденсаторе при включении на синусоидальное напряжение

$$u_c(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_m}{Z\omega C} \cdot \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.31)$$

Согласно формуле  $i_c(t) = C \cdot du_c / dt$  находим переходной ток

$$i_c(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u + \varphi) - \frac{U_m}{Z\omega RC} \cdot \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.32)$$

Можно переписать это выражение в более удобной форме:

$$i_c(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_u + \varphi) + \frac{I_m}{\omega RC} \sin\left(\psi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.33)$$

Используя выражения (1.31) и (1.33) построим кривые изменения напряжения на конденсаторе и тока в цепи  $RC$ -цепи при включении на синусоидальное напряжение (рисунок 1.7).

При  $t=0$  ток в начальный момент  $i(0) = U_m \sin(\psi_u) / R$  и напряжение источника питания равно падению напряжения на резисторе, этим объясняется возможное возникновение импульсов тока большой амплитуды при включении  $R, C$  цепей с малым сопротивлением  $R$ .

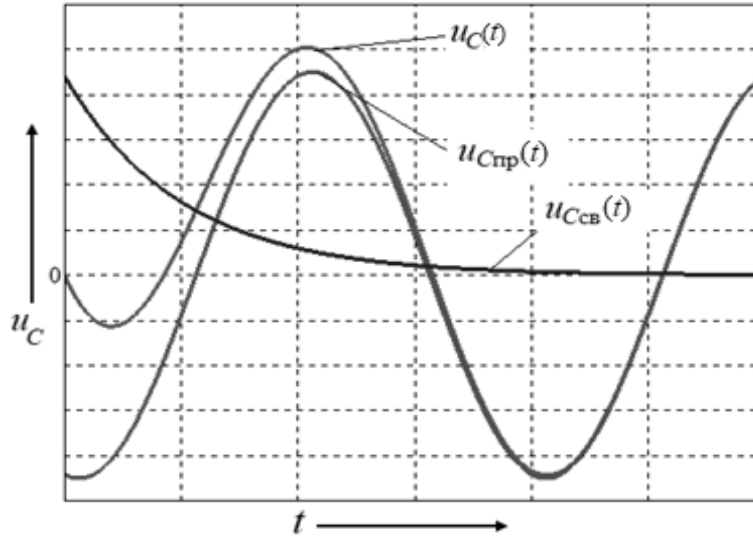


Рисунок 1.7 – Кривые изменения напряжения на конденсаторе при включении  $RC$ -цепи на переменное синусоидальное напряжение

1.12 *Возможны ли опасные перенапряжения и сверхток при включении  $RC$ -цепи на переменное (синусоидальное) напряжение?*

При включении  $RC$ -цепи на синусоидальное напряжение возможны значительное перенапряжение и сверхток. Максимальное значение  $u_C(t)$  получается, если в момент включения цепи принужденная составляющая напряжения  $u_{Cпр}$  равна амплитудному значению, т. е.  $U_{Cm}$ , а постоянная времени велика. Примерно через половину периода после включения цепи, напряжение на конденсаторе  $u_C(t)$  достигает удвоенной амплитуды принужденной составляющей, т. е.  $u_C \approx 2U_{Cm}$ . При малой величине постоянной времени  $\tau$ , в момент включения цепи имеем

$$i(t) = i(0) = \frac{U_{Cm}}{R}, \quad (1.34)$$

следовательно, в цепи возможен *сверхток*, существенно превышающий амплитудное значение тока в принужденном режиме.

1.13 *В чем заключается физический смысл постоянной времени  $\tau$ ? Приведите способы определения  $\tau$ .*

Из приведенных выше примеров следует, что свободная составляющая переходного процесса выражается экспонентой, скорость убывания которой зависит от *постоянной времени*  $\tau$ . Можно показать, что эта величина имеет размерность времени, т. к. показатель степени экспоненты размерности не имеет. Постоянная времени зависит только от параметров электрической цепи и определяет *время, за которое абсолютная величина свободной составляющей уменьшится в  $e$  раз.*

Не составляет труда определить и физический смысл  $\tau$ . Например, для  $RC$ -цепи  $\tau = RC$ , это означает, что напряжение на конденсаторе будет изменяться тем медленнее, чем больше емкость конденсатора.

*1.14 Как влияет активное сопротивление в  $RL$ - и  $RC$ -цепях на характер кривых переходного процесса?*

Рассмотрим электрические цепи, содержащие  $RL$ - и  $RC$ -элементы.

Для  $RL$ -цепи постоянная времени определяется выражением  $\tau = L / R$ , следовательно, до наступления установившегося режима со значением тока  $i_{\text{ур}}(t) = U / R$ , ток в цепи возрастает тем медленнее, чем больше постоянная времени  $\tau$  (значение  $R$  мало), т. е. затухание свободной составляющей  $i_{\text{св}}(t)$  происходит медленно. Часть энергии, получаемой от источника, идет на увеличение энергии магнитного поля катушки индуктивности, другая часть переходит в тепло.

Для  $RC$ -цепи постоянная времени определяется выражением  $\tau = RC$ . Напряжение  $u_C(t)$  не устанавливается мгновенно. Напряжение  $u_C(t)$  возрастает, а ток уменьшается тем медленнее, чем больше постоянная времени  $\tau$  (значение  $R$  велико), т. е. затухание свободной составляющей  $u_{\text{св}}(t)$  происходит медленно.

*1.15 После отключения  $RL$ -цепи от питающего напряжения, в ней продолжает протекать ток. Как объяснить данное явление?*

До короткого замыкания катушки индуктивности (рисунок 1.8) ключом ток, протекающий в цепи, определяется выражением

$$i(0-) = \frac{E}{R+r}, \quad (1.35)$$

где  $r$  – активное сопротивление витков катушки.

