К МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
alex-bondarev@tut.by

Аннотация. Для нелинейного матричного уравнения Ляпунова с помощью конструктивного метода регуляризации исследуется многоточечная краевая задача. По исходным данным задачи получены достаточные условия ее однозначной разрешимости. Предложен итерационный алгоритм построения решения, содержащий сравнительно простые вычислительные процедуры. Дана оценка, характеризующая скорость сходимости итерационной последовательности к решению, а также оценка области локализации решения.

Ключевые слова: нелинейное матричное уравнение Ляпунова; многоточечная краевая задача; однозначная разрешимость; алгоритм; сходимость.

Изучается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + C_1(t)XC_2(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in I, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A,\ B,\ C_1,\ C_2 \in C(I,\mathbb{R}^{n\times n}),\ F \in C(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}),\ D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\};\ I = [0,\omega],\ \omega > 0,\ 0 < \tilde\rho \leqslant \infty,\ M_i$ – вещественные постоянные $n \times n$-матрицы. Предполагается, что нелинейная функция $F(t,X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ локальному условию Липшица относительно X, при этом $F(t,0) \not\equiv 0$.

Настоящая работа представляет собой дополнение к статье [1] и развитие работ [2–4]. Продолжено изучение [2, 3] в случае сильного вырождения краевых условий [2]:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i = 0. \tag{3}$$

На основе применения метода [5] исследуются вопросы разрешимости и построения решения задачи (1), (2) в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \quad \|X\| \leqslant \rho\}, \quad \Phi = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int\limits_{t_j}^{t_k} A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|,$$

$$\alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \quad \beta = \max_{t\in I}\|B(t)\|, \quad c_s = \max_{t\in I}\|C_s(t)\| \ (s=1,2), \quad h = \max_{t\in I}\|F(t,0)\|,$$

$$m_i = \|M_i\|, \quad \tilde{m} = \sum_{j=1}^{k-1} m_j, \quad \varphi_j = \frac{1}{2}\left[(t_k-t_1)^2 + (t_j-t_1)^2 + (t_k-t_j)^2\right],$$

$$q = \gamma\sum_{j=1}^{k-1} m_j[\alpha(\alpha+\beta+c_1c_2+L)\varphi_j + (\beta+c_1c_2+L)(t_k-t_j)], \quad N = \gamma h\sum_{j=1}^{k-1} m_j[\alpha\varphi_j + (t_k-t_j)],$$

где $0<\rho<\tilde{\rho}$, $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица относительно X функции $F(t,X)$ для области D_ρ.

При выполнении условия $\det\Phi \neq 0$ задача (1), (2) эквивалентна интегральной задаче

$$X(t) = \Phi^{-1}\sum_{j=1}^{k-1} M_j\Bigg[\int\limits_{t_j}^{t}\int\limits_{t_j}^{\tau} A(\sigma)\,d\sigma(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau)))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t}^{t_k}\int\limits_{\tau}^{t_k} A(\sigma)\,d\sigma(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau)))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t_j}^{t_k}(X(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau)))\,d\tau\Bigg]. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3), *а также* $\det\Phi\neq 0$, $q<1$, $N/(1-q)\leqslant\rho$. *Тогда задача* (1), *(2) однозначно разрешима в области* D_ρ; *ее решение* $X = X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся к решению уравнения (4) последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением*

$$X_{p+1}(t) = \Phi^{-1}\sum_{j=1}^{k-1} M_j \times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_{t_j}^{t}\int\limits_{t_j}^{\tau} A(\sigma)\,d\sigma(A(\tau)X_p(\tau)+X_{p-1}(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X_{p-1}(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X_{p-1}(\tau)))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t}^{t_k}\int\limits_{\tau}^{t_k} A(\sigma)\,d\sigma(A(\tau)X_p(\tau)+X_{p-1}(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X_{p-1}(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X_{p-1}(\tau)))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t_j}^{t_k}(X_p(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X_p(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X_p(\tau)))\,d\tau\Bigg],\quad p=1,2,\ldots,$$

$$X_0=0,\quad X_1=-\Phi^{-1}\sum_{j=1}^{k-1}M_j\int\limits_{t_j}^{t_k}F(\tau,0)\,d\tau,$$

и удовлетворяющих условию (2), *при этом справедливы оценки*

$$\|X\|_C\leqslant\frac{N}{1-q},\quad \|X-X_p\|_C\leqslant\frac{q^p}{1-q}\|X_1-X_0\|_C,\quad p=1,2,\ldots$$

Библиографические ссылки

1. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Анализ многоточечной краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 12. С. 1591–1598.

2. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.

3. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

4. *Бондарев А.Н.* Многоточечная краевая задача для нелинейного уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова. Ижевск: Удмуртский ун–т, 2025. Ч. 1. С. 49–52.

5. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.