

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Н. Лаптинский

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
lavani@tut.by

Аннотация. Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи для нелинейной дифференциальной системы с линейным интегральным условием. Определена структура и приведен итерационный алгоритм классического типа построения решения.

Ключевые слова: нелинейная дифференциальная система; линейное интегральное условие; однозначная разрешимость; построение решения.

Рассматривается задача типа [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

$$\int_0^{\omega} \Psi(\tau)x(\tau) d\tau = \mu, \quad (2)$$

где $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^n)$, $\Psi \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $D_{\tilde{\rho}} \in \{(t, x) : t \in I, \|x\| < \tilde{\rho}\}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, функция $f(t, x)$ удовлетворяет в $D_{\tilde{\rho}}$ локальному условию Липшица относительно x , $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$.

По методике [2] исследуются вопросы разрешимости, структуры и построения решения задачи (1), (2).

Обозначения:

$$D_r \in \{(t, z) : t \in I, \|z\| \leq r\}, \quad \tilde{A} = \int_0^\omega A(\tau) d\tau, \quad F(t) = (\tilde{\Psi}^{-1} - \Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1})\mu,$$

$$\gamma = \|\tilde{\Psi}\Phi^{-1}\|, \quad \gamma_0 = \|\tilde{\Psi}^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|\Phi(t)\|, \quad \beta = \max_{t \in I} \|\Psi(t)\|, \quad a = \max_{t \in I} \|F(t)\|,$$

$$k = \max_{t \in I} \|\Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1}\mu\|, \quad h = \max_{t \in I} \|f(t, 0)\|, \quad q = \gamma\alpha\beta\omega + \frac{1}{2}\gamma_0\beta(1 + \gamma\alpha\beta\omega)L\omega^2,$$

$$p = \frac{1}{2}\gamma_0\beta\omega^2(kL + h) + a, \quad K(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{\Psi}^{-1} \int_0^\tau \Psi(s) ds, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{\Psi}^{-1} \int_\tau^\omega \Psi(s) ds, & 0 < t \leq \tau \leq \omega, \end{cases}$$

где $0 < r < \tilde{\rho}$, $z \in \mathbb{R}^n$, $A = \{\Psi\Phi, \Psi\}$, $\Phi \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ – функция, аналогичная $\Psi(t)$, $\|x\|_C = \max_{t \in I} \|x(t)\|$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма.

Первичные допущения-условия:

$$\det \tilde{\Psi}\Phi \neq 0, \tag{3}$$

$$\det \tilde{\Psi} \neq 0. \tag{4}$$

Сначала на основе (2), (3) определена структура решения задачи (1), (2):

$$x(t) = y(t) - \Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1} \int_0^\omega \Psi(\tau)y(\tau) d\tau + \Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1}\mu, \tag{5}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \tag{6}$$

где $x_0 = x(0)$, $y \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ – вспомогательная функция типа [2]. На основании (5), (6) вместо задачи (1), (2) рассматривается эквивалентная ей система соотношений (5) и

$$y(t) = \Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1} \int_0^\omega \Psi(\tau)y(\tau) d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)f_y(\tau) d\tau + F(t), \tag{7}$$

где $f_y(t) = f(t, y(t) - \Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1} \int_0^\omega \Psi(\tau)y(\tau) d\tau + \Phi(t)\tilde{\Psi}\Phi^{-1}\mu)$.

Лемма. Пусть выполнены условия (3), (4), а также $q < 1$, $p/(1-q) \leq \delta$. Тогда уравнение (7) однозначно разрешимо в области D_δ ; для его решения справедлива оценка $\|y\|_C \leq p/(1-q)$.

Теорема. Пусть выполнены допущения и предположения леммы, при этом $k < \rho$, $\delta \leq (\rho - k)/(1 + \gamma\alpha\beta\omega)$. Тогда задача (1), (2) в представлении (5) однозначно разрешима в области D_ρ , при этом имеет место оценка $\|x\|_C \leq (1 + \gamma\alpha\beta\omega)\delta + k$.

Для построения решения используется классический метод последовательных приближений [3, с. 606]

$$y_{p+1}(t) = \Phi(t)\widetilde{\Psi}\Phi^{-1} \int_0^\omega \Psi(\tau)y_p(\tau) d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)f_{y_p}(\tau) d\tau + F(t), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

где $y_0 \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ – произвольная функция, принадлежащая шару $\|y\| \leq \delta$.

Установлено, что методика [2] применима для анализа задачи с уравнением (1) и условиями

$$\int_0^\omega \Psi_i(\tau)x(\tau) d\tau = \mu_i,$$

где $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$.

Замечание. В работе [1] выполнен обширный анализ задачи (1) с абстрактным линейным функционалом в (2) с использованием формального регуляризатора. По методу регуляризации [4] (см. также [5, 6]) может быть выполнен конструктивный анализ задачи с уравнением (1) и нелинейным условием

$$\int_0^\omega g(\tau, x(\tau)) d\tau = \mu,$$

где $g \in \mathbb{C}^{(0,1)}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^n)$, с применением одного из регуляризаторов

$$\int_0^\omega g(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^\omega g(\tau, x(t)) d\tau - \int_0^t \int_0^\tau G(\sigma, x(\tau)) dx(\tau) d\sigma + \int_t^\omega \int_\tau^\omega G(\sigma, x(\tau)) dx(\tau) d\sigma, \quad (8)$$

$$\int_0^\omega g(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^\omega g(\tau, x(t)) d\tau - \int_0^\omega \int_\sigma^t G(\sigma, x(\tau)) dx(\tau) d\sigma, \quad (9)$$

где $G(t, x) = \partial g(t, x)/\partial x$.

Расположение переменных и пределов интегрирования является специфическим для (8), (9). Например, для (9), возможен следующий вариант:

$$\int_0^\omega g(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^\omega g(\tau, x(t)) d\tau - \int_0^\omega \int_\tau^t G(\tau, x(\sigma)) dx(\sigma) d\tau.$$

Аналогично имеем для (8)

$$\int_0^\omega g(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^\omega g(\tau, x(t)) d\tau - \int_0^t \int_0^\sigma G(\tau, x(\sigma)) dx(\sigma) d\tau + \int_t^\omega \int_\sigma^\omega G(\tau, x(\sigma)) dx(\sigma) d\tau.$$

Для периодической краевой задачи $g(t, x) \equiv f(t, x)$, $\mu = 0$ [4].

Библиографические ссылки

1. *Ешукон Л. Н.* Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 3(81). С. 191–196.
2. *Лаптинский В. Н.* Решение многоточечной задачи управления с интегральными ограничениями типа равенств // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 10. С. 1386–1393.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. *Лаптинский В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.
5. *Лаптинский В. Н.* К регуляризации периодической краевой задачи для существенно нелинейных неавтономных дифференциальных систем // XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2019). Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. С. 81–82.
6. *Лаптинский В. Н.* К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений // Междунар. мат. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова. Мн.: БГУ, 2021. С. 98–100.