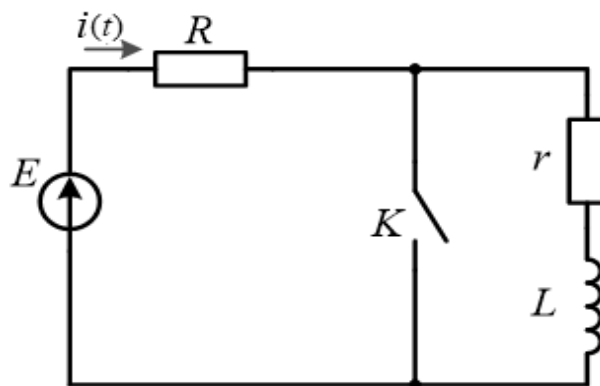


Рисунок 1.8 – Короткое замыкание катушки индуктивности

Установившийся ток в катушке после коммутации равен нулю, поскольку источник энергии был исключен из контура, следовательно

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) = \frac{E}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.36)$$

Изменяющийся ток (1.36) вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt} = E \frac{r}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}} = -u_L(t), \quad (1.37)$$

величина которой в момент времени  $t=0$  соответствует напряжению на сопротивлении  $r$ , которое и ограничивает ток в момент коммутации.

С энергетической точки зрения процесс короткого замыкания катушки индуктивности с активным сопротивлением витков  $r$  и индуктивностью  $L$  характеризуется тем, что вся энергия магнитного поля, запасенная в катушке  $W_M = L \cdot i^2(0) / 2$ , в течение переходного процесса затрачивается на нагрев обмотки.

*1.16 При каком значении параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , в цепи наблюдается апериодический процесс?*

При замыкании конденсатора с емкостью  $C$ , заряженного до разности потенциалов  $U_0$  на последовательный  $RLC$ -контур (рисунок 1.9, а), характер переходного процесса зависит от соотношения между параметрами контура  $R$ ,  $C$  и  $L$ . Выделяют *апериодический* (рисунок 1.9, б) и *колебательный* (рисунок 1.9, в) переходные процессы.

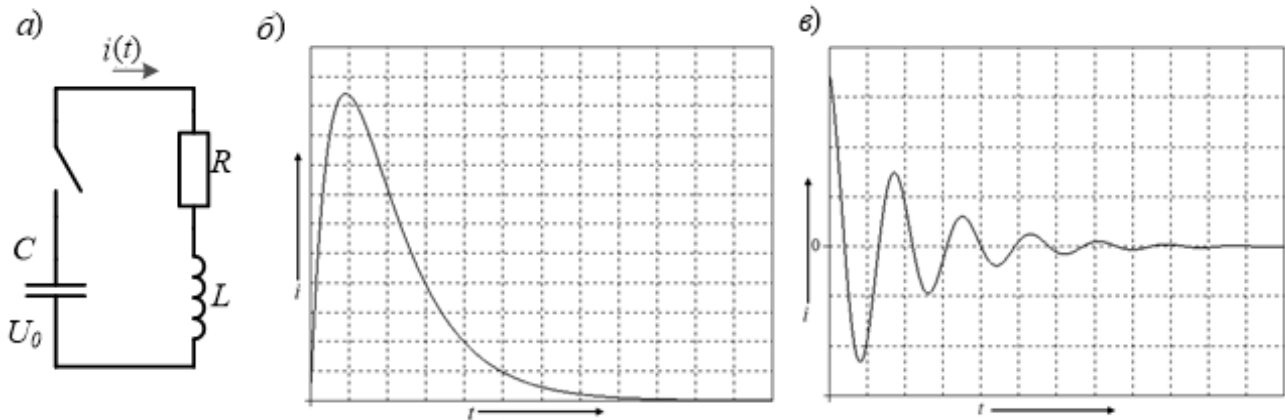


Рисунок 1.9 – Последовательный  $RLC$ -контур и виды переходных процессов

Апериодический процесс имеет место, если корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad (1.38)$$

т. е.  $R > \sqrt{L/C}$ . При этом  $u_L(t)$ ,  $u_C(t)$ ,  $i(t)$  будут состоять из суммы двух экспонент с коэффициентами затухания  $|p_1| < |p_2|$ . В результате  $u_C(t)$ , начиная с  $U_0$ , монотонно убывает, а ток  $i(t)$ , возрастая от нуля, достигает максимума, а затем также уменьшается. Напряжение  $u_L(t)$  мгновенно возрастает до значения  $-U_0$ , т. к. при  $t=0$  ток и напряжение на резисторе равны нулю, *абсолютные значения* напряжений на катушке индуктивности  $u_L(t)$  и на конденсаторе  $u_C(t)$  равны. Абсолютное значение напряжения  $u_L(t)$  сначала уменьшается, затем проходит через ноль в момент, когда ток максимален и далее возрастает до некоторого положительного максимума, после чего стремится к нулю. С энергетической точки зрения конденсатор непрерывно отдает запасенную им энергию электрического поля, а резистор непрерывно ее поглощает. Такой процесс называют *апериодическим*.

1.17 При каком значении параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , в цепи наблюдается колебательный процесс?

Разряд конденсатора емкостью  $C$ , заряженного до разности потенциалов  $U_0$  на цепь с последовательным соединением  $R$ ,  $L$ ,  $C$  является *колебательным* (или периодическим), если величина  $R$  (активное сопротивление) оказывается меньше критической, т. е. выполняется следующее условие

$$R < R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.39)$$

Корни характеристического уравнения при этом оказываются *комплексно-сопряженными*:  $p_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_d$ . Вещественная часть  $\alpha$  представляет собой коэффициент затухания колебаний и определяется выражением

$$\alpha = \frac{R}{2L}. \quad (1.40)$$

Важно отметить, что в колебательных системах с диссипацией энергии, каковым является  $RLC$ -контур, *вещественная часть корней характеристического уравнения всегда отрицательна*.

Мнимая часть  $\omega_d$  представляет собой угловую частоту собственных колебаний контура, таким образом

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{2\pi}{T_d}, \quad (1.41)$$

где  $T_d$  – период собственных колебаний.

С учетом (1.40) и (1.41), выражения для свободной составляющей тока  $i(t)$  и напряжения на конденсаторе  $u_C(t)$  будут иметь вид

$$u_C(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \nu); \quad (1.42)$$

$$i_{cb}(t) = CAe^{-\alpha t} \cdot (-\alpha \sin(\omega_d t + \nu) + \omega_d \cos(\omega_d t + \nu)). \quad (1.43)$$

Ток и напряжение на конденсаторе и катушке индуктивности являются экспоненциально затухающими синусоидальными функциями с угловой частотой собственных колебаний контура  $\omega_d$  и коэффициентом затухания  $\alpha$ , причем обе величины определяются только параметрами контура, т. е. значениями  $R, L, C$ .

Из выражений (1.42) и (1.43) видно, что разряд конденсатора носит колебательный характер, причем амплитуда колебаний постепенно уменьшается, поскольку множитель  $e^{-\alpha t}$  с ростом  $t$  стремится к нулю.

