К АНАЛИЗУ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut.by

Аннотация. В работе на основе конструктивного метода регуляризации получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Валле–Пуссена для обобщения нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка и разработан итерационный алгоритм классического типа построения решения.

Ключевые слова: матричное уравнение; краевая задача Валле–Пуссена; однозначная разрешимость; алгоритм построения решения.

Объектом исследования является краевая задача типа [1, 2 и др.]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{X}\mathbf{C}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}(D, \mathbb{R}^{n\times n})$, $D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\}$ $(\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt)$; $0 < \tilde{\rho}_i \leqslant \infty$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$; $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально); кроме того, считается, что $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ не содержит линейных относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ слагаемых.

С помощью конструктивного метода [3] изучены вопросы разрешимости и построения решения задачи (1), (2) в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max\limits_{t\in I}\|\mathbf{X}(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – норма матрицы в рамках определения этой алгебры, например, одна из норм, описанных в [4, с. 21]. Результаты дополняют и обобщают [1, 2, 5].

Введены следующие обозначения и сведения, используемые при анализе данной задачи:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad h_1 = \max_{t\in I}\|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|, \quad h_2 = \max_{t\in I}\|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})\|,$$

$$\lambda_U = \max_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \quad \lambda_V = \max_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega}\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\|, \quad c = \max_{t\in I}\|\mathbf{C}(t)\|,$$

$$G = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in [0, \omega],\ \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\},$$

$$\tilde{G} = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leqslant \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\|_C \leqslant \rho_2\}, \quad p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(2c\rho_1 + L_1),$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3 L_2, \quad p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(2c\rho_1 + L_1), \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2 L_2,$$

$$\mathbf{Z}_C = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

где $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}$), $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ ($\mathbf{V}(0) = \mathbf{E}$), $\mathbf{E}$ – единичная матрица; $\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)\,d\tau$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(t)$; $\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор, $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau$, $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)$; $L_i = L_i(\rho_1, \rho_2)$ $(i = 1, 2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ в области G; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\Bigg(\int_\tau^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)(\mathbf{X}(s)\mathbf{C}\mathbf{X}(s) +$$

$$+ \mathbf{F}(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)))\mathbf{V}^{-1}(s)ds\Bigg)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(\varphi)\,d\varphi,$$

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\Bigg(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)(\mathbf{X}(s)\mathbf{C}(s)\mathbf{X}(s) +$$

$$+ \mathbf{F}(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)))\mathbf{V}^{-1}(s)\,ds\Bigg)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(t).$$

Вместо задачи (1), (2) рассматривается эквивалентная ей интегральная задача

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{3}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{4}$$

Лемма 1. *Для того чтобы в случае однозначной обратимости оператора* $\mathbf{\Phi}$ *пара функций* $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : [0, \omega] \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ *представляла собой решение задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы эти функции являлись решением системы интегральных уравнений (3), (4).*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \leqslant \rho_1, \quad p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \leqslant \rho_2, \quad p_1 + q_2 < 1. \tag{5}$$

Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима на множестве $\tilde{G}$, *при этом справедлива оценка*

$$\mathbf{Z}_C \leqslant (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены условия (5). Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области* G, *при этом справедлива оценка (6).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2]; указанная теорема следует из данной при $\mathbf{C}(t) \equiv 0$.

Для построения решения задачи (1), (2) используется классический метод последовательных приближений применительно к эквивалентной системе интегральных уравнений (3), (4)

$$\mathbf{X}_m(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{Y}_{m-1})(t), \tag{7}$$

$$\mathbf{Y}_m(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{Y}_{m-1})(t),\ m = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где в качестве начального приближения принимаются произвольные матрицы-функции $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8). Получены оценки

$$\mathbf{Z} \leqslant \tilde{\mathbf{Z}}_0 + (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{Z}_0,\ \tilde{\mathbf{Z}}_m \leqslant (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^m\mathbf{Z}_0,$$

где $\tilde{\mathbf{Z}}_0 = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}_0\| \\ \|\mathbf{Y}_0\| \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{Z}}_m = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_m\|_C \\ \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_m\|_C \end{pmatrix}$, $\mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\|_C \\ \|\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_0\|_C \end{pmatrix}$.

При $\mathbf{X}_0 = 0$, $\mathbf{Y}_0 = 0$ имеет место $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{H}$.

Библиографические ссылки

1. *Кашпар А. И., Лаптинский В. Н.* О разрешимости и построении решения задачи Валле–Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 1. С. 50–61.

2. *Кашпар А. И., Лаптинский В. Н.* Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570–583.

3. *Лаптинский В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

5. *Кашпар А. И.* Анализ краевой задачи Валле–Пуссена для обобщения нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // Теория управления и математическое моделирование. Матерю Всеросю конфю с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова. В 2-х ч. Ижевск, 2025. С. 87–91.