Отметим также, что зависимости  $u_{Ccb}(t)$  и  $i_{cb}(t)$  не являются синусоидальными, их максимумы не лежат между точками пересечения графика функции с осью абсцисс, что обусловлено наличием множителя  $e^{-\alpha t}$ .

С энергетической точки зрения происходит обмен энергией между емкостью и индуктивностью с непрерывным рассеянием энергии на активном сопротивлении  $R$ . Аналогом такой цепи является простейший гармонический осциллятор, состоящий из пружины, на конце которой закреплен груз. В таком осцилляторе происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, а рассеяние энергии происходит благодаря трению. Если трение (или активное сопротивление в  $RLC$ -контуре) отсутствует, колебания являются незатухающими.

### 1.18 Как определить постоянную времени $\tau$ для $RLC$ -цепи?

Формулы для определения постоянной времени  $RLC$ -цепи представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Постоянная времени для цепи  $R, L, C$

Тип корней	Характер процесса	Постоянная времени
Вещественные, разные $p_1, p_2$	Апериодический	$\tau_1 = 1/ p_1 ; \tau_2 = 1/ p_2 $
Вещественные, равные $p_1 = p_2 = p$	Апериодический	$\tau = 1/ p $
Комплексно-сопряженные $p_{12} = \alpha + i\omega_0$	Колебательный	$\tau = 1/ \alpha $

1.19 В чем заключается особенность расчета переходного процесса в электрической цепи, содержащей индуктивно-связанные элементы?

Расчет переходных процессов в сложных электрических цепях с взаимной индуктивностью (рисунок 1.10) заключается в формировании системы независимых уравнений согласно законам Кирхгофа в дифференциальной форме для мгновенных значений напряжений и токов. При этом в каждой паре ветвей появляется напряжение, связанное с наличием взаимной индукции  $M \cdot di_2(t)/dt$  в первой ветви и  $M \cdot di_1(t)/dt$  во второй ветви со знаком, учитывающим встречное или согласное включение индуктивностей. Далее, методом подстановки приводят систему уравнений к одному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка, содержащему искомую функцию. Порядок полученного дифференциального уравнения равен числу независимых начальных условий: токов, протекающих через индуктивности, и напряжений на конденсаторах, при этом следует учитывать, что в некоторых случаях можно преобразовать схему электрической цепи, объединив индуктивности и, соответственно, емкости, соединенные последовательно или параллельно.

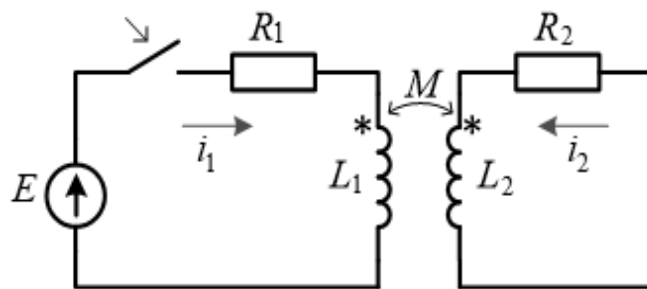


Рисунок 1.10 – Коммутация в электрической цепи с индуктивной связью

Подобные уравнения целесообразно составлять так, чтобы искомой функцией оказался ток, протекающий в ветви с индуктивностью, или напряжение на конденсаторе. В этом случае постоянные интегрирования легко определяются с помощью законов коммутации.

В качестве примера получим систему дифференциальных уравнений для электрической цепи, представленной на рисунке 1.10.

Пусть активные сопротивления обмоток обеих катушек, а также их индуктивности одинаковы, т. е.  $R_1 = R_2 = R$  и  $L_1 = L_2 = L$ . Тогда система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} Ri_1 + L \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

*1.20 Как учитывается взаимная индукция  $M$  между двумя контурами при расчете переходного процесса?*

В дифференциальные уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа для двух контуров, катушки которых связаны взаимной индуктивностью  $M$ , добавляются напряжения  $\pm M \cdot di_2(t)/dt$  для первой цепи и  $\pm M \cdot di_1(t)/dt$  для второй. Знак «+» (или «-») соответствует совпадению (несовпадению) направлений обхода первого контура и тока во втором относительно одноименных зажимов катушек. Аналогично для второго контура.

*1.21 Приведите основные преимущества и недостатки классического метода расчета.*

Классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях не имеет никаких принципиальных ограничений. Тем не менее, в сложных электрических цепях возникает необходимость решения системы дифференциальных уравнений с большим числом неизвестных или (в результате преобразования) решения одного дифференциального уравнения высокого порядка. В частности, сложной может оказаться и задача определения постоянных интегрирования.

## 2 Операторный метод расчета переходных процессов

### *Основные теоретические вопросы*

*2.1 В чем заключается основная идея операторного метода анализа переходных процессов?*

Операторный метод расчета впервые был предложен О. Хевисайдом как удобный и мощный инструмент анализа переходных процессов в электрических цепях. Применение операторного метода расчета позволяет упростить анализ переходных процессов путем перехода от дифференциальных уравнений к алгебраическим. Идея операторного метода заключается в замене функции-оригинала  $f(t)$  функцией комплексного переменного  $F(p)$ , называемой изображением.

В отличие от классического метода расчета, операторный не требует определения постоянных интегрирования, что также упрощает анализ.

*2.2 Дайте определения оригинала, изображения функции и преобразования Лапласа.*

Функция  $f(t)$ , называется *оригиналом*, если удовлетворяет следующим условиям:

- $f(t)$  определена при  $t \in [0; +\infty)$ ;
- имеет конечное число разрывов первого рода;
- $f(t)$  является функцией конечного порядка роста, т. е. существуют такие вещественные неотрицательные числа  $\gamma$  и  $M$ , что  $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ .

Следует отметить, что практически все функции, описывающие реальные физические процессы, удовлетворяют данным условиям.

Пусть  $f(t)$  – оригинал, тогда функция комплексного переменного  $p = s + i\omega_0$ , определенная при  $\operatorname{Re}(p) > \gamma$ , называется *изображением* и определяется следующей формулой:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (2.1)$$

Переход от оригинала к изображению называется *преобразованием Лапласа* и обозначается символом  $\cdot = \cdot$  или  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

Поскольку преобразование Лапласа допустимо при  $t = 0+$ , обозначая начальные значения функции  $f(t)$  и ее производных как  $f(0), f'(0), f''(0)$  следует понимать их значения при  $t = 0+$ .

Переход от изображения к оригиналу называется *обратным преобразованием Лапласа* и в общем случае определяется формулой, называемой также интегралом Бромвича:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp. \quad (2.2)$$

Переход от изображения к оригиналу принято обозначать символом  $\cdot = \cdot$  или  $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ .

### 2.3 Изложите основные свойства преобразования Лапласа.

Находить изображения, используя формулу (2.1), не всегда просто и удобно. Рассмотрим свойства преобразования Лапласа, которые в некоторых случаях позволяют существенно упростить эту задачу.

1 *Свойство линейности.* Пусть  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – оригиналы, а  $a_1$  и  $a_2$  некоторые константы. Нетрудно показать, что функции  $a_1 \cdot f_1(t)$  и  $a_2 \cdot f_2(t)$  также являются оригиналами и им соответствуют изображения  $a_1 \cdot F_1(p)$  и  $a_2 \cdot F_2(p)$  соответственно. Пусть  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – оригиналы, следовательно, функция  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$  также является оригиналом и ей соответствует изображение  $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$ .

2 *Изображение производной.* Пусть  $f(t)$  – оригинал, имеющий первую производную  $g(t) = f'(t)$ ,  $F(p)$  – изображение функции  $f(t)$ . Тогда функции  $g(t)$  соответствует изображение  $G(p) = pF(p) - f(0)$ .

Если функция  $f(t)$  имеет вторую производную, т. е.  $g(t) = f''(t)$ , а  $F(p)$  – изображение функции  $f(t)$ , то применяя аналогичные рассуждения, получаем изображение второй производной  $G(p) = p^2 [F(p) - (f(0) / p) - (f'(0) / p)]$ .

3 *Изображение интеграла.* Пусть  $f(t)$  – оригинал, а  $F(p)$  – его изображение. Пусть имеется функция  $q(t) = \int f(t)dt$ , она также является оригиналом и такой функции соответствует изображение  $Q(p) = F(p) / p$ .

В литературе по операционному исчислению имеются таблицы, содержащие изображения для широкого класса функций, включая элементарные и специальные функции. В приложении В приведена краткая выдержка из таких таблиц, в которой представлены наиболее востребованные в задачах курса ТОЭ функции.

#### 2.4 Сформулируйте законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.

Закон Ома в операторной форме для участка сложной электрической цепи (рисунок 2.1) с учетом ненулевых начальных условий будет иметь следующий вид.

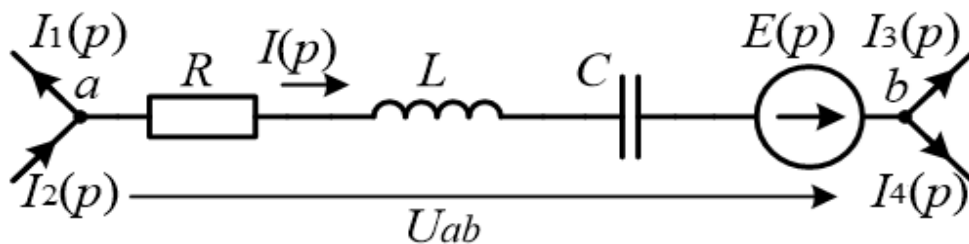


Рисунок 2.1 – Участок сложной электрической цепи

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}, \quad (2.3)$$

где  $Z(p)$  – импеданс участка цепи, записанный в операторной форме,  $Z(p) = R + pL + (1 / pC)$ .

Ненулевые начальные условия в данном случае учтены в виде слагаемых  $Li(0)$  и  $u_c(0) / p$ .

Первый закон Кирхгофа в операторной форме

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (2.4)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме при ненулевых начальных условиях

$$\sum_{k=1}^n E_k(p) = \sum_{k=1}^n I_k(p) \cdot Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{ck}(0)}{p}. \quad (2.5)$$

При нулевых начальных условиях формула (2.5) будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^n E_k(p) = \sum_{k=1}^n I_k(p) \cdot Z_k(p). \quad (2.6)$$

2.5 Как составить уравнения согласно Законам Ома и Кирхгофа в операторной форме?

При составлении уравнений в операторной форме необходимо учитывать начальные условия ( $Li(0)$  и  $u_C(0)/p$ ), которые также называют внутренними или расчетными ЭДС. Внутренние ЭДС указывают на то, что в момент коммутации в катушке была запасена энергия магнитного поля, а в конденсаторе, соответственно, электрического.

Положительное направление внутренней ЭДС  $Li(0)$  совпадает с направлением тока в ветви, а направление  $u_C(0)/p$  ему противоположно. При этом положительные направления тока в ветви с конденсатором и его напряжения считают совпадающими.

2.6 Сформулируйте правила составления схемы замещения электрической цепи в операторной форме.

Эквивалентные операторные схемы замещения составляются по исходной цепи, заменяя каждый элемент цепи его эквивалентной операторной схемой. На рисунке 2.2 представлены операторные схемы замещения основных элементов электрической цепи.

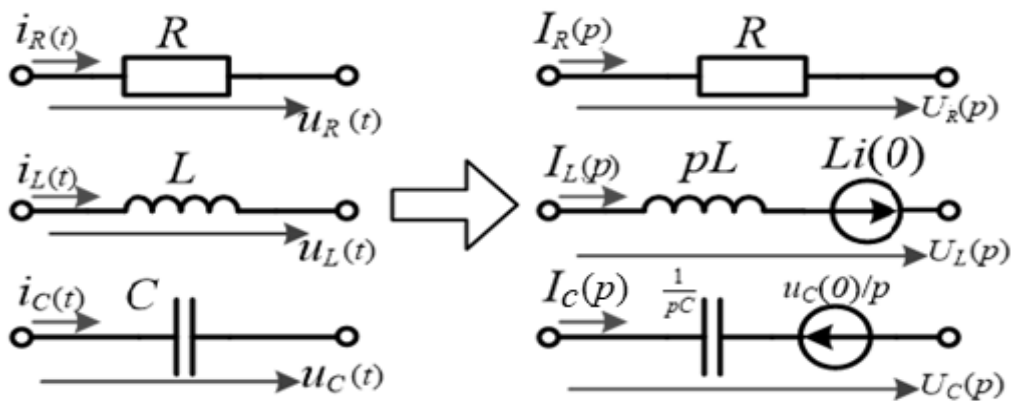


Рисунок 2.2 – Операторные схемы замещения элементов электрической цепи

2.7 Изложите методику расчета переходного процесса операторным методом.

Для расчета переходного процесса операторным методом необходимо:

– составить операторную схему замещения исходной электрической цепи в режиме *после коммутации*;

– чтобы найти изображение искомой величины (тока или напряжения) можно применить любой известный из первой части курса ТОЭ (ТЭЦ) метод расчета. Например, метод контурных токов, узловых потенциалов и т. д;

– перейти от изображения к оригиналу;

– построить график переходного процесса.

2.8 Поясните приемы, позволяющие перейти от изображения к оригиналу.

Переход от изображения к оригиналу можно выполнить несколькими способами. В общем случае восстановление оригинала выполняют при помощи интеграла Бромвича (2.2), однако эту процедуру можно значительно упростить, если принять во внимание, что все изображения переходных токов и напряжений являются правильными рациональными дробями.

Наиболее простым способом получения оригинала является применение специализированных таблиц. Чтобы воспользоваться таблицей, исходную дробь необходимо представить в виде суммы простейших, применяя *метод неопределенных коэффициентов*. Кратко напомним алгоритм разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших методом неопределенных коэффициентов:

- выполняем разложение знаменателя дроби на множители;
- записываем исходную дробь в виде суммы дробей с неизвестными коэффициентами в числителе ( $A, B, C...$ );
- приводим полученную сумму дробей к общему знаменателю и группируем компоненты по степеням;
- решая полученную систему линейных алгебраических уравнений любым известным методом, находим коэффициенты разложения  $A, B, C...$

После того, как было выполнено разложение исходной дроби на сумму простейших, применяя таблицу изображений и оригиналов (например, таблицу В.1), восстанавливаем функцию-оригинал.

Другой способ перехода от изображения к оригиналу заключается в применении формулы вычета функции комплексного переменного, представляющей собой правильную рациональную дробь. Данный способ получил название *теорема разложения*. Строгое доказательство представлено в учебниках по операционному исчислению, здесь же приведем непосредственно рабочую формулу.

Пусть исходная функция имеет вид

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (2.7)$$

тогда согласно теореме разложения, оригинал представляет собой сумму

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad (2.8)$$

где  $p_k$  – корни полинома в знаменателе выражения (2.7).

Алгоритм перехода к оригиналу с использованием теоремы разложения включает следующие шаги:

- определяем корни полинома в знаменателе (2.7);

- вычисляем производную от полинома в знаменателе (2.7);
- записываем формулу (2.8), подставляя полученные корни  $F_2(p)$ .

Отметим также, что практически все современные программные пакеты символьной математики (например, Mathcad, Wolfram и др.) имеют встроенные функции, позволяющие выполнять прямое и обратное преобразования Лапласа.

### 2.9 Какими преимуществами обладает операторный метод расчета?

Основное преимущество операторного метода расчета переходных процессов заключается в сведении системы линейных дифференциальных уравнений к системе обыкновенных алгебраических уравнений. Кроме того, широкий класс функций, для которых определены изображения, включающий в себя специальные функции, и позволяет рассчитывать переходные процессы с некорректными коммутациями

## 3 Примеры задач к защите

**Задача 1.** Электрическая цепь, представленная на рисунке 3.1, а, была подключена к источнику ЭДС  $E = 50$  В. Исследовать переходный процесс  $i_3(t)$ , применяя классический метод. Построить график.

*Примечание* – Конденсатор считать незаряженным.

Параметры элементов:  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом,  $C = 20$  мкФ.

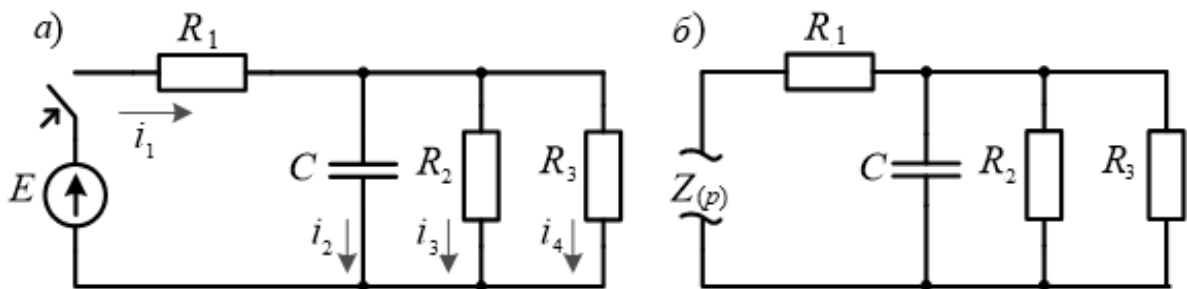


Рисунок 3.1 – Схемы электрической цепи к задаче 1

### Решение

Определим значение искомого тока в установившемся режиме (принужденную составляющую).

Вычислим сопротивление параллельного участка

$$R' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 4}{10 + 4} = \frac{40}{14} = 2,86 \text{ Ом.}$$

Тогда в ветви с источником ЭДС

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R'} = \frac{50}{2 + 2,86} = 10,3 \text{ А.}$$

Значение  $i_{3пр}$  определим применяя закон Ома

$$u_{abпр} = i_{1пр} \cdot R' = 10,3 \cdot 2,86 = 29,5 \text{ В};$$

$$i_{3пр} = \frac{u_{abпр}}{R_2} = \frac{29,5}{10} = 2,95 \text{ А.}$$

Для того чтобы получить характеристическое уравнение, сделаем разрыв цепи в произвольном месте и запишем выражение для комплексного входного сопротивления (импеданса) относительно точек разрыва. В полученном выражении следует всюду заменить  $i\omega$  на  $p$ .

Для схемы, представленной на рисунке 3.1, б, получим

$$Z(p) = R_1 + \frac{R' \cdot \frac{1}{pC}}{R' + \frac{1}{pC}} = 2 + \frac{2,86 \cdot \frac{10^6}{20p}}{2,86 + \frac{10^6}{20p}} = \frac{286p + 1,2 \cdot 10^7}{143p + 2,5 \cdot 10^6}. \quad (3.1)$$

Полученное выражение необходимо приравнять к нулю и затем найти корни уравнения. Очевидно, что достаточно найти корни числителя (3.1).

Приравнивая числитель (3.1) к нулю, получаем корень характеристического уравнения

$$286p + 1,2 \cdot 10^7 = 0 \Rightarrow p = -42482 \text{ с}^{-1}.$$

Имеем единственный вещественный корень характеристического уравнения. Ожидаемое решение запишем в виде суммы принужденной и свободной составляющей:

$$i_3(t) = i_{3пр}(t) + i_{3св}(t) = 2,95 + A \cdot e^{-42482t}, \quad (3.2)$$

где  $A$  – константа интегрирования.

Константу интегрирования определим из начальных условий. Поскольку конденсатор не был заряжен, напряжение на нем в начальный момент времени равно нулю (второй закон коммутации). Резистор  $R_2$  включен параллельно конденсатору, следовательно, в начальный момент времени искомый ток  $i_3(0) = 0$ .

Из выражения (3.2) при  $t = 0$  находим:

$$i_3(0) = 2,95 + A \cdot e^{0t} = 2,95 + A \Rightarrow A = -2,95.$$

Подставляя полученное значение  $A$  в (3.2), получаем окончательное решение:

$$i_3(t) = 2,95 - 2,95 \cdot e^{-42482t}.$$

График переходного процесса представлен на рисунке 3.2.

**Задача 2.** Электрическая цепь, содержащая индуктивность, была подключена к источнику постоянной ЭДС  $E = 50$  В (рисунок 3.3, а). Исследовать переходный процесс  $u_{R2}(t)$ , применяя классический метод. Построить график.

Параметры элементов:  $R_1 = 8$  Ом;  $R_2 = 5$  Ом;  $R_3 = 7$  Ом;  $L = 0,2$  Гн.

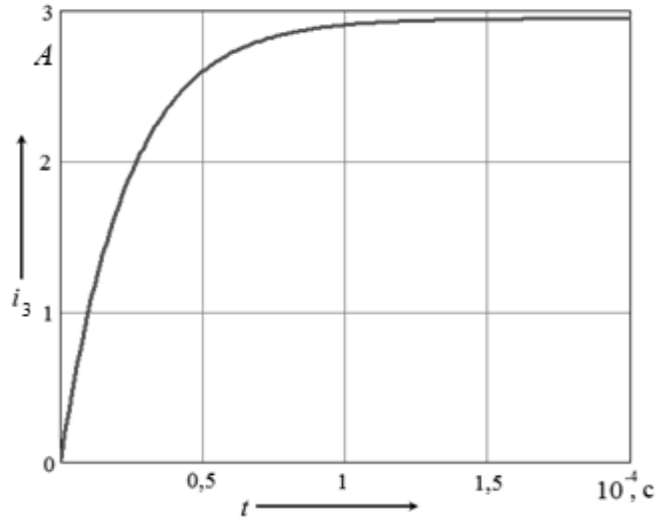


Рисунок 3.2 – График переходного процесса  $i_3(t)$

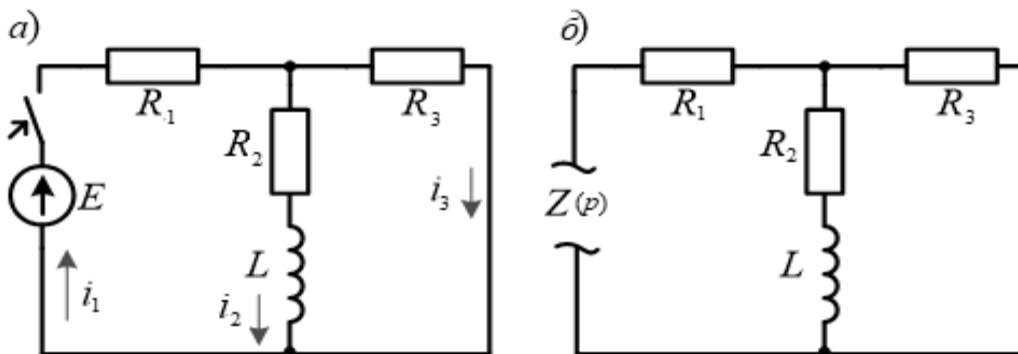


Рисунок 3.3 – Схемы электрической цепи к задаче 2

**Решение**

Определим установившееся значение  $u_{R2np}(t)$ . Поскольку идеальная катушка индуктивности не оказывает сопротивления постоянному току, применим закон Ома:

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{50}{8 + 2,9} = 4,6 \text{ А};$$

$$u_{R2np} = i_{1np} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 4,6 \cdot 2,9 = 13,34 \text{ В}.$$

Составим характеристическое уравнение, используя выражение для входного сопротивления цепи (рисунок 3.3, б).

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_3 \cdot (R_2 + pL)}{R_3 + R_2 + pL} = 8 + \frac{7 \cdot (5 + 0,2p)}{7 + 5 + 0,2p} = \frac{15p + 655}{p + 60}. \quad (3.3)$$

Приравняв числитель (3.3) к нулю, находим корни характеристического уравнения. Как и в предыдущей задаче, корень единственный и вещественный, поскольку электрическая цепь содержит лишь один реактивный элемент:

$$15p + 655 = 0 \Rightarrow p = -43,7(\text{с}^{-1}).$$

Запишем ожидаемое решение в виде суммы принужденной (установившейся) и свободной составляющих:

$$u_{R_2}(t) = u_{R_2\text{пр}} + u_{R_2\text{св}} = 13,34 + Ae^{-43,7t}. \quad (3.4)$$

Чтобы определить постоянную интегрирования  $A$ , запишем полученную выше функцию (3.4) в момент времени  $t = 0$  и применим первый закон коммутации, из которого следует, что  $i_2(0-) = i_2(0) = 0$ , т. к. до коммутации ток в ветви с катушкой отсутствовал (цепь была отключена). Напряжение на резисторе  $R_2$  в начальный момент времени согласно закону Ома также равно нулю.

Тогда

$$u_{R_2}(0) = 13,34 + A \Rightarrow 0 = 13,34 + A \Rightarrow A = -13,34.$$

Подставляя постоянную интегрирования в функцию (3.4), получаем искомое решение:

$$u_{R_2}(t) = u_{R_2\text{пр}} + u_{R_2\text{св}} = 13,34 - 13,34e^{-43,7t}.$$

График переходного процесса представлен на рисунке 3.4.

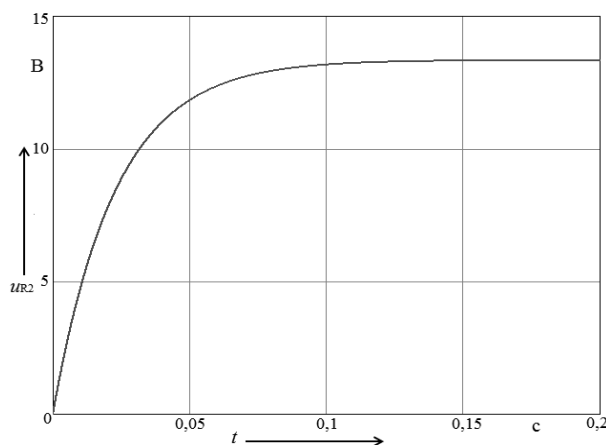


Рисунок 3.4 – График переходного процесса  $u_{R_2}(t)$

**Задача 4.** Решить задачу 1 операторным методом. Сравнить результаты, полученные классическим и операторным методами.

*Решение*

Используя схемы замещения (см. рисунок 2.2), составим операторную схему замещения электрической цепи (рисунок 3.5). Заметим, что до коммутации цепь была разомкнута и конденсатор по условию задачи не заряжен, следовательно,  $u_C(0) = 0$  В.

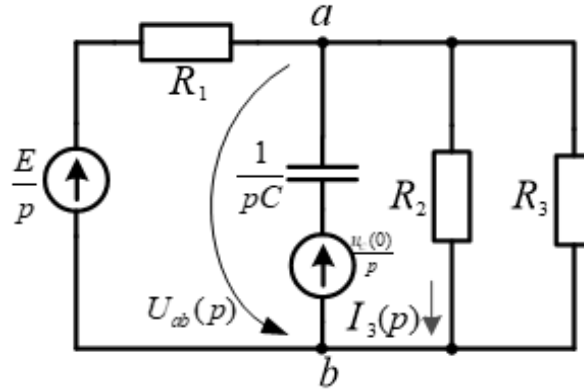


Рисунок 3.5 – Операторная схема замещения

Воспользуемся методом двух узлов. Для начала определим изображение напряжения  $U_{ab}(p)$ :

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{50}{p}}{0,5 + 0,1 + 0,25 + 20 \cdot 10^{-6} p} = \frac{1,25 \cdot 10^{-6}}{p(p + 42500)}.$$

Изображение искомого тока находим, применяя закон Ома,

$$I_3(p) = \frac{U_{ab}(p)}{R_2} = \frac{125000}{p(p + 42500)}. \quad (3.5)$$

Чтобы перейти от изображения к оригиналу, разложим (3.5) на сумму простейших дробей и воспользуемся таблицей изображений (см. таблицу В.1):

$$\frac{125000}{p(p + 42500)} = \frac{2,94}{p} + \frac{-2,94}{p + 42500};$$

$$i_3(t) = L^{-1}\{I_3(p)\} = 2,94 - 2,94e^{-42500t}.$$

Полученное решение согласуется с классическим методом расчета.

## Список литературы

1 **Башарин, С. А.** Теоретические основы электротехники : учебник / С. А. Башарин, В. В. Федоров. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Академия, 2013. – 384 с.

2 Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учеб. пособие для бакалавров / под ред. Л. А. Бессонова. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2015. – 528 с.

3 **Лоторейчук, Е. А.** Теоретические основы электротехники : учебник / Е. А. Лоторейчук. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2016. – 320 с. : ил.

## Приложение А (обязательное)

### Исходные данные задач для самостоятельной работы

Таблица А.1 – Выбор варианта

Порядковый номер	Вариант	Определить
1	8–14–1	$u_C(t)$
2	5–19–2	$u_{R2}(t)$
3	18–6–3	$u_C(t)$
4	4–5–4	$i_1(t)$
5	16–19–5	$u_{R3}(t)$
6	20–4–6	$i_3(t)$
7	3–12–7	$u_{R4}(t)$
8	14–3–8	$i_1(t)$
9	2–11–5	$u_C(t)$
10	20–2–2	$i_2(t)$
11	12–1–1	$u_{R4}(t)$
12	5–10–1	$u_{R4}(t)$
13	12–12–3	$i_1(t)$
14	6–17–4	$u_C(t)$
15	15–7–5	$u_C(t)$
16	18–8–6	$u_{R2}(t)$
17	2–2–7	$i_2(t)$
18	18–3–8	$u_{R3}(t)$
19	9–11–1	$i_1(t)$
20	7–9–4	$i_2(t)$
21	8–15–1	$u_C(t)$
22	18–3–2	$i_1(t)$
23	10–9–3	$u_{R2}(t)$
24	11–8–4	$u_{R3}(t)$
25	13–6–5	$i_1(t)$
26	14–16–6	$u_R(t)$
27	4–12–7	$u_C(t)$
28	1–7–8	$u_C(t)$
29	5–15–5	$i_2(t)$
30	16–10–7	$u_{R2}(t)$

Таблица А.2 – Источники ЭДС и тока

Порядковый номер	$E_1$ , В	$E_2$ , В	$J$ , А
1	–	60	3
2	120	–	0,5
3	100	–	1,2
4	–	70	2
5	140	–	2,5
6	100	–	1,5
7	120	–	0,5
8	–	60	1
9	–	70	1,7
10	–	50	2,5
11	120	–	5,5
12	100	–	2
13	130	–	1
14	120	–	0,5
15	–	80	3,5
16	–	70	1,7
17	130	–	0,7
18	120	–	0,25
19	–	60	1
20	100	–	2,3
21	80	–	3
22	110	–	2,5
23	–	100	1,7
24	–	90	2
25	–	120	0,7
26	90	–	1,5
27	110	–	2
28	70	–	1
29	–	85	0,5
30	–	110	0,25

Таблица А.3 – Исходные данные

Порядковый номер	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$R_4$ , Ом	$L$ , Гн	$C$ , мкФ
1	10	15	12	25	0,1	20
2	15	12	8	10	0,2	25
3	18	10	9	12	0,3	30
4	14	8	11	15	0,4	40
5	20	14	12	9	0,35	45
6	10	10	6	14	0,4	50
7	40	20	10	8	0,2	25
8	20	10	10	12	0,3	20
9	15	15	15	18	0,4	35
10	20	12	8	10	0,2	30
11	12	7	5	15	0,35	40
12	40	20	14	12	0,4	45
13	40	20	20	14	0,2	50
14	20	40	16	16	0,3	25
15	20	40	25	15	0,35	35
16	15	20	20	11	0,15	20
17	20	10	15	16	0,2	30
18	25	20	20	35	0,3	40
19	30	25	20	18	0,4	45
20	25	15	20	30	0,25	25
21	16	9	12	15	0,1	50
22	18	10	15	20	0,2	35
23	15	11	8	10	0,3	20
24	25	20	18	15	0,4	30
25	20	12	10	10	0,35	35
26	12	8	8	14	0,1	40
27	10	15	10	20	0,2	45
28	14	16	8	12	0,3	50
29	24	22	16	20	0,4	30
30	28	20	15	18	0,25	35

## Приложение Б (обязательное)

### Схемы электрических цепей

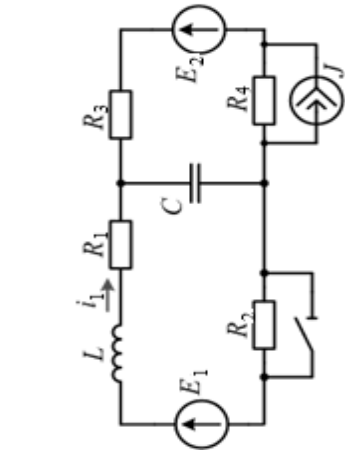


Рисунок 1

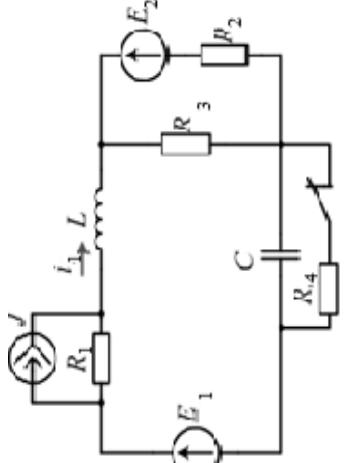


Рисунок 2

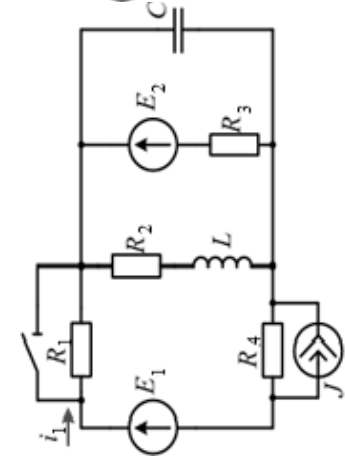


Рисунок 3

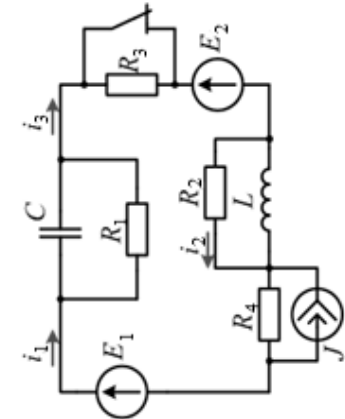


Рисунок 4

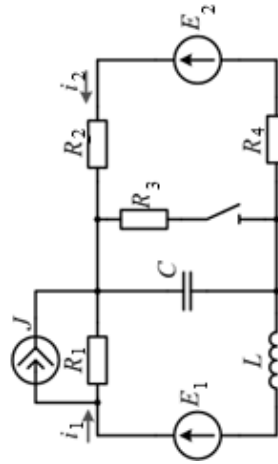


Рисунок 5

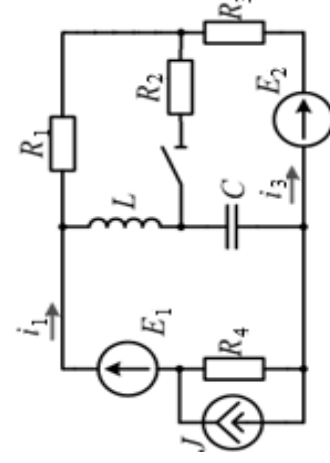


Рисунок 6

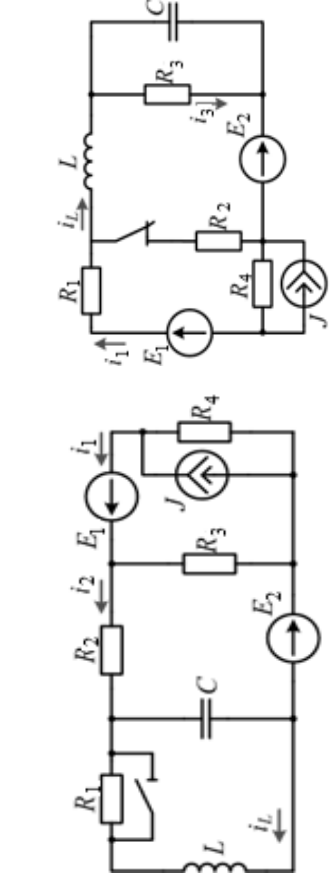


Рисунок 7

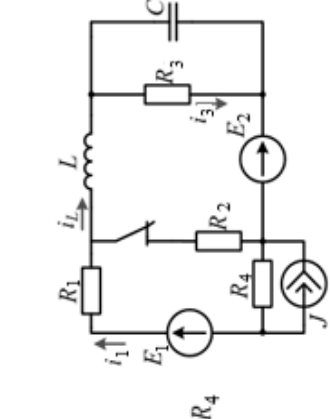


Рисунок 8

## Приложение В (рекомендуемое)

Таблица В.1 – Оригиналы и изображения некоторых функций

Порядковый номер	Оригинал, $f(t)$	Изображение, $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\delta(t)$ (дельта-функция)	1
3	$t$	$\frac{1}{p^2}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
5	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
6	$\alpha t - (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{\alpha^2}{p^2(p + \alpha)}$
7	$\cos(\omega t + \varphi_0)$	$\frac{p \cos \varphi_0 - \omega \sin \varphi_0}{p^2 + \omega^2}$
8	$\sin(\omega t + \varphi_0)$	$\frac{p \sin \varphi_0 + \omega \cos \varphi_0}{p^2 + \omega^2}$